

СПОСОБ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ПОЛЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА ОСНОВЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Антонов Ю.В., Когтева С.И.

Аналитическое продолжение гравитационных аномалий в нижнее полупространство представляет собой сложную проблему. Принципиальная сложность заключается в неустойчивости решения этой задачи. Существует много способов продолжения поля вниз: решение граничной задачи для дифференциального уравнения Лапласа, методом собственных функций или методом сеток, на основе использования ряда Тейлора и др. [3]. Все указанные методы подвержены влиянию случайных ошибок при выполнении практических расчетов. Рассмотрим метод продолжения поля в низ, основанный на аппроксимации поля полиномами различной степени и численную схему, посредством которой реализуется данный метод. По мнению авторов, использование аппроксимационного подхода в какой-то степени позволяет минимизировать влияние случайных ошибок в измерениях при аналитическом продолжении вниз. Исходным полем остается наблюдаемое поле на дневной поверхности. После этого наблюдаемое поле пересчитывается в верхнее полупространство и аппроксимируется полиномом второй и третьей степени. Значение потенциальной функции в верхнем полупространстве, находилось по формуле Пуассона.

Пусть на оси OX ($-\infty \leq X \leq +\infty$) задано распределение гармонической функции $U(X,0)$. Требуется найти значение этой функции в нижнем полупространстве. Очевидно, с помощью аналитического продолжения можно найти распределение этой функции во всем верхнем полупространстве $U(X,Z)$, где $Z \leq 0$ (ось Oz направлена вниз). Далее функцию $U(X,Z)$ представим в виде полинома некоторой степени (вообще-то любая гармоническая функция может быть представлена в виде полинома бесконечной степени, но в численных расчетах мы неизбежно ограничиваем степень полинома)

$$U(X,Z) = \sum_{m=0}^m \sum_{n=0}^n A_{mn} X^m Z^n, \quad (1)$$

где A_{mn} — некоторые коэффициенты, полученные в результате решения системы линейных уравнений.

Полученное полиномиальное распределение гармонической функции для верхнего полупространства будет справедливым и для нижнего полупространства, исключая области занятые аномальными массами. Тогда для нахождения значений гармонической функции в нижнем полупространстве достаточно поменять знак в координате Z .

Техническое решение данной схемы осуществлялось следующим образом. Опробование проводилось только на модельных примерах, так как на реальном наблюдаемом поле мы не сможем оценить влияние погрешностей измерений. В качестве модели был взят горизонтальный круговой цилиндр. Для численных расчетов ограничились полиномами второй и третьей степени. Забегая несколько вперед, сразу же оговоримся, что при использовании полиномов третьей степени, резко увеличивается влияние случайных погрешностей, так что использование полиномов более высоких степеней для численных расчетов практически не имеет смысла. Формула для численных расчетов имеет следующий вид

$$U(x,z) = A_{00} + A_{01}X + A_{02}Y + A_{10}X^2 + A_{11}XY + A_{20}Y^2, \quad (2)$$

где A — коэффициенты аппроксимации, которые получаются при численных расчетах.

Максимум аномалии от цилиндра нормирован к единице. Глубина от дневной поверхности до центра цилиндра принималась также равной единице. Шаг дискретизации по профилю принимался, равным 0,1; 0,15; 0,2 в долях от глубины h . Характер распределения кривых силы тяжести на различных уровнях представлен на рис. 1.

На первом этапе в вертикальной плоскости XOZ были заданы значения $U(X,Z)$ с шагом 0,1, 0,15 и 0,2 при $h = 1; 1,1; 1,2; 1,3$ с тем, чтобы оценить погрешность использования полиномиальной аппроксимации без погрешностей в исходном поле. Ошибки возникают за счет дискретизации и применения метода наименьших квадратов при решении систем линейных уравнений. Аппроксимация проводилась полиномами второй и третьей степени в скользящем окне с размерами 3×3 , 4×4 и 5×5

