

АППРОКСИМАЦИОННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ОБЪЁМНОГО ТЕЛА С КРУГОВЫМ ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ СЕЧЕНИЕМ

А. Б. Раевский

Геологический институт Кольского научного центра РАН, Апатиты

Поступила в редакцию 30 марта 2017 г.

Аннотация: предлагается алгоритм для вычисления вертикальной производной гравитационного потенциала от материального горизонтального диска во всех точках пространства. Основой алгоритма является высокоточное приближение решения уравнения для координат поверхности равных значений поля диска и эквивалентного на этой же поверхности полюсного источника. Аналогия этому подходу имеется в двумерном случае для полей горизонтальной пластины и полюсной линии. В результате, вычисление поля в любой точке пространства приводится к известной формуле вычисления поля диска в точках на его вертикальной оси. В свою очередь, вычисление поля во всех точках пространства от объёмных моделей, имеющих горизонтальное сечение в виде круга, выполняется интегрированием полученного выражения для поля диска.

Ключевые слова: *изометрические геологические структуры, вертикальная производная гравитационного потенциала, поверхность равных значений поля, горизонтальный диск, вертикальный цилиндр, усечённый конус, высокоточное приближение, численное интегрирование.*

APPROXIMATION FOR EVALUATION VERTICAL TO DERIVATIVE OF GRAVITATIONAL POTENTIAL FROM VOLUMETRIC BODY HAVING HORIZONTAL SECTION OF A CIRCLE

Abstract: *the algorithm is offered for evaluation vertical to derivative of gravitational potential in arbitrary points of space from a material horizontal disk. Basis of algorithm is the precision approximation of the solution of the equation for coordinates of a surface of equal values of a field of a disk and field equivalent on same surface of a pole source. The analogy is present for this approach in a two-dimensional case for fields of a horizontal plate and thin horizontal line. The evaluation of a field in an arbitrary point of space is carried out by reduction to the well-known formula of evaluation of a field in a point on a vertical axis of a disk. In turn, the evaluation of a field in arbitrary points of space from volumetric models having horizontal section of a circle is carried out by integration on vertical coordinate of the obtained expression for a field of a disk.*

Key words: *isometric geological structures, vertical to derivative of gravitational potential, a surface of equal values of a field, horizontal disk, vertical cylinder, restricted cones, high-quality approximation, numerical integration.*

Введение

При изучении геологического строения верхней части земной коры гравитационным методом в некоторых случаях возникает задача интерпретации аномального поля, источниками которого являются структуры изометрической формы. К таким структурам относятся массивы центрального типа, палеовулканы, трубки взрыва, интрузивные тела в виде лополитов или куполов. Задачей интерпретации аномального поля является оценка основных параметров геологических тел: глубины верхней и нижней границ, возможное изменение горизонтальных размеров с глубиной и значение плотности. Применение гравитационного моделирования для изучения глубинного

строения массивов центрального типа на Балтийском щите продемонстрировано в [1, 2, 3]. В указанных работах решались линейные обратные задачи гравиметрии с целью построения региональной плотностной модели верхней части земной коры или её фрагментов. Однако, в некоторых случаях при дефиците априорной геологической информации, в качестве модельных источников аномального поля удобно использовать тела с осевой симметрией - горизонтальный диск, вертикальный цилиндр или варианты усечённого конуса. Но для вышеуказанных моделей в учебной и справочной литературе [4, 5] приведены формулы для вычисления поля только в точках, расположенных на центральной вертикальной оси тел.

Во всех остальных точках пространства компоненты гравитационного поля представляются интегралами эллиптического типа. Поэтому для них были предложены приближённые способы вычисления аномальных полей с помощью таблиц и номограмм на основе вычисления телесных углов [6, 7]. На практике этот подход при решении обратной задачи широкого распространения не получил, так как задача решается для поля только вертикального цилиндра и требует вычисления специальных функций.

В реальных условиях для адекватного описания интерпретационной модели может потребоваться более двух параметров, и в этом случае для решения обратной задачи желательно использовать весь доступный массив измеренных значений аномального поля. Соответственно, для количественного анализа данных необходимо располагать удобным для использования алгоритмом решения прямой задачи во всех точках пространства. Вариант такого алгоритма, который основан на высокоточном приближении решения уравнения для координат поверхностей равных значений поля от горизонтального диска, рассматривается в данной работе.

