УДК 16

ФИЛОСОФСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ «ТРЕХ КОМПОНЕНТ» ФОРМАЛИЗМА Д. ГИЛЬБЕРТА В ОСНОВАНИЯХ МАТЕМАТИКИ

А. М. Измайлова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 11 февраля 2020 г.

Аннотация: *в нашем исследовании мы постараемся раскрыть новый подход к анализу формалистской программы Гильберта. Мы примем некую установку о наличии в основаниях математики как минимум трех компонент, а именно: арифметической, геометрической и логической. Укажем подробнее, что имеем в виду под каждой, проведя подробный анализ программы формализма.*
Ключевые слова: *формализм, основание математики, арифметизация, логический анализ.*

Abstract: *in our study, we will try to reveal a new approach to the analysis of the Hilbert formalist program. We will accept a certain attitude about the presence of at least three components in the foundations of mathematics, namely: arithmetic, geometric, and logical. We will specify in more detail what we mean by each, having carried out a detailed analysis of the formalism program.*
Key words*: formalism, foundation of mathematics, arithmetic, logical analysis.*

Разобьем наше исследование на три части и проведем анализ формализма в соответствии с принятой ранее установкой [1–2].

1. Познавательный и теоретический аспект логической составляющей в программе формализма

Для последовательного изложения материала поставим несколько задач, на которые будем ссылаться в ходе нашего исследования: 1) необходимо рассмотреть основные положения программы логицизма; 2) провести сравнительный анализ программ формализма и логицизма на предмет общих и различных закономерностей в их объективном рассмотрении; 3) подведем итог о логической составляющей программы формализма как одной из компонент программы Гильберта.

Начнем с программы логицизма, основателями которой считаются Фреге, Рассел и Пеано. В основе данного направления в основании математики лежат представления о логической природе математических понятий. Главный тезис, который провозглашают логицисты, звучит следующим образом – всю математику возможно свести к логике. Заметим то, что данное направление стремится обосновать истинность математических теорий через их редукцию к аксиомам логики, надежность которых обеспечена статусом логики в системе знаний. Таким образом, логицизм основывается на нескольких положениях, а именно:

1. Любой математический объект может быть записан в понятиях логики.

2. Каждое математическое утверждение можно вывести из логических правил вывода (если его записать в виде набора символов), что будет являться общезначимым суждением для логического исчисления.

Теперь рассмотрим более подробно вклад представителей логицизма в развитие направления. По мнению Рассела, его труд «Principia Mathematica» [3–4] был основан на двух логических анализах того времени, поэтому он стал обобщением наиболее важных результатов, принятых к тому времени в области обоснования математики.

Первый анализ был связан с арифметизацией математики, а именно сведением ее многообразного содержания к единой теории натурального числа. Этой проблемой занимался немецкий логик и математик Г. Фреге [5–6], который доказал то, что всю традиционную математику можно мыслить как полностью состоящей из высказываний о натуральных числах. Другими словами, все ее объекты можно определить с помощью натуральных чисел, а ее суждения вывести из свойств натурального ряда, употребляя в качестве аппарата символы и законы логики.

Второй анализ состоял в аксиоматизации арифметики, т. е. редуцировании теории натуральных чисел к набору аксиом и неопределяемым терминам. Этот анализ был выполнен итальянским математиком Д. Пеано. По утверждению самого Пеано, достаточно всего трех неопределяемых терминов и пяти аксиом, которые носят его имя, чтобы формализовать теорию натуральных чисел и тем самым всю арифметику.

Таким образом, в истории известен тот факт, что математика и логика были полностью разными сферами научной деятельности. Однако сейчас, как полагал Рассел, эти области стали единым целым, поэтому иногда нелегко провести между ними какую-либо границу.

Так или иначе, логицизм стал первым направлением в основаниях математики, который хотел спасти математику от парадоксов и подтвердить ее статус надежности в глазах всей науки.

