УДК 550.8.05(470.324)

ПРИНЦИПЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ ПОТЕНЦИАЛА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ СТРОЕНИЯ ЛИТОСФЕРЫ

О. М. Муравина, Г. Г. Лошаков

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 07 апреля 2015 г.

Аннотация: *рассматриваются численные схемы создания алгоритмов решения прямых задач потенциала на основе рекурсивного разбиения пространства. Показана возможность применения подобного похода при решении прямой трехмерной задачи гравиметрии с учетом сферичности Земли при моделировании строения литосферы.*

Ключевые слова: *прямые задачи потенциала, рекурсивный алгоритм, строение литосферы.*

PRINCIPLES OF SOLVING THE DIRECT PROBLEM BUILDING IN MODELING STRUCTURE OF LITOSPHERE

ABSTRACT: *NUMERICAL SCHEMES CREATE ALGORITHMS FOR SOLVING DIRECT PROBLEMS OF BUILDING THROUGHR PARTITIONING SPACE. THE POSSIBILITY OF USING SUCHA CAMPAIGN FOR SOLVING DIRECT THREE-DIMENSIONAL PROBLEM WITHTHE SPHERICITY OF THE EARTHIN THE MODELING OF THE STRUCTURE OF THE LITHOSPHERE*

KEYWORDS: *DIRECT POTENTIAL PROBLEM, RECURSIVE ALGORITHM, THE STRUCTURE OF THE LITHOSPHERE.*

Современный уровень компьютерной математики, развитие геоинформационных технологий, возможность обработки больших объемов информациии и развитые средства ее визуализации, а также доступ к мировому банку данных позволяет разрабатывать детальные трехмерные модели рудных объектов и отдельных блоков земной коры [1–3], более или менее хорошо изученных с геологических позиций, в том числе бурением. Относительно создания моделей крупных блоков литосферы, следует отметить, что представительность и достоверность глубинных построений может быть достигнута только на основе использования данных сейсмических исследований коры, всегда обладающей неполнотой покрытия изучаемой территории, и восполняемой за счёт создания содержательных геологических моделей её строения [4]. Спецификой моделирования потенциальных полей для больших регионов является также необходимость учета сферичности Земли [5]. Указанные особенности глубинного моделирования литосферы диктуют необходимость совершенствования численных схем трехмерного решения прямых и обратных задач геофизики в реальных географических координатах, которые отвечают современным требованиям к качеству комплексного моделирования.

Как показывает опыт предыдущих исследований [5, 6] при решении задач регионального характера, когда размеры объекта моделирования исчисляются сотнями километров в плане и десятками километрами по глубине, адекватным литосферы является неоднородная градиентно-слоистая модель. В рамках принятой модели выполняется аппроксимация среды сферическими прямоугольными пластинами, размеры которых варьирует в соответствии с необходимой точностью вычисления поля и степенью детальности представления среды. Дискретизация модели осуществляется использованием приема рекурсивного вызова.

Кратко рассмотрим рекурсивный алгоритм решения трехмерной задачи гравиметрии на сферической поверхности Земли, которые был использован при решении задачи комплексного моделирования строения литосферы ВКМ.

Для приближенного решения прямой задачи на сфере был использован способ, предложенный в работе [7], который доказал свою эффективность при построении комплексных моделей литосферы Феноскандии. Алгоритм основан на использовании точных выражений для $\Delta g(r,\varphi,\lambda)$ от сферического диска в его полярной точке (при $\lambda = 0$). Сущность такого подхода заключается в переносе полюса сферической системы координат в точку О локальной системы, для которой вычисляется значение поля. Аппроксимация среды в этом случае соответствует радиально-кольцевой палетке, состоящей из совокупности тонких сферических прямоугольных пластин с постоянной плотностью. Чтобы вычислить поле в точке с координатами (φ, λ, h) ее необходимо совместить с полюсом О палетки (рис. 1).

Суммарный гравитационный эффект от совокупности тонких прямоугольных сферических пластин и дисков, образующих структуру палетки, в области

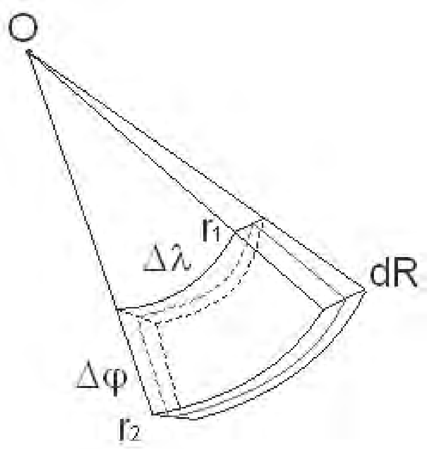

Рис. 1. Точка вычисления поля (O), совмещенная с центром палетки и элементарная сферическая пластина.