Прямая задача для горизонтального диска

Рассмотрим горизонтальный диск радиусом R и поверхностной плотностью μ . В цилиндрической системе координат центр диска поместим на оси z в точку $(0, 0, \zeta)$, а координаты расчётной точки обозначим (r, z) . Сформулируем задачу следующим образом: определить приближённый, но с достаточной для практики точностью, способ вычисления поля первой вертикальной производной потенциала $W_z(r, z)$ для диска (μ, R, ζ) .

Для решения этой задачи предлагается способ, который основан на представлении о пространственном поведении поверхностей равных значений поля (изоповерхностей) диска и поля полюсного источника - рис. 1.

Вполне очевидно, что любая изоповерхность поля диска, проходящая через точку $(0, Z)$, должна заканчиваться на ребре диска в точках (R, ζ) . С другой стороны, всегда можно указать полюсный источник, массой m_s и расположенный под центром диска с координатами $(0, s)$, поле которого в точке $(0, Z)$ совпадает с полем диска:

$$W_z(0, Z) = \frac{\gamma m_s}{(s - Z)^2} = 2\pi\gamma\mu \left(1 - \frac{\zeta - Z}{[(\zeta - Z)^2 + R^2]^{1/2}} \right) \quad (1)$$

При этом соответствующая изоповерхность поля полюсного источника совпадает с изоповерхностью поля диска, если принять условие:

$$\frac{1}{(s - Z)^2} = \frac{s - z}{[(s - z)^2 + r^2]^{3/2}} = \frac{s - \zeta}{[(s - \zeta)^2 + R^2]^{3/2}} \quad (2)$$

В этом случае изоповерхность полюса будет проходить через точки (r, z) и (R, ζ) . Такой полюс является эквивалентным диску на изоповерхности поля, которая имеет значение $W_z(0, Z)$. В двухмерном случае имеет

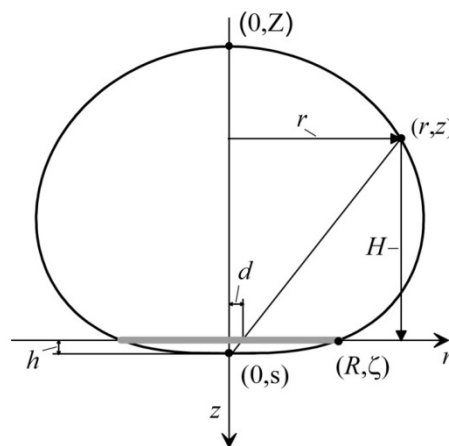


Рис. 1. Изолиния значения W_z по сечению изоповерхности поля в плоскости (r, z) для полюса, расположенного в точке $(0, s)$. Серой утолщённой линией показано положение эквивалентного на изоповерхности диска.

место полная аналогия для горизонтальной полосы и полюсной линии. Следовательно, если для расчётной точки (r, z) определить координату эквивалентного полюса $s(r, z)$ и координату пересечения изоповерхности вертикальной оси над диском $Z(r, z)$, то поле диска в точке (r, z) определится как:

$$W_z(r, z) = 2\pi\gamma\mu \left[1 - \frac{\zeta - Z(r, z)}{[(\zeta - Z(r, z))^2 + R^2]^{1/2}} \right] \quad (3)$$

Для более компактной формы записи введём обозначения:

$$\zeta - z = H; \quad s - \zeta = h.$$

Здесь H – глубина диска относительно точки вычисления, а h – глубина эквивалентного полюса относительно диска. В этом случае, для заданных значений R, r и H , необходимо определить неизвестную глубину полюса h из уравнения (2), которое запишется:

$$\frac{h^2 + R^2}{(H + h)^2 + r^2} = \left(\frac{h}{H + h} \right)^{2/3} \quad (4)$$

Получить точное решение этого уравнения относительно h в явном виде не представляется возможным. Однако для практического применения можно использовать достаточно точное приближение. Вариант такого приближения предлагается на основе геометрического соотношения (рис. 1):

$$\frac{h}{H} = \frac{d}{r - a}, \quad \text{или} \quad h = H \frac{a}{1 - a}, \quad \text{где} \quad a = \frac{d}{r}$$

Определение отношения a , а соответственно и величины h , можно представить в виде функции из нескольких шагов итерационной процедуры:

$$h(n + 1) = H \frac{a(n + 1)}{1 - a(n + 1)}$$

с условием: $a(n) \neq 1$, где

$$a(n + 1) = a(n) + \frac{2}{3} \left\{ \left[\frac{h(n)^2 + R^2}{(h(n) + H)^2 + r^2} \right]^{2/3} - a(n) \right\}$$

