ВЕСТНИК ВГУ, Серия физика, математика, 2000, в. 1

РАЗДЕЛ МАТЕМАТИКА

УДК 639.374

РАСЧЕТ ОБОЛОЧЕК ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ, БЛИЗКИХ К ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ, МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

М.А. Артемов, С.А. Вульман, Т.Д. Семыкина

Воронежский государственный университет

В машиностроении, в частности, в авиационной промышленности, приходится иметь дело с расчетом элементов конструкций, представляющих собой тонкие оболочки, одна из главных кривизн которых мала, но отлична от нуля. Предлагаемый метод позволяет свести расчет подобных оболочек к расчету цилиндрических оболочек, для которых имеется хорошо развитый математический аппарат.

В машиностроении, в частности, в авиационной промышленности, приходится иметь дело с расчетом элементов конструкций, представляющих собой тонкие оболочки, одна из главных кривизн которых мала, но отлична от нуля. Предлагаемый метод позволяет свести расчет подобных оболочек к расчету цилиндрических оболочек, для которых имеется хорошо развитый математический аппарат.

Пусть уравнения срединной поверхности оболочки в цилиндрической системе координат r, θ, z можно выписать в виде $r = r_1(z) + r_2(\theta)$. Для поверхности, достаточно мало отличающейся от цилиндрической

$$r = r_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_1^n r_1^{(n)}(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \delta_2^m r_2^{(m)}(\theta). \qquad (1)$$

Здесь δ_1 - малый параметр, характеризующий отклонение меридиана от прямой, δ_2 характеризует отклонение второй кривизны от константы.

Учитывая (1), уравнение срединной поверхности оболочки можно записать в виде

$$\vec{r} = (r_0 + \delta_1 r_1^{(1)}(z) + \delta_2 r_2^{(1)}(\theta))\vec{e}_r + z\vec{e}_z + o(\delta_i). \qquad (2)$$

Ниже верхний индекс (1) у r_i не указывается.

Принимая в качестве независимых параметров z и θ, получим основные геометрические характеристики поверхности, определяемой соотношениями (2). Первая основная квадратичная форма поверхности:

$$d\vec{r} \cdot d\vec{r} = E(z,\theta)dz^2 + 2F(z,\theta)dzd\theta + G(z,\theta)d\theta^2,$$

где с точностью до $o(\delta_i)$

$$E(z,\theta) = \vec{r}_z \cdot \vec{r}_z = 1, \quad F(z,\theta) = \vec{r}_z \cdot \vec{r}_\theta = 0, \qquad (3)$$
$$G(z,\theta) = \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\theta = r^2 = r_0^2 + 2\delta_1 r_0 r_1(z) + 2\delta_2 r_0 r_2(\theta).$$

Элемент площади определяется выражением

$$\sqrt{EG - F^2}\, dzd\theta = rdzd\theta. \qquad (4)$$

Единичный вектор нормали к поверхности

$$\vec{n} = -\vec{e}_r + \delta_2 r_2'(\theta) r_o^{-1} \vec{e}_\theta + \delta_1 r_1'(z)\vec{e}_z + o(\delta_i). \qquad (5)$$

Из (3), (5) определяем вторую основную квадратичную форму

$$-d\vec{r} \cdot d\vec{n} = L(z,\theta)dz^2 + 2M(z,\theta)dzd\theta + N(z,\theta)d\theta^2,$$

где с точностью до $o(\delta_i)$

$$L(z,\theta) = -\delta_1 r_1'', \quad M(z,\theta) = 0, \quad N(z,\theta) = r - \delta_2 r_2''. \qquad (6)$$

Главные кривизны k_1, k_2 являются корнями характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0,$$

из которого с учетом (3) и (6) получаем

$$k_1 = \frac{1}{R_1} = -\delta_1 r_1''(z), \qquad (7)$$

$$k_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0^2}\left(\delta_1 r_1(z) + \delta_2 r_2(\theta) + \delta_2 r_2''(\theta)\right).$$

Рассмотрим уравнение Гаусса [1]

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_2}{A_1 \partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial A_1}{A_2 \partial \theta}\right) = -A_1 A_2 k_1 k_2 + \frac{A_1 A_2}{R_{12}^2}, \qquad (8)$$

где A_1 и A_2 - параметры Ламе, которые можно выразить через коэффициенты первой квадратичной формы

$$A_1 = \sqrt{E} = 1, \quad A_2 = \sqrt{G} = r. \qquad (9)$$

Подставляя (7) в (8) получим $R_{12}^{-1}=0$. Следовательно, для первого приближения линии $z = const$ и θ=const являются главными линиями кривизны.