разбиения по r (от 0 до K), по λ (от 0 до M) и по φ (0, N), записывается в некоторой дискретной точке земной поверхности (φ, λ, h) как

$$\Delta G(\phi,\lambda,H)=\left(\sum_{K=0}^{K}\sum_{M=0}^{M}\sum_{N=0}^{N}C_{KMN}\cdot\Delta\sigma(K,M,N)+\sum_{K=0}^{N}C'_{N}\cdot\Delta\bar{\sigma}_{M}(N)\right)DR \tag{1}$$

где k, m, и n - индексные переменные, которые действуют в локальных полярных координатах относительно точки расчетов; C_{kmn} - численный коэффициент, зависящий от угловых размеров колец и количества секторов на кольцах; C'_k – коэффициент, определяющий величину поправки за дальнюю зону – притяжение масс вне области разбиения регулярной по r, φ и λ сеткой палетки. Подробный вывод формул приводится в работе [5]. Численные коэффициенты C_{kmn} , C'_k рассчитываются один раз и применяются для всех точек расчета поля. Значения коэффициентов определяются глубиной залегания и значениями R, Δλ и Δφ элементарных пластин и не зависят вертикальной мощности пластины. Размеры Δλ и Δφ элементов задаются таким образом, чтобы аппроксимировать криволинейную поверхность ближайших к поверхности границ модели фрагментами плоскостей. С этой целью предварительно выполняется оценка градиентных характеристик границ. Трудности, связанные с необходимостью формирования новой локальной системы координат в каждой точке расчета поля меньше, чем вычисление эллиптических интегралов, в случае аппроксимации среды сферическими параллелепипедами.

Для достижения необходимой степени точности представления среды использован прием рекурсивной дискретизации модели.

Идея пространственного разбиения среды исторически используется в физике, а в настоящее время активно применяется для решения задач компьютерной трехмерной графики. Рекурсивные алгоритмы разбиения пространства основаны на использовании организации данных в структуре называемой kd-дерево (k-размерное пространство). Объект старшего уровня последовательно разбивается на два (бинарное дерево), четыре (квадродерево), восемь (октодерево) потомков, которые называются листьями дерева. Элементами kd-дерева являются двумерные или трехмерные канонические элементы. В общем случае в качестве ограничивающего объема могут быть использованы любые фигуры, тогда структура хранения данных называется BVH-дерево (Bounding Volume Hierarchy – иерархия ограничивающих объемов) [8].

Возможность применения рекурсивных алгоритмов пространственного разбиения среды при решении прямых задач гравиметрии и магнитометрии как локального, так и регионального характера обусловлено свойством аддитивности гравитационного (магнитного) поля и необходимостью автоматической дискретизации модели с разной степени детальности. Чем ближе к точке вычисления находится элемент модели, тем точнее должна выполняться аппроксимация среды. Рекурсивные алгоритмы пространственного разбиения модели позволяют эффективно решить эту задачу. На рис. 2 показана различная степень детальности аппроксимации двумерной границы раздела с использованием в качестве структуры пространственного разбиения квадродерева.

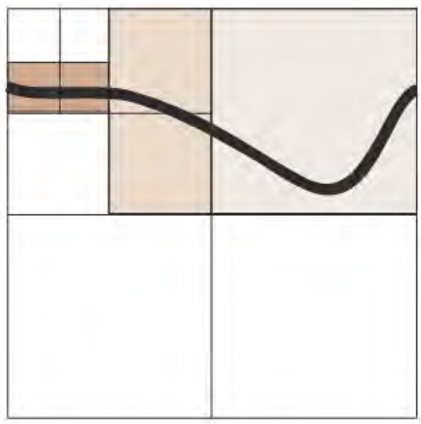

Рис. 2. Различная степень точности аппроксимации двумерной границы раздела с использованием в качестве структуры пространственного разбиения квадротомического дерева.

Рекурсивный алгоритм решения локальной прямой задачи магнитометрии в двумерном случае был численно реализован и рассмотрен в работах [9, 10].