Эта итерационная процедура в результате трёх ша-

гов ($n=3$) обеспечивает решение уравнения (4) с относительной погрешностью менее 0,2 %, если в качестве начального приближения использовать:

$$a(0) = \left(\frac{\rho^2 - \sqrt{\rho^4 - 4r^2 R^2}}{2r^2} \right)^{3/2}, \text{ где}$$

$$\rho^2 = H^2 + R^2 + r^2$$

Вся итерационная процедура может быть обозначена функцией для определения глубины эквивалентного полюсного источника:

$$h = DEP(R, H, r) \quad (5)$$

Использование этой функции позволяет получать решение уравнения (4) относительно глубины эквивалентного для изоповерхности полюсного источника без больших вычислительных затрат и с достаточной для практики точностью. Далее, имея значение h , из уравнения (2) определяется высота точки пересечения изоповерхностью вертикальной оси диска $Z(r, H)$, которая совпадает с точкой $(0, Z)$ на рис. 1:

$$Z(r, H) = h \left[\left(1 + R^2 h^{-2} \right)^{3/4} - 1 \right] \quad (6)$$

Следовательно, используя выражения (5) и (6) можно с высокой точностью вычислить значение первой вертикальной производной потенциала от диска $W_z^D(r, H)$ для любой точки с координатами (r, H) :

$$W_z^D(r, H) = 2\pi\gamma\mu \left\{ 1 - \frac{Z(r, H)}{[Z(r, H)^2 + R^2]^{1/2}} \right\} \quad (7)$$

При $H=0$ имеет место предельное выражение:

$$W_z^D(r, 0) = \begin{cases} 2\pi\gamma\mu, & r < R \\ \pi\gamma\mu, & r = R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

На рис. 2 представлены изолинии осевого сечения изоповерхностей поля диска, которое рассчитано с помощью алгоритма по формулам (5), (6) и (7).

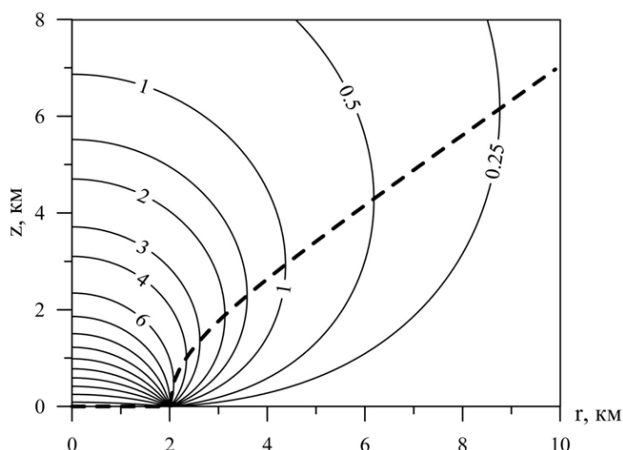


Рис. 2. Сечение изоповерхностей поля W_z в плоскости (r, z) для диска радиусом $R=2$ км и поверхностной плотностью $\mu=60000$ г/см². Оцифровка изолиний в мГл, пунктирная кривая – график функции z_c для координат точек максимума поля при $r > R$.

Следует отметить, что при $r > R$ возникает вертикальная координата z_c , в которой меняется знак вер-

тикальной производной поля $W_z(r, z)$, а само поле достигает максимального значения. Величину z_c следует использовать для уменьшения погрешности при вычислении поля вертикального цилиндра, что рассматривается ниже. Вполне очевидно следующее утверждение: координата z_c соответствует максимальному радиальному расстоянию изоповерхности. Из этого утверждения следует уравнение:

$$\frac{h_e^2 + R^2}{3(z_e + h_e)^2} = \left(\frac{h_e}{z_e + h_e} \right)^{2/3}$$

После преобразований это уравнение представляется в виде кубического уравнения «неприводимого» типа [8] относительно h_e . В результате решения этого уравнения, значение z_c для координаты r выражается следующей формулой:

$$z_e(r, H) = \frac{r}{\sqrt{2}} \left(1 - [-2\cos(\alpha)]^{3/2} \right) \quad (8)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{3} \left[\arccos \left(- \left(\frac{R}{r} \right)^2 + \pi \right) \right]$$

График функции $z_c(r, R)$ для $R=2$ км представлен на рис. 2 в виде пунктирной линии.