Будем искать перемещения срединной поверхности u,v,w, а также внутренние усилия N_1, N_2, S, Q_1, Q_2 и моменты M_1, M_2, M_{12} в виде рядов типа

$$f = f^{(0)}(z,\theta) + \delta_1 f^{(1)}(z,\theta) + \delta_2 f^{(2)}(z,\theta). \qquad (10)$$

Компоненты перемещений, усилий и моментов с индексом (0) представляют собой решение для круговой цилиндрической оболочки с радиусом r_0=R.

Пусть внешняя нагрузка задана вектором $\vec{p}(p_z, p_\theta, p_r)$ в цилиндрической системе координат. Выпишем уравнения равновесия элемента оболочки [1]

$$\frac{\partial}{\partial z}(A_2 N_1) - N_2 \frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{\partial S}{\partial \theta} + p_z A_2 + Q_1 k_1 A_2 = 0,$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \theta} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial z}\left(A_2^2 S\right) + Q_2 k_2 A_2 + p_\theta A_2 = 0,$$

$$-(k_1 N_1 + k_2 N_2) A_2 + \frac{\partial}{\partial z}(A_2 Q_1) + \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} + p_r A_2 = 0, \qquad (11)$$

$$\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial z}\left(A_2^2 M_{12}\right) + \frac{\partial M_2}{\partial \theta} - Q_2 A_2 = 0,$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z}(A_2 M_1) - M_2 \frac{\partial A_2}{\partial z} - Q_1 A_2 = 0.$$

Учитывая, что элемент поверхности рассматриваемой оболочки отличен от элемента круговой цилиндрической оболочки, и считая, что вектор нагрузки задан проекциями на оси цилиндрической системы координат $\vec{p}(p_r, p_\theta, p_z)$, заменим его эквивалентной системой, приложенной к цилиндрическому элементу. Суммарная нагрузка, приложенная к элементу поверхности рассматриваемой оболочки $\vec{P} = \vec{p} \cdot r dz d\theta$. Перенося эту нагрузку на цилиндрическую оболочку, получим главный вектор и главный момент с проекциями

$$\vec{P} = \vec{p}\left(R + \delta_1 r_1 + \delta_2 r_2\right) dz d\theta,$$

$$mom_z \vec{P} = -p_\theta R\left(\delta_1 r_1 + \delta_2 r_2\right) dz d\theta, \qquad (12)$$

$$mom_\theta \vec{P} = p_z R\left(\delta_1 r_1 + \delta_2 r_2\right) dz d\theta.$$

Если рассматриваемая оболочка находится под действием нагрузки, ориентированной на геометрию оболочки, то проекции нагрузки будут представлены в виде

$$p_r = p_r^{(0)} + \delta_1 p_r^{(1)} + \delta_2 p_r^{(2)},$$

$$p_z = p_z^{(0)} + \delta_1 p_z^{(1)} + \delta_2 p_z^{(2)}, \qquad (13)$$

$$p_\theta = p_\theta^{(0)} + \delta_1 p_\theta^{(1)} + \delta_2 p_\theta^{(2)}.$$

Подставляя (10) в (11), с учетом (7), (9) и (12), (13), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях δ, получим уравнения равновесия в виде:

$$R\frac{\partial N_1^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial S^{(i)}}{\partial \theta} + p_z^{(i)} R = g_1^{(i)},$$

$$\frac{\partial N_1^{(i)}}{\partial \theta} + R\frac{\partial S^{(i)}}{\partial \theta} + Q_2^{(i)} + p_\theta^{(i)} R = g_2^{(i)},$$

$$-N_2^{(i)} + R\frac{\partial Q_1^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial Q_2^{(i)}}{\partial \theta} + p_r^{(i)} R = g_3^{(i)}, \qquad (14)$$

$$R\frac{\partial M_{12}^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial M_2^{(i)}}{\partial \theta} - Q_2^{(i)} R = g_4^{(i)},$$

$$\frac{\partial M_{12}^{(i)}}{\partial \theta} + R\frac{\partial M_1^{(i)}}{\partial z} - Q_1^{(i)} R = g_5^{(i)},$$