После достаточно подробной характеристики логицизма перейдем к вопросу о сравнительном анализе двух указанных выше направлений. Без всякого сомнения, две школы имели различия по значению, методам и использованным средствам своей деятельности. Однако в ходе нашего исследования важен другой вопрос, а именно нас будет интересовать их отношение к природе математических объектов и как эти два направления в основаниях математики решали проблему достоверности математического познания. Школа Гильберта, как нам известно, решала эти вопросы, основываясь на доказательстве непротиворечивости формальной системы. Логицисты, в свою очередь, считали, что в основе математического знания лежит «число». Именно его онтологический статус интересовал их представителей. Пеано утверждал, сошлемся на его аксиому два, что «натуральное число, следующее за любым натуральным числом, есть натуральное число» [7, с. 157]. Рассел говорит, что «…натуральное число есть всё, что является числом некоторого класса» [3, с. 12]. Фреге, в свою очередь, отходит от них, высказываясь о натуральном числе как об: «объеме равночисленных понятий» [5, с. 33]. При этом Рассел в своем произведении [4] соглашается с Фреге и его трактовкой числа, хоть и с некоторой оговоркой, ссылаясь, например, на «тройку лошадей». Этот пример, как известно, иллюстрирует число «три», как число конкретного натурального ряда, а сама тройка лошадей не является примером натурального числа «три» и не должна пониматься математиками, как отождествление числа и «тройки лошадей». Другими словами, конкретное число не тождественно тому множеству, элементы которого оно означает. Число «три» не тождественно «тройке лошадей», оно идентично с тем свойством, которое соединяет все множества, состоящие из трех элементов в один общий класс и делает его уникальным.

Такого рода рассуждения интересовали логицистов в области природы математических объектов. Однако в проблеме достоверности математического познания они по праву считаются первыми создателями развитого логического аппарата, который начинал складываться еще с Лейбница и завершился уже к деятельности формалистов. Именно об этом аппарате логического анализа и пойдет речь дальше, потому что формалисты заимствовали его для своей цели построения абсолютного доказательства непротиворечивости математики.

Логицисты в своих работах пользовались конструированием математических понятий на основе одного из четырех фундаментальных отношений:

1. «Принадлежность элемента к классу» [4]. Раскроем значение этого отношения, сославшись на идеи Кантора, который утверждал «принадлежность элемента множеству» [8], как видно, Рассел взял эту формулировку именно у него. Термин «класс» был введен Расселом в своем знаменитом парадоксе лжеца, который вскрыл ошибки в «Наивной теории множеств» Кантора. Проще говоря, Рассел заменил термин «множество» на «класс», чтобы устранить всяческие парадоксы, возникающие в то время вокруг этого понятия.

2. «Применение функции к аргументу» [4]. Смыслом этого отношения является схожая трактовка Фреге термина «функции». Дело в том, что Рассел не мог согласиться с ним по поводу того, что функция может стать аргументом, а аргумент – функцией (а также в том, что функция – это неопределяемое понятие, как было у Фреге), – и ввел следующее замечание: «Если функция может рассматриваться как аргумент, значит, это должно считаться в математике неверным и противоречить здравому смыслу».

3. «Именование». Отношение, связанное с именем объекта в математике, было заимствовано Расселом у Фреге.

4. «Часть – целое». Значение этого отношения определяется тем фактом, что Рассел использовал в своих произведениях идеи античных авторов. Ссылаясь на это отношение в логике, легче всего показать отношение род – вид (мереологическое деление), которое широко используется в современных работах С. Лесневского [9].

Несмотря на умение конвертировать математические понятия в логические, логицизм все-таки потерпел неудачу. Всё следовало к тому, что математика включает в себя не только строго логические законы, а еще и внелогические правила вывода и аксиомы (аксиома бесконечности, принцип математической индукции и т. д.). «Все логические суждения могут быть выражены полностью в терминах логических констант вместе с терминами» [5], как говорит Рассел. Однако обратное утверждение, что все суждения, которые выражены таким образом, являются логическими, – неверно.