Рассмотрим особенности применения рекурсивного алгоритма для случая трехмерной прямой задачи гравиметрии в сферической постановке для градиентно-слоистой модели аппроксимации среды. Исходная модель задается значениями плотности в узловых точках на границах слоев: трехмерная λφRσ-модель. В каждой расчетной точке осуществляется переход к другой модели среды, соответствующей описанной выше структуре радиально – кольцевой палетки, когда пространство аппроксимируются тонкими сферическими пластинами с постоянной плотностью с включением параметра вертикальной мощности элементов трехмерная ΔλΔφRΔRσ-модель. Значение плотности элементарной пластины рассчитывается с использованием процедуры крайгинга по значениям в ближайших точках исходной градиентно-слоистой

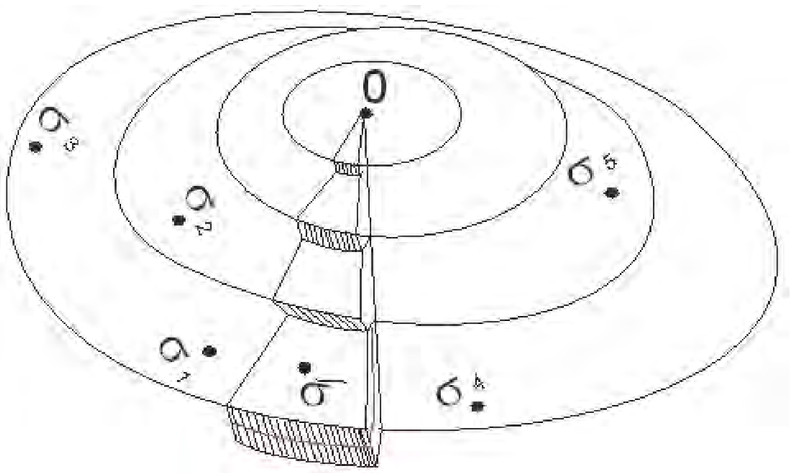

Рис. 3. Рекурсивная аппроксимация трехмерной градиентно-слоистой модели: O – точка вычисления поля; σ_i – значение плотности в узлах исходной модели; $\overline{\sigma}$ – плотность элементарной пластины, осредненная по ближним точкам.

модели [5] (рис. 3). В рассмотренной постановке наиболее оправданным с точки зрения оптимизации вычислений представляется использование в качестве структуры пространственного разбиения бинарного дерева.

В этом случае каждый элементарный объект при необходимости рекурсивно разбивается только по вертикали на два дочерних объекта. Разбиение по другим осям не выполняется, так как нарушает зафиксированную структуру радиально кольцевой палетки.

Таким образом, в процессе вычислений выполняется последовательное разбиение элементарной сферической пластины по вертикали на две части, которые становятся ее потомками. Для дочерних объектов проверяется гравитационный эффект в расчетной точке наблюдения. Дробление и вычисление гравитационного поля от набора более мелких элементов, выполняется только в случае, когда точка расчета поля находится "вблизи" центра текущего элемента модели. Мерой такой близости к центру текущего элемента служит расположение точки расчета гравитационного поля внутри описанного шара с радиусом R_{min}, соотнесенным с плановым сечением элементарной сферической пластины (сектора на кольцах):

$$R_{\min} = \sqrt{S_K}\ , \qquad (2)$$

где S – площадь сектора

В зависимости от заданной точности рекурсивное деление элемента продолжается или останавливается. Значение точности вычислений непосредственно влияет на размер конечного узла дерева и соответственно на степень точности аппроксимации геологического тела.

Глубина рекурсии определяется заданной точностью решения прямой задачи и выбирается из условия (3):

$$\left\| F(\sigma_K, \Delta R, R_{\min} \right\| \le \varepsilon\ , \qquad (3)$$

где F – оператор решения прямой задачи от некоторого *K*-го канонического элемента, σ_K – плотность данного элемента, ΔR – мощность *K*-го элемента, R_{MIN} – минимальное расстояние от центра *K*-го элемента до точки вычисления поля, ε – априорно заданная требуемая точность вычисления поля.

Использование условия вида (3) фактически определяет необходимую детальность аппроксимации среды, согласованную с заданной точностью вычисления поля.

В результате работы алгоритма аппроксимации получается упорядоченное бинарное дерево, представленное совокупностью канонических элементов.

После завершения процесса дискретизации модели выполняется решение прямой задачи вычисления поля, создаваемого листовыми узлами бинарного дерева на основе аналитического выражения (1). Решение прямой задачи производят рекурсивно, спускаясь вниз по дереву, с вычислением суммарного гравитационного эффекта от всех узлов, заполняющих заданные слои модели.