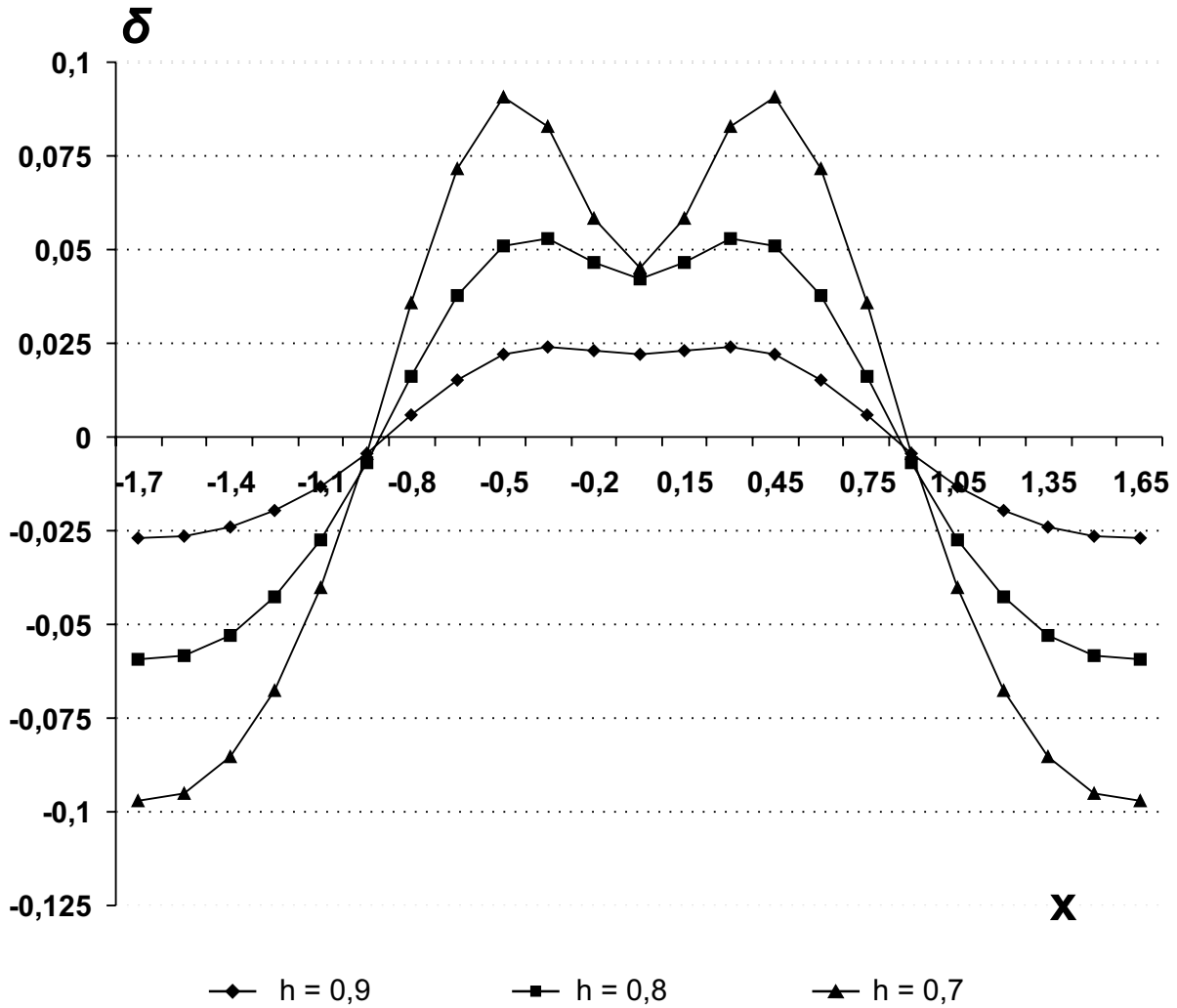


Рис. 1. Графики ошибок поля найденного путем приближения поля к полиному второй степени, шаг наблюдения 0,15; x — шаг наблюдения; δ — значение ошибок поля на различных уровнях h

шагов дискретизации. Окно перемещалось по профилю на один шаг, поэтому в дальнейшем бралось среднее значение соответственно из 3, 4 и 5 реализаций, кроме крайних 2, 3 или четырех точек, значения в которых отбрасывались. Расчеты производились в программе «Surfer», использовалась функция «Polynomial Regression» опция «Quadratic surface» и «Cubic surface».