2. Формалистское понимание гносеологического статуса арифметического компонента в математическом знании

В этой части работы укажем на несколько аспектов данной проблемы, связанных с арифметической компонентой программы формализма Гильберта: 1) дадим подробный анализ понятия «числа», не зависимо от его содержания и значения, как в логицизме; 2) постараемся провести сравнение предложений, которые использовал Гильберт в своем исследовании с понятием «числа», которое будет выведено из наших общих рассуждений; 3) укажем на тот факт, как арифметическая компонента программы связана с двумя другими, о которых идет речь в работе.

Начнем с природы «числа», о которой довольно много рассуждали логицисты. Основным представителем является Фреге, который заметил тот интересный аспект, что число имеет две части: содержание и значение, как у любого объекта, независимо от того, физический он или абстрактный. Ошибка Фреге в том, что он, разделив все объекты на абстрактные и физические, отнес к абстрактным числа, но не смог соединить в них содержание числа и его значение. Рассел успел заметить и осознать ошибку, допущенную Фреге, но устранить ее не смог, так как сам запутался в «значениях числа» [4]. В итоге можно констатировать: логицизм как направление не нашел выхода в проблеме природы «числа», а лишь свел число к сумме понятий о нем.

Взгляд Гильберта остановился именно на этом открытом вопросе. Ведь именно доказательство непротиворечивости арифметики должно было вызвать фурор всех математиков, а без прояснения природы «числа» этого, к сожалению, сделать невозможно. Разработав метод, по которому Гильберт, на его взгляд, смог бы доказать непротиворечивость, он начал разбираться в природе числа и бесконечности, которая сопровождала все числа. Природа числа не в том, что они аналоги каких-то объектов; природа числа должна заключать в себе две части. Гильберт называл их «действительная» и «идеальная» [10–13]. В своей программе он использовал только действительные предложения, которые не давали противоречий. Однако, на наш взгляд, природа числа имеет более широкое применение и требует более подробного анализа, чем дан ниже.

Числа предназначены для того, чтобы считать объекты, входящие в состав тех или иных объединений или групп. Числа никак не связаны с индивидуальной характеристикой считаемых объектов. Например, число «восемь» есть результат абстрагирования, производимого при рассмотрении всевозможных совокупностей, состоящих из восьми предметов: оно вообще не зависит ни от специальных свойств этих объектов, ни от употребляемых символов. Однако абстрактный характер идеи числа становится ясным только на очень высокой ступени умственного развития.

Для детей числа всегда связаны с самыми понятными для них объектами, например, пальцами или палочками. В языках народов числа также трактуются конкретно: для обозначения предметов различных типов употребляются разные сочетания числительных.

Современные ученые [14] соотносят числа с идеями, которые находятся в сознании. Другие говорят, что это не правильно, ведь сознание не бесконечно. А это означает, что туда невозможно вместить все числа, которых бесконечное количество. Числа – реальны, абстрактны, конечны, бесконечны и т. п. Разный взгляд на природу числа нам не дает строгости понятий, которой должна обладать математика. Становится не ясно, где находится число? Почему именно 2+2=4 и 3+2=5, а не 8 и 9?! Ответы даются различные и иногда противоречащие друг другу.

Предположим тот факт, что природа числа должна иметь две части: абстрактную и конкретную (естественную), как у Гильберта[11]. Но соединим эти две части в более ясную картину о математическом знании.

Однако откуда берутся эти две части?! Из самого мира. Если вдуматься, то с чего же начинается оформление природной объективности в числовую реальность? Все числа находятся в мире, который нас окружает. Они заложены в природе в неявном виде. Стоит лишь посмотреть на различные природные объекты, все они имеют правильную пропорцию, четное или нечетное количество плодов, точное количество листьев и другие факты, известные каждому. Можно согласиться с тем, что всё, что нас окружает, есть число. Материя, из которой состоит природа, хорошо структурирована, разбита на части. Бесструктурный «объект» не может существовать в принципе.

Таким образом, сам окружающий нас мир породил в нашем сознании первоначальные представления о «количестве» тех или иных объектов. Зародились численные отличия и правила их сравнения. И, естественно, – вся символика этого процесса, т. е. математика. И вот здесь как раз и произошло четкое и ясное разделение числовой действительности на два совершенно разных класса – естественный (конкретный) и абстрактный. Но там и там осталось число.