Прямая задача для тел с круговым горизонтальным сечением

Представление поля диска в точках (r, z) как поля диска в точках на вертикальной оси с глубиной $Z(r, z)$ открывает возможность использовать это представление для вычисления поля от объёмных моделей, которые имеют горизонтальное сечение в виде круга. Если обозначить глубину верхней границы тела h , глубину нижней границы H , а плотность тела σ , эта задача решается численным интегрированием выражения (7) по вертикальной оси в соответствующих пределах:

$$W_z(r, h) = \frac{\sigma}{\mu} \int_h^H W_z^D(r, z) dz \quad (9)$$

Многообразие подобных модельных тел можно определить параметрическими (например, линейными) выражениями зависимости от вертикальной координаты таких параметров как радиус $R(z)$ и координаты центра $X(z)$ и $Y(z)$:

$$R(z) = R(h) + [R(H) - R(h)]F(z)$$

$$X(z) = X(h) + [X(H) - X(h)]F(z)$$

$$Y(z) = Y(h) + [Y(H) - Y(h)]F(z)$$

$$F(z) = \frac{z - h}{H - h}$$

В этом случае поле диска в (9) является функцией всех перечисленных параметров:

$$W_z^D(r, z) = W_z^D[R(H), R(h), X(H), X(h), Y(H), Y(h), r(z), z]$$

Кроме этого, возможно использовать вложение конических тел разной плотности одного в другое. Такая параметризация интерпретационной модели источников аномалий позволяет более адекватно отразить свойства реальных геологических структур и существенно увеличить количество информации, получае-

мой при анализе гравитационного поля. В качестве примера на рис. 3А представлен результат вычисления поля первой вертикальной производной потенциала от модели в виде опрокинутого усечённого конуса с линейной зависимостью радиуса и положения центра от вертикальной координаты. В данном случае использован шаг интегрирования $dz=0,01$ км. На рис. 3Б показан разрез через центр модели по линии $y=0$.

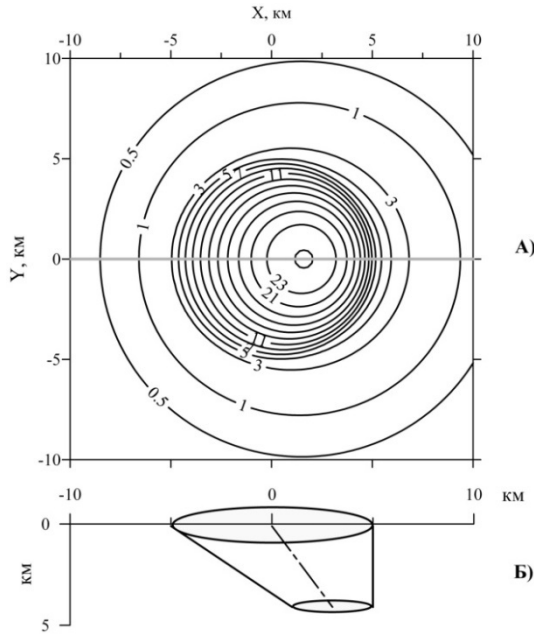


Рис. 3. Результат решения прямой задачи для модели в виде конического тела со смещением оси: А – Схема изолиний поля $W_z(x,y)$ в мГл. (Утолщённая серая линия – положение разреза); Б – Схематический разрез через модельное тело в плоскости (y,z) по линии $y=0$. Параметры модели: $h=0,1$ км, $H=4,1$ км, $R(h)=5,0$ км, $R(H)=2,0$ км, $X(h)=0,0$ км, $X(H)=3,0$ км, $Y(h)=0,0$ км, $Y(H)=0,0$ км, $\sigma=0,3$ г/см³.

Другой пример представлен для модели в виде вертикального цилиндра с целью демонстрации некоторых особенностей интегрирования (9), без учёта которых возможно снижение точности вычислений. Параметрами цилиндра являются плотность σ , радиус R и глубина верхней и нижней границ h и H соответственно. Принимая во внимание выражение (7), интеграл (9) в данном случае можно представить в эквивалентной форме, в которой интегрирование производится по оси цилиндра:

$$W_z^c(r, h) = 2\pi\gamma\sigma \int_{z(r,h)}^{z(r,H)} \left[1 - \frac{Z(r, z)}{[Z(r, z)^2 + R^2]^{1/2}} \right] dZ(r, z) \quad (10)$$