Были получены коэффициенты для вычисления поля $U(x,z)$ в нижнем полупространстве. Коэффициенты рассчитывались для поля заданного с разной дискретностью, т. е. шагом наблюдения 0,1; 0,15; 0,2. В качестве примера в табл. 1 приведены значения коэффициентов полученных для вычисления поля $U(X,Z)$ в нижнем полупространстве при шаге наблюдения 0,2 h.

Таблица 1

Примеры коэффициентов полученных для вычисления поля Δg в нижнем полупространстве при шаге наблюдения 0,2h

x	0	-1,2	-1,4
A00	2,891775	1,819034	1,415488
A01	-2,96478	-0,88845	-0,2752
A02	0,910394	-0,01016	-0,20829
A10	-0,73215	1,196396	1,089775
A11	0,615504	-0,7615	-0,60303
A20	-0,2357	0,02136	0,058899

Отметим, что наилучшая аппроксимация получена при окне 4x4. Теоретические погрешности в этом случае минимальны. Кроме того погрешности имеют тесную связь с шагом дискретизации:

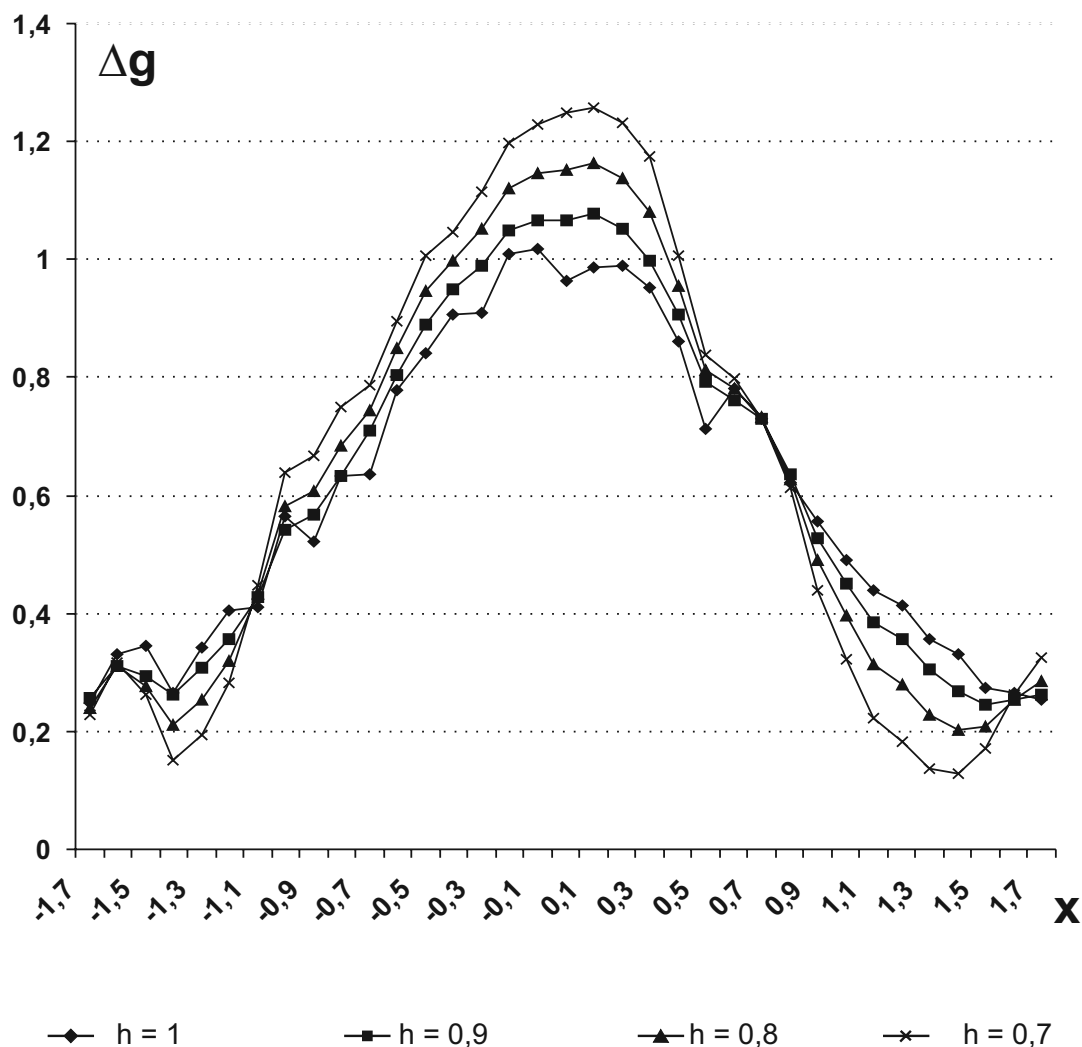


Рис. 2. Графики поля в нижнем полупространстве над горизонтальным материальным цилиндром с помехами, при шаге наблюдения 0,1, уровень помех 10%: x — шаг наблюдения; Δg — значение ошибок поля на различных уровнях h

чем больше шаг дискретизации, тем большая погрешность. Характер распределения теоретических погрешностей для различных глубин пересчета приведены на рис. 2. Погрешность, отнесенная к максимальному значению аномалии на соответствующем уровне не превышает 7%. Таким образом, полиномиальная аппроксимация позволяет решать задачу пространственных расчетов силы тяжести с удовлетворительной точностью.

Однако обеспечение теоретической точности не решает окончательно поставленной задачи при пересчете поля. На втором этапе было исследовано влияние случайных ошибок в исходных данных на результаты аналитического продолжения поля вниз.

Для изучения этого влияния в теоретические значения аномального поля были введены случайные ошибки, представляющие собой аппаратные помехи с различным уровнем (3%, 6%, 10% относительно максимального значения аномалии), с помощью программы генерации случайных чисел. Кроме того, поле в верхнем полупространстве находилось с помощью численных схем Каратаева Г. И. [3]. После этого рассчитывалось поле в нижнем полупространстве с помощью аппроксимации поля в верхнем полупространстве полиномами второго и третьего порядка по схеме, описанной выше.

Результаты расчетов представлены на рис. 3 для случая максимальной «аппаратурной» погрешнос-