для величин нулевого порядка (i=0) $g_m^{(0)} = 0$, m=1,...,5,

для величин первого порядка при δ_1

$$g_1^{(1)} = -p_z^{(0)} r_1 - N_1^{(0)} r_1' - r_1 \frac{\partial N_1^{(0)}}{\partial z} + N_2^{(0)} r_1' + Q_1^{(0)} R r_1'',$$

$$g_2^{(1)} = -p_\theta^{(0)} r_1 - r_1 \frac{\partial S^{(0)}}{\partial z} - 2S^{(0)} r_1',$$

$$g_3^{(1)} = -p_r^{(0)} r_1 - N_1^{(0)} R r_1'' - Q_1^{(0)} r_1' - r_1 \frac{\partial Q_1^{(0)}}{\partial z}, \qquad (15)$$

$$g_4^{(1)} = -2M_{12}^{(0)} r_1' - r_1 \frac{\partial M_{12}^{(0)}}{\partial z} + r_1 Q_2^{(0)} - p_\theta^{(0)} r_1 R,$$

$$g_5^{(1)} = -r_1' M_1^{(0)} - r_1 \frac{\partial M_1^{(0)}}{\partial z} + M_2^{(0)} r' + r_1 Q_1^{(0)} - p_z^{(0)} r_1 R,$$

для величин первого порядка при δ_2

$$g_1^{(2)} = -p_z^{(0)} r_2 - r_2 \frac{\partial N_1^{(0)}}{\partial z},$$

$$g_2^{(2)} = -p_\theta^{(0)} r_2 - r_2 \frac{\partial S^{(0)}}{\partial z} + \frac{r_2''}{R} Q_2^{(0)},$$

$$g_3^{(2)} = -\frac{N_2^{(0)} r_2''}{R} - r_2 \frac{\partial Q_1^{(0)}}{\partial z} - p_r^{(0)} r_2, \qquad (16)$$

$$g_5^{(2)} = r_2 Q_2^{(0)} - r_2 \frac{\partial M_{12}^{(0)}}{\partial z} - p_\theta^{(0)} r_2 R,$$

$$g_6^{(2)} = r_2 Q_1^{(0)} - r_2 \frac{\partial M_1^{(0)}}{\partial z} - p_\theta^{(0)} r_2 R .$$

Запишем выражения, связывающие компоненты деформаций оболочки с перемещениями [1]

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{v}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \theta} + \frac{w}{R_1},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{w}{R_2},$$

$$\gamma = \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v}{A_2}\right) + \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{u}{A_1}\right),$$

$$\chi_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u}{R_1} - \frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{1}{A_1 A_2}\left(\frac{v}{R_2} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)\frac{\partial A_1}{\partial \theta},$$

$$\chi_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{v}{R_2} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{A_1 A_2}\left(\frac{u}{R_1} - \frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial A_2}{\partial z},$$

$$\chi_{12} = \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{A_2}\left(\frac{v}{R_2} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) + \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{1}{A_1}\left(\frac{u}{R_1} - \frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Представляя деформации и кривизны в виде разложения по параметрам δ_1 и δ_2, получим:

$$\varepsilon_z^{(i)} = \frac{\partial u^{(i)}}{\partial z} + h_1^{(i)},$$

$$\varepsilon_\theta^{(i)} = \frac{1}{R}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{w^{(i)}}{R} + h_2^{(i)},$$

$$\gamma^{(i)} = \frac{\partial v^{(i)}}{\partial z} + \frac{1}{R}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial z} + h_3^{(i)},$$

$$\chi_1^{(i)} = -\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial z^2} + h_4^{(i)},$$

$$\chi_2^{(i)} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial \theta} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial \theta^2} + h_5^{(i)},$$

$$\chi_{12}^{(i)} = \frac{1}{R}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial z} - \frac{2}{R}\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial \theta \partial z} + h_6^{(i)}$$

для величин нулевого порядка (i=0) $h_m^{(0)} = 0$, m=1,…,6,

для величин первого порядка при δ_1

$$h_1^{(1)} = -w^0 r_1'',$$

$$h_2^{(1)} = -\frac{r_1}{R^2}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial \theta} + \frac{r_1'}{R} u^{(0)} - \frac{r_1}{R^2} w^{(0)},$$

$$h_3^{(1)} = -\frac{r_1'}{R} v^{(0)} - \frac{r_1}{R^2}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \theta},$$

$$h_4^{(1)} = -r_1''\frac{\partial u^{(0)}}{\partial z} - r_1''' u^{(0)},$$

$$h_5^{(1)} = -\frac{2r_1}{R^3}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial \theta} + \frac{2r_1}{R^3}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \theta^2} - \frac{r_1'}{R}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial z},$$

$$h_6^{(1)} = -\frac{r_1}{R^2}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial z} - \frac{2r_1'}{R^2} v^{(0)} -$$

$$- \frac{r_1''}{R}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \theta} + \frac{2r_1'}{R^2}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \theta} + \frac{2r_1}{R^2}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \theta \partial z},$$