Простого выражения для связи между дифференциалами dz в (8) и $dZ(r, z)$ в (10) не существует. Поэтому область интегрирования интеграла (9) необходимо разбить на несколько интервалов, на которых функция $Z(r, z)$ с достаточной точностью может быть аппроксимирована кусками линейной функции от аргумента z . В этом случае для каждого интервала связь между дифференциалами dz и $dZ(r, z)$ может быть аппроксимирована выражением:

$$dz_k = \frac{z_{k+1} - z_k}{Z(r, z_{k+1}) - Z(r, z_k)} dZ$$

Здесь следует указать, что границы интервалов могут задаваться произвольно или в виде линейной зависимости:

$$z_{k+1} = z_k + \frac{H - h}{n}$$

Значения $Z(r, z)$ определяются в соответствии с выражениями (5) и (6):

$$Z(r, z_k) = t_k \left[(1 + t_k^{-2} R^2)^{3/4} - 1 \right], \quad t_k = DEP(R, z_k, r)$$

Кроме этого, необходимо принять во внимание характер изменения функции $Z(r, z)$ в зависимости от её аргументов. На рис. 4 представлены графики функции $Z(r, z)$, которые показывают характер её изменения от z для разных диапазонов координаты r . При $r > R$ функция $Z(r, z)$ в точках z_c имеет минимум, который соответствует максимуму поля на вертикальной линии, а дифференциал $dZ(r, z)$ меняет знак. Эту особенность следует учитывать при разбиении интервала интегрирования в интеграле (10), так как при малых значениях h и значениях r , близких к R , игнорирование точки z_c приводит к значительным погрешностям.

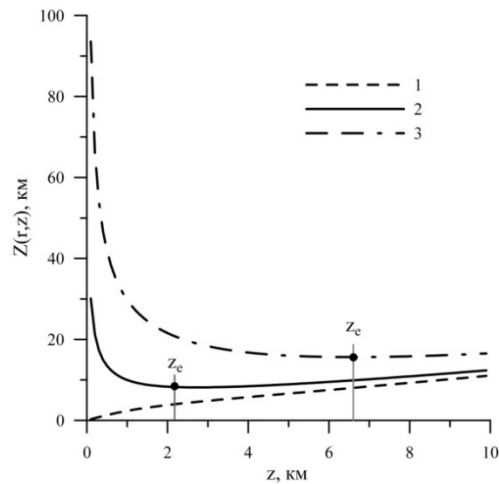


Рис. 4. Графики зависимости эквивалентной координаты $Z(r,z)$ на оси для диска радиусом $R=5$ км от координат точки вычисления поля (r,z) . Номера кривых в условных обозначениях индексируют расстояние от центра диска r : 1 – 4 км; 2 – 6 км; 3 – 10 км.

Значение z_c для координаты r определяется выражением (8). Таким образом, если $r > R$ интеграл (10) следует разделять на две части, которые имеют пределы интегрирования от $Z(r, h)$ до $Z(r, z_c)$ и от $Z(r, z_c)$ до $Z(r, H)$. Разбивая каждую область интегрирования в интеграле (10) на n равных частей, и выполняя интегрирование, получаем высокоточные приближения для поля вертикального цилиндра:

$$\text{если } r \leq R \text{ или } H < z_c \text{ или } h > z_c$$

$$W_z^c(r, h) = 2\pi\gamma\sigma \frac{H - h}{n} \sum_{k=1}^n [1 + F(R, Z_k, Z_{k+1})] \quad (11)$$

если $r > R$ и $h < z_e < H$

$$W_z^c(r, h) = 2\pi\gamma\sigma \left\{ \begin{aligned} & \frac{z_e + h}{n} \sum_{k=1}^n [1 + F(R, Z_k, Z_{k+1})] + \\ & + \frac{H - z}{n} \sum_{k=n}^{2n} [1 + F(R, Z_k, Z_{k+1})] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где $F(R, Z_k, Z_{k+1}) = \frac{(R^2 + Z_k^2)^{1/2} - (R^2 + Z_{k+1}^2)^{1/2}}{Z_{k+1} - Z_k}$

Результаты вычисления поля $W_z^c(r, h)$ от модельного вертикального цилиндра с использованием формул (11) и (12) представлены на рис. 5 в виде осевого сечения изоповерхностей. Здесь следует заметить, что при вычислении поля в точках с координатами z , отвечающих условию $h > z > H$, учитывался эффект компенсации для элементов цилиндра в интервале от h до $2z-h$, если $z > 0,5 \cdot (h+H)$ и в интервале от $2z-H$ до H , если $z < 0,5 \cdot (h+H)$. Выражения (11) и (12) могут быть использованы для вычисления интеграла (9) в случае изменения параметров модели с глубиной, если модельное тело представить как комбинацию вертикальных цилиндров малой мощности.