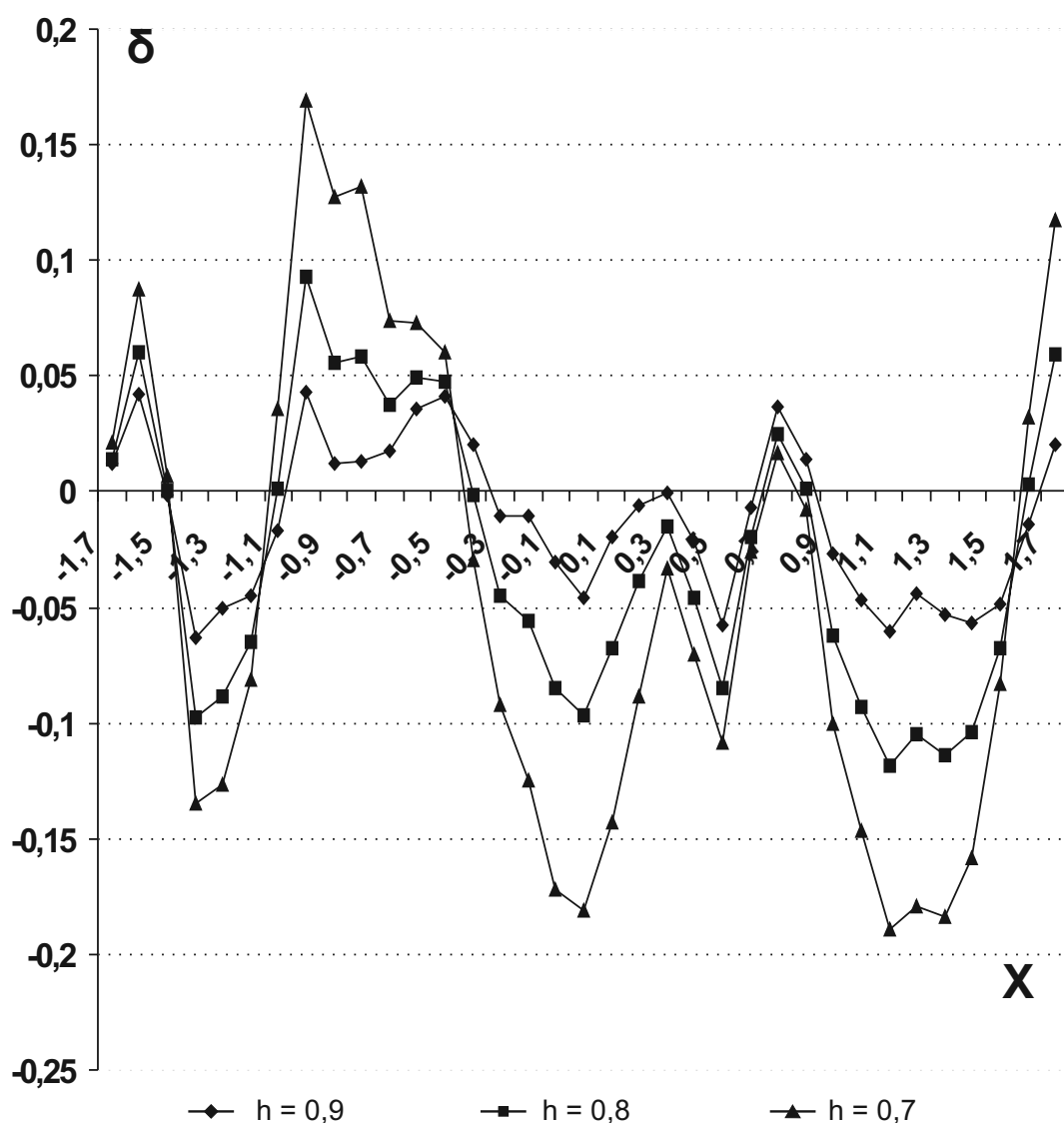


Рис. 3. Графики ошибок поля с различным уровнем помех, при шаге наблюдения 0,1, уровень помех 10%: x — шаг наблюдения; δ — значение ошибок поля на различных уровнях h

ти в 10%, а сами ошибки расчетов в «чистом виде» — на рис. 4. При этом надо отметить, что погрешность в 10% это достаточно значимая величина в гравиметрической съемке. Допустим, что амплитуда гравиметрической аномалии составляет 1 мГал, тогда погрешность измерений равна $\pm 0,1$ мГал, что соответствует съемкам среднего качества. Как видим, результаты являются приемлемыми. Для сравнения предлагаемого способа со способами других авторов были сделаны пересчеты в нижнее полупространство по численным схемам Каратаева Г. И. и Антонова Ю.В [1, 2]. Указанные схемы пересчета [1, 2] выбраны потому,

что эти схемы наименее чувствительны к влиянию случайных ошибок в измерениях [3]. Результаты показали, что пересчеты на основе аппроксимации несколько лучше. Видимо, в данном случае при аппроксимации происходит некоторое подавление случайных помех. Кстати, делались также расчеты по предварительно сглаженным исходным данным с помощью формулы

$$U_0 = \frac{1}{35}(-3U_{-2} + 12U_{-1} + 17U_0 + 12U_1 - 3U_2),$$

где U — значение поля Δg , в соответствующих точках сглаживания.

Сглаженное поле пересчитывалось в низ, но ошибки поля оказались на том же уровне или даже выше, чем ошибки при расчете аналогичного поля без сглаживания.

В результате проделанной работы было установлено, что предложенный метод дает возможность расчета поля в нижнее полупространство и он работает при условии наличия аппаратурных помех. Значение коэффициентов аппроксимации выполняющих приближение поля полиномами второй степени, ниже значений коэффициентов других авторов (Каратаев Г. И., Антонов Ю. В.). Это дало возможность ожидать меньшее влияние случайных ошибок на наблюдаемые значения гравитационного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антонов Ю.В. Аналитическое продолжение аномалий силы тяжести в нижнее полупространство. Прикладная геофизика, вып.58, 1970, с.167-176.
2. Каратаев Г.И., Сербуленко М.Г., Гусев Ю.М. Решение некоторых задач гравиразведки и магниторазведки на электронных цифровых машинах. Тр. ИГиГ СО АН СССР «Применение электронных цифровых машин при решении некоторых задач геофизики», вып.21. Новосибирск, 1963. с. 22-88.
3. Справочник геофизика. Гравиразведка. М., Недра, 1990, 607 с.