Итак, под абстрактной частью числа мы будем понимать часть, благодаря которой чисел нет в пространстве и во времени. Поэтому числа нельзя увидеть и почувствовать. Именно абстрактная часть дает возможность существования бесконечности.

Конкретная часть (естественная) описывает качественную и количественную составляющие числа, оформляет его как величину. С точки зрения конкретной части мы можем считать, применять числа, т. е. взаимодействовать с ними. В этой части «голая абстракция» превращается в число, которое мы можем использовать. Именно в этой части рождается некое противоречие между качественной и количественной характеристикой числа.

Следовательно, числа – это синтез указанных частей. Числа обозначаются цифрами – символами, которые, в свою очередь, могут быть различными.

Из вышесказанного можно сделать следующие выводы.

Первое. Благодаря этим двум частям можно понять, почему мы не видим чисел, но они неразрывно связаны с нами.

Второе. Время и пространство, которые являются базовыми понятиями физики, не содержатся в понятии числа в явном виде, они приобретаются им, когда оно приобретает законченную форму – цифру и величину. Тогда число становится не самостоятельно абстрактной формой, а естественной частью мира.

Почему обозначение числа может быть различным? Приведем в пример геометрию как древнейший раздел математики. Из геометрического обоснования числа также можно вывести две части, о которых мы говорим. Число в геометрии – это не цифра, это фигуры, плоскости, прямые. Своего рода абстракция. Значит, абстрактную часть мы уже нашли в геометрическом обосновании числа. Любой человек резал лист бумаги, а это своего рода применение числа, только геометрического. Ведь мы можем отрезать от листа половину или третью часть – это количество. Ровно или криво мы отрежем этот кусок, зависит от нас, а это уже качество. Следовательно, конкретная часть числа не будет оформлять число в цифру, оно его здесь оформит в форму, которую мы отрежем.

Если под природой числа понимать синтез абстрактного и естественного, оформленный в цифре, то можно привести в пример число π как самое популярное иррациональное число, после работ Л. Эйлера [15]. Абстрактная часть будет связана с бесконечной записью данного числа, что очевидно. После этого можно сказать, что числа π вообще нет. Однако его естественная (конкретная) часть говорит о значении и применении, нахождении его в пространстве и времени. Проще это можно выразить отношением длины окружности к длине ее диаметра, как утверждает определение числа. Хоть сама по себе окружность и ее диаметр являются абстрактными понятиями, однако именно это отношение и применяет строитель в своих расчетах, когда строит дом.

Информатика, как наука, отделившаяся не так давно от математики, не согласилась бы с этими утверждениями. Ведь число для этой науки тоже цифра, символ, как и в самой математике, т. е. несет в себе абстрактную часть числа. «А где же конкретная часть числа?!» – скажет информатик. Программа на любом языке не будет работать с одним символом или цифрой. Применение, а тем самым и конкретная часть числа появится только тогда, когда мы увидим полную программу, записанную до точки и запятой. Тем самым применение будет тогда, когда программа заработает! А до этого это всего лишь абстракция.

На это возражение можно ответить тем, что знак и символ в информатике будут всегда нести некое применение. Ведь выстраивая программу, программист не берет любой попавшийся знак. Он четко понимает применение каждого из них, какую функцию он выполняет, тем самым получает программу, которая дает более масштабное применение.

Развивая данное предположение, можно сказать, что эти две «части» числа могут и существовать совершенно независимо друг от друга. Для нас кажется совершенно очевидным, что мотоцикл, несущийся по трассе, и его чертеж на столе конструктора – совершенно разные качественные вещи, хотя и то и другое отображено в нашем сознании с помощью одних и тех же знаков – чисел. И там и там у мотоцикла по два колеса, одному мотору и т. д. Однако чертеж и мотоцикл – два разных (по качеству!) числительных мира. Почему так происходит?!

