УДК 512(072.3)

ЕДИНАЯ ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КОНЦЕПЦИЯ ОБУЧЕНИЯ ЛОГИЧЕСКОМУ ПОИСКУ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ И ВУЗЕ

А. А. Аксёнов

Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева

Поступила в редакцию 21 декабря 2018 г.

Аннотация: *обосновывается возможность разработки теории и методики, позволяющей обучать поиску решения математических задач школьников и студентов вузов. Такая методика позволит согласовать усилия учителей средних школ и преподавателей вузов для повышения эффективности процесса обучения.*
Ключевые слова: *теория и методика обучения, математика, задача, поиск.*

Abstract: *the article substantiates the possibility of developing theory and technique to train search for solving mathematical tasks of schoolchildren and university students. This technique will harmonize efforts of secondary school teachers and university professors to improve the efficiency of the learning process.*
Key words: *theory and methods of teaching, mathematics, task, search.*

В методике обучения математике под ***логическим*** поиском решения задач понимается поиск, детерминируемый лишь их спецификой. Одним из аспектов проблемы обучения его выполнению является потребность в создании единого методического подхода к обучению школьников и студентов вузов. Это во многом обусловлено тем, что задачи, решаемые студентами, обычно в большей степени стандартизированы, чем школьные задачи. Однако и в средней школе, и в вузе в курсе математики немало задач, нетривиальных с точки зрения процесса поиска их решения, причём на этих двух этапах обучения обнаруживается много общих закономерностей, поэтому следует разработать единую методику обучения поиску решения математических задач. Один из вариантов её теоретико-методологической и методической сущности представлен в данной статье.

В конце семидесятых годов XX в. Ю. М. Колягин выполнил весомое исследование по проблеме применения задач в обучении школьников математике [1; 2], в котором предложил теоретическую модель задачи (в частности, школьной математической), одной из основных составляющих которой стала внешняя структура задачи, позже названная информационной [3]. В замкнутой системе «человек–задача» информационная структура задачи представлена четырьмя компонентами: S = (A, C, D, B). Смысл этих компонентов следующий.

A – условие (условия) задачи, т. е. данные и отношения между ними.

B – требование задачи, т. е. искомое (искомые) и отношения между ними.

C – базис решения задачи – теоретическая и практическая основа, необходимая для обоснования решения.

D – способ, определяющий процесс решения задачи, т. е. способ действия по преобразованию условия (условий) задачи для выполнения требования.

А. В. Брушлинский в работе [4] указывал, что в методических исследованиях часто отождествляется искомое и требование в задаче, что не правомерно с точки зрения психологии мышления, поскольку требование в задаче известно всегда, а искомое чаще всего неизвестно. Так, рассматривая задачу нахождения корней уравнения, замечаем, что требование (решить уравнение) известно, а искомое (корни уравнения) неизвестно. Учитывая это замечание А. В. Брушлинского, делаем вывод, что в предложенной трактовке информационной структуры задачи компонент B дуалистичен: он диалектически связывает требование с искомым. Понимая его только как искомое и считая, что школьнику или студенту в задаче всегда известно условие (A), В. И. Крупич выделил шесть типологических разновидностей задач: **I тип** – ACDB и ACDX – алгоритмические задачи; **II тип** – ACXB и ACXY – полуэвристические задачи; **III тип** – AXYB и AXYZ – эвристические задачи [3].

Буквами X, Y и Z обозначены неизвестные компоненты информационной структуры задачи. Легко видеть, что здесь представлены все возможные варианты типологии задач, существующих в реальности, т. е. среди них нет задач, в которых известен способ решения, но неизвестен теоретический базис. Очевидно, такие задачи не имеют места в математике. В этой статье исключим из рассмотрения задачи типа ACDB, так как в них известен способ решения.

Если принять во внимание только теоретический базис задачи (C), то можно получить следующие разновидности задач: 1) задачи, сформулированные и решаемые средствами только одной теории; 2) задачи, сформулированные средствами одной теории, но решаемые с помощью аппарата ещё каких-либо теорий; 3) задачи, составленные на основе аппарата нескольких теорий и решённые только их средствами; 4) задачи, сформулированные средствами нескольких теорий, но решённые с применением арсенала других теорий. Назовём это ***четырёхаспектной типологией теоретического базиса задач.***