для величин первого порядка при δ_2

$$h_1^{(2)} = 0, \quad h_2^{(2)} = -\frac{r_1}{R^2}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial \theta} - \frac{r_2 + r_2''}{R^2} w^{(0)},$$

$$h_3^{(2)} = -\frac{r_2}{R^2}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \theta}, \quad h_4^{(2)} = 0,$$

$$h_5^{(2)} = -\frac{2r_2}{R^3}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial \theta} - \frac{r_2' + r_2'''}{R^3} V^{(0)} + \frac{2r_2}{R^3}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \theta^2} + \frac{r_2'}{R^3}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \theta^2}$$

$$h_6^{(2)} = -\frac{r_2 + r_2''}{R^2}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial z} + \frac{2r_2}{R^2}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \theta \partial z}.$$

Компоненты усилий и моментов связаны с компонентами деформаций срединной поверхности традиционными соотношениями

$$N_1 = B(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2),$$
$$N_2 = B(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1),$$
$$S = Gh\gamma, \; M_1 = D(\chi_1 + \nu\chi_2), \qquad (17)$$
$$M_2 = D(\chi_2 + \nu\chi_1), \; M_{12} = D(1-\nu)\chi_{12},$$

$$B=\frac{Eh}{1-\nu^2},\ D=\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}.$$

Очевидно, ввиду линейности (17), для каждого приближения сохраняется эта зависимость.

Система уравнений замыкается граничными условиями, для вывода которых воспользуемся вариационной формулой

$$\oint\left[\left(\vec{T}^e-\vec{T}_\nu\right)\delta\overline{U}+\left(\vec{M}^e-\vec{M}_\nu\right)\delta\overline{\theta}\right]ds=0, \qquad (18)$$

где $\vec{T}^e, \vec{M}^e$ – вектор и момент внешних сил, приложенных к границе оболочки, $\vec{T}_\nu, \vec{M}_\nu$ – вектор и момент внутренних сил оболочки. Интеграл взят по краевому контуру, который будем считать замкнутым для упрощения, в противном случае в углах контура добавляется сосредоточенная реакция по известной методике.

Внутренние и внешние нагрузки и перемещения, входящие в (18), записываются в виде рядов по параметрам δ_1 и δ_2 с учетом геометрии оболочки. Например, в случае свободного края z = *const д*ля системы (14)

$$N_1^{(0)}=0,\quad S^{(0)}+\frac{M_{12}^{(0)}}{R}=0,$$
$$Q_1^{(0)}+\frac{\partial M_{12}^{(0)}}{R\partial\theta}=0,\quad M_1^{(0)}=0,$$

для системы (15)

$$N_1^{(1)}=0,\quad S^{(1)}+\frac{M_{12}^{(1)}}{R}-\frac{M_{12}^{(0)}}{R^2}r_1=0,$$
$$Q_1^{(1)}+\frac{1}{R}\frac{\partial M_{12}^{(1)}}{\partial\theta}-\frac{r_1}{R^2}\frac{\partial M_{12}^{(0)}}{\partial\theta}=0,\quad M_1^{(1)}=0,$$

для системы (16)

$$N_1^{(2)}=0,\quad S^{(2)}+\frac{M_{12}^{(2)}}{R}-\frac{r_2+r_2''}{R^2}M_{12}^{(0)}r_2=0,$$
$$Q_1^{(2)}+\frac{1}{R}\frac{\partial M_{12}^{(2)}}{\partial\theta}-\frac{r_2}{R^2}\frac{\partial M_{12}^{(0)}}{\partial\theta}=0,\quad M_1^{(2)}=0.$$

Таким образом, анализ состояния оболочки двоякой кривизны, срединная поверхность которой описана уравнением (1), может быть сведен к расчету круговой цилиндрической оболочки радиуса R. При этом отличие геометрии рассматриваемой оболочки от цилиндрической в уравнениях первого приближения дает свободные члены, определяемые решением нулевого приближения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. П.М.Огибалов, М.А.Колтунов. Оболочки и пластины: Изд-во:МГУ, 1969. 696 с.