Количество и качество не одно и то же, они будут всегда давать некое противоречие в конкретной части числа. Однако нам это и нужно, чтоб построить две разные науки – физику и математику.

К примеру, в стае летят пять лебедей, но оценить все качества стаи одним числом (5) неправильно. А вот конкретный выигрыш (как предметное качество) напрямую зависит от количества купленных лотерейных билетов, хотя это количество никак явно не выражено в реальной сущности.

Таким образом, в природе (на примитивно составных вещах и явлениях) показать конкретно сосредоточенную (качественно-количественную) функциональность однозначно нельзя, по крайней мере – довольно трудно. И строить утвердительные научные тезисы о природном статусе числа как родового, только физического начала без математического не следует.

Растущая на дереве груша существует сама по себе, обладая набором естественных качеств. А вот фото этой груши данными качествами не наделено. Но там и там мы видим одну грушу, т. е. акцентируемся на отображении в нашем сознании количественной особенности явления. Если на этом дереве вырастут еще две груши, то их качественные характеристики изменятся (в том числе и у первой груши). А на новом фото этой груши мы не будем наблюдать изменения качественных свойств. Но между числом «один» и числом «три» мы определим искусственно разработанные нами правила их соединения в группу.

Доказав предположение, что конкретная часть числа содержит в себе разные понятия, надо сказать, как все эти рассуждения связаны с природой чисел.

Учитывая, что количество и качество лежат в основе разделения математики и физики, как отмечалось выше, приведем пример.

Вечный спор математиков и физиков о природе числа. Математики, заявляя об отсутствии чисел в природе, выставляют на первое место их абстрактное содержание. Они не правы, как и физики, утверждая обратное. Математик и физик, исходя из вышесказанного, начиная с разных мотивов, стремятся к одной и той же цели. Математики выделяют и считают абстрактные цифры, используя правила и аксиомы. Математик – это всего лишь механизм оформления абстракции в формулу. Физик дает формулам применение. Поэтому и выходит, что они работают не с разными частями числа, а с разными числами вообще.

Число должно быть различно, чтобы не было данных противоречий. Можно предположить, что число делится на математическое и физическое. Эти два числа должны иметь разную природу, хотя и состоять из одинаковых частей, как описано выше: абстрактной и конкретной. Тогда в чем должно проявляться их различие?! Опишем подробнее.

Следуя рассуждению, математический и физический ноль или единица не будут одним и тем же. Различия будут содержаться в природе числа. Число «ноль» или «единица» – это будет абстракция, оформленная в цифру, для математика. Итак, математическое число – это число, в котором конкретная часть представлена как количественная (для счета!), поэтому, соответственно, это число используют математики. Здесь прав Гильберт, который называет математику наукой о знаках [12].

Физический ноль – это пустота, оформленная в цифру, следовательно, физическое число – это число, в котором конкретная часть выражена, наоборот, как качественная.

Приведем простой пример. Две груши и две планеты с точки зрения математического числа одно и то же, ведь количественная их характеристика совпадает. С точки зрения физического числа они различны, различны их качественные части: груша и планета не одно и то же.

Важно иметь в виду, что физическое число и математическое число будут строго различны в конкретной части числа, но имеют нечто общее – их природу. Попробуем описать эту природу на основе наших частей. Они будут исходить из чего-то общего, естественного и понятного – это абстрактная их часть. Именно эта часть будет связывать все числа. Ведь никто не будет спорить, что числа мы не встретим на улице и не пригласим их в гости. Абстракция как мысленное отвлечение позволяет выделять нам это существенное. Благодаря этому все числа – «родственники».

Однако мы не имеем права оставлять без внимания конкретное (естественное). Оно закрепит за ним (и за его математическим письменным отображением) осознанное представление, что любое число не просто описательно-числительная абстракция, а вполне реальная физическая данность природы, с богатыми специализированными качествами и выразимым количеством.

Можно сделать вывод, что число – это абстрактно-конкретная форма, оформленная в цифре или любом другом знаке. Число берет начало в абстракции, а потом оформляется естественно в природе.