Рассмотрим другой компонент информационной структуры задачи – способ её решения (D). Компонент D может быть известен или неизвестен субъекту, решающему задачу. Основные известные ему составляющие компонента D – это алгоритмы или методы решения задач, уже изученные им. Осмыслим все возможные ситуации. Все математические задачи можно разделить на две группы: а) полностью непосредственно разрешимые с помощью одного или нескольких известных алгоритмов; б) которые не могут быть решены таким образом. Задачи из второй группы также разделяются двояко: непосредственно решаемые с помощью одного или нескольких стандартных методов, применяемых последовательно (или задачу можно решить посредством нескольких методов, но каждый из них один способен привести к её решению); задачи, которые не могут быть решены данным образом. Задачи из второй подгруппы тоже могут быть разделены на два множества. К первому относятся задачи, в процессе решения которых применяются известные субъекту методы. Имеется в виду ситуация, когда на некоторых этапах своего решения задача не решается с помощью известных методов непосредственно, т. е. прежде чем использовать какой-либо известный метод, нужно выполнить в ней некоторые преобразования и только после этого его применение становится возможным. Ко второму множеству относятся задачи, в решении которых вообще не используются известные методы. Итак, в зависимости от того, что задействовано в обосновании решения задач, получено четыре их класса: а) непосредственно используется один или несколько алгоритмов; б) непосредственно применяются несколько известных методов (в частности, один метод); в) допускается использование в процессе решения некоторых известных методов; г) известные методы в решении не применяются ни для какой стратегии поиска (но алгоритмы могут быть задействованы в ходе решения такой задачи). Эта классификация также является количественно-качественной, поскольку алгоритм решения задачи качественно отличается от метода. Методы решения задач в большинстве случаев могут быть сформулированы и доказаны как теоремы (например, методы решения школьных и дифференциальных уравнений), а алгоритмы характеризуются указанием точного упорядоченного количества конкретных действий, безошибочное выполнение которых гарантирует решение задачи. Неизвестной же составляющей компонента D являются указанные выше преобразования в задаче, после выполнения которых становится возможным применение известных методов решения задач.

Исследуем дуалистичный компонент (B) информационной структуры задачи. Все задачи можно разделить на две большие принципиально разные части: задачи, которые можно решить приведением конкретного примера (или контрпримера); задачи, которые так решить невозможно (поиск их решения нужно выполнять традиционно). Первая часть составляет отдельный вид задач, ***решаемых приведением конкретного примера или контрпримера.***

Задачи второй части также можно разделить на две группы по принципу известности искомого в них. Известно оно только ***в задачах на доказательство*** (первая группа задач), поскольку в формулировке задачи чётко указано, какой факт требует доказательства «в общем виде» – он и является искомым. Во вторую группу войдут задачи, в которых искомое неизвестно. Если оно изначально неизвестно, после своего нахождения оно может быть *в конечном счёте* представлено тремя разными вариантами: а) *только* посредством его визуализации (с помощью чертежей, рисунков, графиков и т. п.); б) *только* с помощью словесного описания; в) любыми принципиально иными способами.

Если в задаче искомое представляется только посредством визуализации, это ***задача на построение.*** Например, если требуется построить ромб, то искомым в такой задаче является, конечно, не наименование фигуры (оно известно), а её конкретное положение на плоскости. Разумеется, оно неизвестно.

В случае когда искомое в задаче может быть представлено только словесным описанием, она относится к виду ***задач, решаемых посредством словесного описания*** (в нём могут использоваться и числа, поскольку их наличие не меняет *сущности* этих задач). Такое название для данного вида задач правомерно, так как если в принципе нет возможности изложить искомое в них никаким другим способом, кроме указанного, это может быть только следствием того, что и сам процесс их решения выполнялся этим же способом. В противном случае, очевидно, была бы возможность представить искомое как-либо иначе.

Рассмотрим все остальные задачи. В них искомое неизвестно. Их также можно разделить двояко: задачи, в которых предметное содержание искомого (после его нахождения) фиксируется безотносительно к тому, при каких условиях оно существует; все остальные задачи (для которых характерна противоположная ситуация, т. е. искомое, удовлетворяющее требованию задачи, в ответе указывается вместе с условиями своего существования). Первые задачи – это ***задачи на нахождение***, вторые – ***задачи на исследование.*** Очевидно, эти виды задач принципиально различны.

Также заметим, что можно решать составленные кем-либо задачи или самостоятельно составлять их. Составление задач – особый тип работы над ними. Однако если школьникам дано задание – составить задачу, и указаны какие-либо ориентиры для её составления, фактически для них *сформулирована задача*, а вся совокупность указанных в ней ориентиров является *условием* этой задачи. Её *требование* состоит в том, чтобы на основе данных условий сформулировать некоторую задачу, причём *условие* этой задачи является *искомым* для той задачи, которая изначально дана школьникам. Такие задачи назовём ***конструктивными.***

Итак, получено семь основных видов задач: задачи на нахождение; задачи на доказательство; задачи на построение; задачи на исследование; конструктивные задачи; задачи, решаемые приведением конкретного примера или контрпримера; задачи, решаемые посредством словесного описания.