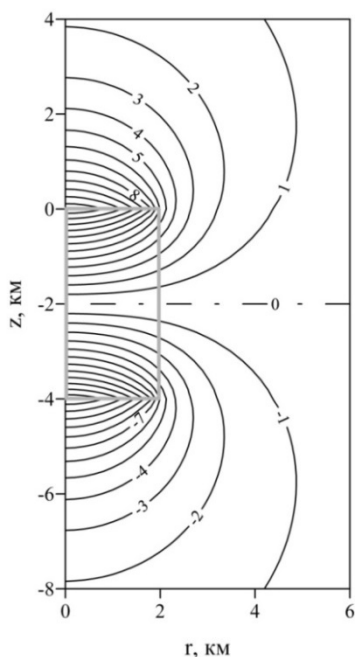


Рис. 5. Радиальное сечение изоповерхностей поля $W_z(r, z)$ в мГл для вертикального цилиндра. (Контур радиального сечения цилиндра показан утолщенной серой линией; параметры цилиндра: $h=0.0$ км, $H=4.0$ км, $R=2.0$ км, $\sigma=0.2$ г/см³).

Лаборатория региональной геологии и геофизики Геологического института Кольского научного центра РАН, г. Апатиты

Раевский Алексей Борисович, старший научный сотрудник
E-mail: raevsky@geoksc.apatity.ru
Тел.: +7(81555)79413

Заключение

В данной работе представлен алгоритм вычисления поля вертикальной производной потенциала от горизонтального материального диска в любой точке пространства. Использование этого алгоритма позволяет решать прямую задачу гравиметрии для объёмных модельных тел, имеющих горизонтальное сечение в виде круга. Алгоритм прост в управлении и обладает достаточной для практики точностью. Применение алгоритма может существенно расширить возможности анализа гравиметрических аномалий при изучении геологических структур изометрической формы. Последнее суждение основано на том, что при оценке параметров модели методом подбора, при решении обратной задачи можно использовать весь доступный массив измеренных данных.

Работа выполнена в рамках темы НИР ГИ КНЦ РАН № 0231–2015–0004.

Автор благодарен рецензенту, В. Н. Глазневу за доброжелательную критику и конструктивные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арзамасцев, А. А. Глубинное строение карбонатитовых комплексов Кольского региона: геолого-геофизические данные / А.А.Арзамасцев, В.Н.Глазнев, А.Б.Раевский // Доклады РАН, 1996. Т. 348, N 3, с. 349-352.
2. Arzamastsev, A. A. Morphology and internal structure of the kola alkaline intrusions, ne fennoscandian shield: 3d density modelling and geological implications / A. A. Arzamastsev, V. N. Glaznev, A. B. Raevsky, L. V. Arzamastseva // Journal of Asian Earth Sciences, 2000. V. 18, N 2, p. 213-228.
3. Глазнев, В. Н. Новые данные о глубинном строении Хибинского и Ловозерского массивов, Кольский полуостров / В. Н. Глазнев, А. М. Жирова, А. Б. Раевский // Доклады РАН, 2008. Т. 422, N 3. с. 391-393.
4. Миронов, В. С. Курс гравиразведки / В. С. Миронов – Л.: Недра, 1972. – 512 с.
5. Гравиразведка. Справочник геофизика / Под ред. Е. А. Мудрецовоной. – М.: Недра, 1981. – 397 с.
6. Андреев, Б. А. Геологическое истолкование гравитационных аномалий / Б. А. Андреев, И. Г. Клущин – Л.: Недра, 1965. – 495с.
7. Авдулов, М. В. Интерпретация гравитационных аномалий / М. В. Авдулов – М.: Издательство МГУ им. Ломоносова, 1973. – 125 с.
8. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн – М.: Наука, 1974. – 831 с.

Laboratory of regional geology and geophysics of the Geological Institute of the Kola Science Centre of the Russian Academy of Sciences, Apatity

Raevsky A. B., the senior scientific employee
E-mail: raevsky@geoksc.apatity.ru
Тел.: +7(81555)79413