Все открытия совершались в области естественных наук только благодаря тому, что используя математически выраженную правильную абстракцию, физики объясняли природу. Синтез математики и физики в работе над числом очень важен. А направления номинализма и реализма (платонизма) всё больше стараются развести эти две стороны, что является огромным минусом для науки.

В конце хотелось бы подчеркнуть, что природа числа, выраженная в его «едином двуличии», заложена в нем благодаря миру. Поэтому мы можем наблюдать количественные и качественные отличия, но никогда не видеть само «число».

Таким образом, нужно отметить последнее, что дает основания нам перейти к последней компоненте, которую Гильберт считал самой главной из трех. Арифметическая компонента, несомненно, является связующим звеном между логической и геометрической частью программы формализации. Это выражается в том, что «число», как объект синтеза конкретного и абстрактного (или действительного и идеального [11]), дает скрытые возможности в реализации формализма в основаниях математики и содействует новому пониманию абстракции на том уровне, как понимал ее Гильберт.

3. Геометрические основания, составляющие математику, их отношение к процессу познания в программе формализма

Наряду с двумя основными компонентами формалистского построения систем Гильберт выделял главную пропозицию, которая в нашем исследовании носит название геометрической компоненты.

На основании геометрии, как мы помним, Гильберт построил свою аксиоматику [10]. Ведь на тот момент именно геометрия носила более проясненный характер, именно в ней были выстроены ряды аксиом, из которых выводились доказательства той или иной теоремы. Математика в целом до Гильберта носила неопределенный статус, в ней не было строгих доказательств, даже по поводу каждого обозначения велись споры и собирались консилиумы ученых. Гильберт создал мир математики довольно ясный, понятный и хорошо выводимый, ибо была использована опора на логическое пространство. Кто-то удивится, почему именно Гильберт внес этот вклад в развитие математики, ведь это одна из самых древних наук (!), неужели до него не было ученых?! И будет прав, Гильберт обобщил результаты Фреге, Рассела, М. Паша, разъяснил и убрал вызывающие споры парадоксы, объединил математику в единое целое.

Содержательная установка формалистского построения математики аргументировала несводимость геометрической компоненты к двум другим, вот это и стало для Гильберта важным. Геометрическая часть его программы указывает на то, что она может трактоваться с реалистических позиций, позволяет призвать априорность, включенность в структуру разума базисных геометрических понятий, истин и интуиций. Именно таким родом априорности вызвана геометрическая важность для гильбертовской программы.

Как мы выяснили ранее, любая формальная система требует доказательства ее непротиворечивости. Такое доказательство Гильберт называл «методом абсолютного доказательства» [11]. Ранее мы показали его механизм работы. Сейчас укажем значение геометрии в его реализации.

Геометрия Евклида была довольно примитивна в своем наполнении. В ее арсенале не было даже списка исходных данных. Гильберт, выявив все ошибки и споры в этой области, берет ее за основу. Почему именно она стала образцом для формализма?! Геометрия Евклида строилась на базовых аксиомах, из которых довольно легко можно было вывести самые тяжелые теоремы и леммы. Этот принцип от простого к сложному, метод аксиом и вывода из них нового значения как раз лежали в основе построения формальных систем Гильберта.

Основание геометрии стало областью математики, изучающей аксиоматические системы евклидовой геометрии. В дальнейшем вопросы ее науки расширились до неевклидовой геометрии. Проблемы, которые решают сейчас основания геометрии, состоят в полноте, независимости, непротиворечивости аксиоматических систем.

После появления геометрии Лобачевского [16] основания геометрии стали широко изучаться, поскольку требовалось пополнение систем аксиом геометрии Евклида. Этот факт был связан с тем, что аксиоматика Евклида не была полной, а в доказательствах Евклид пользовался аксиомами, которых нет в его списке (либо эти аксиомы нужно было доказывать).

Однако родоначальником оснований геометрии нельзя назвать Гильберта, ибо его труды были лишь обобщением до формального уровня. В 1882 г. Морица Паша уже создал системы, свободные от каких-либо интуитивных влияний. Именно он ввел всем известные со школы неопределяемые понятия (точка, прямая, плоскость).