Таким образом, трехмерный алгоритм решения прямой задачи в сферической постановке с использованием приема рекурсивного разбиения пространства позволяет добиться необходимого улучшения дискретного представления среды в точках, где наш конечный элемент старшего уровня не полностью соответствует разумной точности аппроксимации среды: поле от вблизи элемента нельзя приближенно рассматривать как поле от горизонтальной пластинки, расположенной в его центре. Такой способ дискретизации модели обеспечивает необходимую точность аппроксимации среды и позволяет эффективно решить прямую задачу не только в случае градиентно-слоистой среды, но и от более сложных по морфологии реальных литосферных объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смолькин, В. Ф.* Расслоенные интрузии Мончегорского рудного района: петрология, оруденение, изотопия, глубинное строение. Часть 1. / В. Ф. Смолькин [и др.]. – Апатиты: изд. КНЦ РАН, 2004. – 177 с.

2. *Воронова, Т. А.* 3D-модели Ольховской интрузии по гравимагнитным данным (Воронежский кристаллический

массив): материалы 42-ой сессии международного семинара им. Д. Г.Успенского «Вопросы теории и практики геологической интерпретации геофизических полей» / Т.А. Воронова, И. Ю. Антонова, О. М. Муравина. – Пермь: ИГФ УрО РАН, 2015. – С. 46–48.
3. *Козлов, Н. Е.* Геология архея Балтийского щита / Н. Е. Козлов [и др.]. – СПб.: Наука, 2006. – 329 с.
4. *Минц, М. В.* Глубинное строение, эволюция и полезные ископаемые раннедокембрийского фундамента Восточно-Европейской платформы: Интерпретация материалов по опорному профилю 1-ЕВ, профилям 4В и ТАЙТСЕЙ / М. В. Минц [и др.] // Серия аналитических обзоров «Очерки по региональной геологии России». – Т. 1. – Вып. 4. – М.: «ГЕОКАРТ», «ГЕОС», 2010. – С. 9.
5. *Глазнев, В. Н.* Комплексные геофизические модели литосферы Фенноскандии / В. Н. Глазнев. – Апатиты : «КаэМ», 2003. – 252 с.
6. *Глазнев, В. Н.* Сейсмо-плотностная модель земной коры Воронежского кристаллического массива: мат-лы 42-ой сессии международного семинара им. Д. Г. Успенского «Вопросы теории и практики геологической интерпретации геофизических полей» / В. Н. Глазнев, О. М. Муравина, А. И. Дубянский. – Пермь: ИГФ УрО РАН, 2015. – С. 43–46.
7. *Глазнев, В. Н.* О решении прямой задачи гравиметрии на сфере для градиентно-слоистых моделей среды / В. Н. Глазнев [и др.]; под ред. Н. В. Шарова // Проблемы комплексной интерпретации геолого-геофизических данных. – Л.: Наука, 1991. – С. 183–188.
8. *Херн, Д.* Компьютерная графика и стандарт OpenGL, 3-е издание.: Пер. с англ. / Д Херн, М. Паулин Бейкер, – М.: Издательский дом "Вильямс", 2005. – 1168 с.
9. *Глазнев, В. Н.* Решения прямой двухмерной задачи магнитометрии с использованием адаптивной аппроксимации тела: мат-лы 39-ой сессии международного семинара им. Д. Г. Успенского «Вопросы теории и практики геологической интерпретации геофизических полей» / В. Н. Глазнев, Лошаков Г.Г. – Воронеж: ВГУ. – 2012. – С. 80–83.
10. *Глазнев, В. Н.* Об одном методе моделирования рудных объектов с использованием адаптивной аппроксимации / В. Н. Глазнев, Г. Г. Лошаков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Геология. – № 1. – 2012. – С. 243–246.

Воронежский государственный университет

Муравина О. М., доцент кафедры геофизики
E-MAIL: MURAVINA@GEOL.VSU.RU

Тел.: 8(473)220-83-85
Лошаков Г. Г., магистр кафедры геофизики

VORONEZHSTATE UNIVERSITY

MURAVINA O. M., PROFESSOR ASSISTANT, GEOPHYSICAL DEPARTMENT
E-MAIL: MURAVINA@GEOL.VSU.RU
TEL.: 8(473)220-83-85

LOSHAKOV G. G., MAGISTRATE STUDENT OF THE GEOPHYSICAL DEPARTMENT