Укажем в нашем исследовании и тот факт, что Гильберт вводил неопределяемые понятия, причисляя к ним еще отношения (лежать между, применимо к точкам). Аксиоматика Гильберта считается самой полной из всех, состоит из 20–21 аксиомы и довольно прозрачна. Спор о ее непротиворечивости и полноте закрыл однажды Тарский [17], дав полное доказательство.

С точки зрения геометрической компоненты хочется еще раз подчеркнуть тот факт, что она несводима ни к одной из двух, носит статус самостоятельного уровня и довольно важного для программы Гильберта. Это вытекает из того, что все базовые понятия геометрии обладают статусом независимого применения и включают в себя априорную заданность. Другими словами, геометрические неопределяемые понятия несводимы ни к логическим, ни к арифметическим и носят объективный характер. Геометрия в понимании Гильберта носит абстрактное отражение свойств пространственной действительности и указывает на реалистичность в этой проблеме.

Аналогия Гильберта между физикой и геометрией довольно интересна, но без доказательна, поскольку необходимо признать, что эмпирическое истолкование геометрической компоненты математики противоречит множеству аргументов и общей картине теоретического обоснования программы формализма. Это противоречие вытекает из традиционной небрежности Гильберта в употреблении терминов и строгости рассуждений, которые относятся к онтологическим и гносеологическим вопросам.

Эпистемологическое признание формализмом объективности геометрических истин активно соотносится с указанием на их априорность, их включенность в структуру разума и сознания. Заметим тот факт, что все три компоненты математики в эпистемологическом плане трактуются в программе формализма с позиций априоризма. Это явление исходит именно из логической установки, которая процветала в математике довольно длительное время. Гильберт не мог отойти от основ, которые до него ввели Рассел, Фреге, Пеано и другие. Он лишь преумножил данные теоретические знания, создав пласт совсем новой на то время математики, как было замечено ранее.

Обозначив в своей работе на эпистемологический процессе в реализации формализма и указав на геометрию как важную компоненту, мы имели в виду следующее.

1. Геометрия является абстрактным механизмом действительности. Другими словами, всё то, где живет субъект, – это геометрическое пространство, с ссылкой на реальность отображаемых объектов.

2. Геометрия, как важная составляющая формализма, показала свою значимость в построении формальных теорий и систем гильбертовского плана.

3. Математика не может существовать в своих основах без ключевых неопределяемых определений геометрии. Она всегда опирается на пространство, о котором говорит нам только геометрическая наука.

4. Природа числа также в своей основе закрепляет статус геометрических истин для математики.

5. Формализм стал передовым течением, который хотел соединить несоединимое в основаниях математики и давал шанс на полную непротиворечивость своих систем для большинства математиков. Иными словами, ссылки на отображаемую и конечную действительность, которую реализовала только геометрия, были попытками Гильберта упрочить непротиворечивость своей программы.

Труды Гильберта по основаниям математики мы исследовали до его работы «Основания геометрии», в результате чего пришли к выводу, что одним из философских достижений стало развитие концепции Гильберта об аксиоматическом методе. Гильберт полагал, что правильный способ развития любого научного объекта или предмета строго требует аксиоматического подхода. Предоставив аксиоматическое «лечение» (метод), Гильберт счел, что теория будет развиваться независимо от какой-либо потребности в интуиции, это облегчит анализ логических связей между основными понятиями и аксиомами.

В 1902 г. Гильберт, читая лекции по основаниям геометрии, обозначил проблему оснований иным способом: «Каждая наука берет свою отправную точку из достаточно связного массива данных. Однако она обретает форму только путем организации этого свода фактов» [10]. Эта организация для Гильберта осуществляется аксиоматическим методом, т. е. логическая структура понятий строится таким образом, чтобы отношения между понятиями соответствовали отношениям между фактами, которые должны быть организованы. В построении такой структуры понятий возможен произвол, но требуются полнота, независимость, непротиворечивость.

После Гильберта и его работ по геометрии математика стала логичнее благодаря введенному аксиоматическому методу и достигла своего расцвета, став фундаментальным знанием всей науки.

Литература

1. *Измайлова А. М.* Актуальность формалистского подхода в рамках современных концепций в основаниях математики / А. М. Измайлова // Вестник студенческой научной сессии факультета философии и психологии ВГУ. – 2018. – № 12. – С. 28–33.

2. *Измайлова А. М.* Интерпретация эпистемологических основ математики в программе формализма / А. М. Измайлова // Вестник студенческой научной сессии факультета философии и психологии ВГУ. – 2019. – № 13. – С. 30–33.

3. *Peano G.* Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane / G. Peano // Mathematische Annalen. – 1890. – Т. 36, вып. 1. – С. 157–160.

4. *Рассел Б.* Основания математики : в 3 т. / Б. Рассел, А. Уайтхед ; пер. Ю. Н. Радаев, А. В. Ершов, Р. А. Ревинский, И. С. Фролов. – Самара : Изд-во Самар. ун-та, 2005–2006. – Т. 1. – 772 с. ; Т. 2. – 738 с. ; Т. 3. – 460 с.

5. *Рассел Б.* Избранные труды / Б. Рассел ; пер. В. В. Целищева. – Новосибирск : Сиб. Унив. изд-во, 2007. – 260 с.

6. *Фреге Г.* Основоположения арифметики : логико-математическое исследование о понятии числа / Г. Фреге. – Томск : Водолей, 2000. – 128 с.

7. *Фреге Г.* Логика и логическая семантика : сб. трудов / / Г. Фреге ; пер. с нем. Б. В. Бирюкова. – М. : Аспект Пресс, 2000. – 512 с.

8. *Кантор Г.* Труды по теории множеств / Г. Кантор ; под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. – М. : Наука, 1985. – 432 с.

9. *Лесневский С. И.* Об основаниях математики / С. И. Лесневский // Философия и логика Львовско-Варшавской школы. – М., 1999. – Гл. 9. – С. 24–44. – (Научная философия).

10. *Гильберт Д.* Проблемы обоснования математики / Д. Гильберт // Гильберт Д. Избранные труды : в 2 т. – М. : Факториал, 1998. – Т. I. – С. 449–456.

11. *Гильберт Д.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики / Д. Гильберт, П. Бернайс ; пер. с нем. Н. П. Нагорного. – М. : Наука, 1979. – 557 с.

12. *Гильберт Д.* О бесконечном / Д. Гильберт // Гильберт Д. Избранные труды : в 2 т. – М. : Факториал, 1998. – Т. I. – С. 430–449.

13. *Гильберт Д.* Основания геометрии / Д. Гильберт. – М.; Л. : Гостехиздат, 1948. – 339 с. – (Классики естествознания).

14. *Гейтинг А.* Интуиционизм. Введение / А. Гейтинг. – М. : Мир, 2016. – 199 с.

15. *Эйлер Л.* Введение в анализ бесконечно малых : в 2 т. / Л. Эйлер ; пер. с лат. Е. Л. Поцановского ; ред., вступит. ст. и прим. проф. С. Я. Лурье. – 1-е изд. – М.; Л. : ОНТИ НКТП СССР, Глав. ред. общетехн. лит. и номографии, 1936. – Т. 1. – 352 с.

16. *Лобачевский Н. И.* Избранные сочинения / Н. И. Лобачевский ; [сост. и ред. И. С. Емельянова ; пер. на греч. яз. Филиппидис] ; Нижегород. гос. ун-т им. Н. И. Лобачевского. – Н. Новгород, 2007. – 253 с.

17. *Тарский А.* Введение в логику и методологию дедуктивных наук / А. Тарский. – Биробиджан : Тривиум, 2000. – 347 с.

Воронежский государственный университет

Измайлова А. М., преподаватель факультета философии и психологии

E-mail: izmajlova.2012@mail.ru

Voronezh State University

Izmailova A. M., Lecturer of the Philosophy and Psychology Faculty

E-mail: izmajlova.2012@mail