Будем понимать систему как непустое множество элементов, на котором реализовано данное отношение с фиксированными свойствами [5]. В методологии науки такую интерпретацию системного подхода часто называют структурно-функциональным методом [6]. Этот метод позволяет выделить структурную единицу анализа явления, изучение которой вскрывает закономерности существования самого явления, установить иерархическую связь составляющих его частей. Основываясь на этом методе, выявим структурную единицу процесса логического поиска решения задачи и покажем, что она же является структурной единицей процесса обучения поиску решения задач.

Согласно используемому в статье концептуальному подходу к трактовке понятия «задача», её решение состоит в том, что субъект устанавливает предметное содержание ещё неизвестных ему компонентов информационной структуры задачи на основе работы с известными компонентами. В ходе её выполнения в его мышлении отображается известная в задаче информация. Отображение в сознании субъекта данных, имеющихся в информационной структуре задачи (и появляющихся в качестве промежуточных результатов её решения), позволяющее понять их смысл и выполнять нахождение предметного содержания неизвестных компонентов информационной структуры, будем называть ***идеей.*** Следует иметь в виду, что в решении задачи на различных этапах приходится применять разные идеи, причём на конкретном этапе часто есть возможность для завершения решения реализовать не одну, а несколько идей. И такой этап в задаче может быть не один. Тогда идею, позволяющую выполнять решение задачи в пределах одного этапа, будем называть ***локальной. Глобальной*** идеей для конкретной задачи назовём последовательность её локальных идей. Тогда математическую задачу, имеющую n локальных идей (n этапов в решении), можно рассмотреть как последовательность n подзадач ($n \geq 1$), непосредственно следующих друг за другом. Таких последовательностей будет столько, сколько существует глобальных идей решения данной задачи. Разумеется, каждая подзадача является самостоятельной математической задачей.

Итак, в процессе поиска решения задачи самое важное – выдвинуть идею её решения. Задача может быть рассмотрена как последовательность подзадач, и каждая из них соответствует некой локальной идее. В общем случае невозможно любую математическую задачу решить в один этап. Существуют задачи, решение которых состоит из нескольких этапов, и суть последующего можно установить, только опираясь на результат предыдущего. То есть в ходе поиска решения задачи на первый план выступают локальные идеи, а реализация очередной идеи – это отдельный этап решения задачи. Таким образом, локальная идея в поиске решения задачи является минимальным логическим компонентом (структурной единицей системы). Следовательно, субъект, выполняя поиск решения задачи, последовательно генерирует и реализует локальные идеи.

Как показывает многолетняя практика педагогической работы учителей средних школ и преподавателей вузов, разделение исходной задачи на подзадачи вызывает значительно меньше затруднений у учащихся, чем генерирование идей решения задачи. По этой причине можно утверждать, что в обучении поиску решения математических задач самое главное – обучить учащихся выдвижению и реализации локальных идей их решения.

Осмыслим процесс разделения исходной задачи на подзадачи в случае, когда задача не может быть решена в один этап. Каждая задача представляет собой явную или неявную логическую взаимосвязь образующих её компонентов. В рамках одной задачи компоненты могут быть связаны отношениями сравнения («меньше», «равно», «больше»), а также арифметическими действиями (могут входить в состав какого-либо аналитического выражения). Компоненты задачи связаны явной логической связью лишь тогда, когда сущность последующего компонента может быть установлена только после того, как будет определена суть предыдущего. В противном случае будем считать, что между компонентами задачи существует неявная логическая связь. Разделение задачи на подзадачи – это её разделение на компоненты (или группы компонентов). Следовательно, разделение задачи на подзадачи зависит только от того, каким образом связаны её компоненты. Однако эта их взаимосвязь определяется только содержательной сущностью данной задачи и практически не коррелирует ни с одной из приведённых выше характеристик задач. Таким образом, процедура разделения задач на подзадачи выполняется, в сущности, одинаково для задач любого типа, вида, класса, четырёхастпектной типологии их теоретического базиса и т. д.

Поскольку выдвижение локальных идей решения задачи выполняется после её разделения на подзадачи (или в ходе этого процесса, если компоненты задачи связаны явной логической связью), можно утверждать, что генерирование и реализация локальных идей решения задач – это минимальный компонент процесса поиска решения и обучения поиску решения для задач всех типов, видов, классов и т. д., т. е. это структурная единица логического поиска решения и обучения поиску решения практически любых математических задач.

Покажем, что задачи с указанными выше характеристиками имеют место и в школьной, и в высшей математике, изучаемой в вузах.

Примем во внимание задачи из школьного курса математики. Наличие в нём алгоритмических, полуэвристических и эвристических задач показано в работах [1–3; 7].

Основу школьного курса математики составляют задачи на нахождение, доказательство и построение, причём они могут быть представлены и в алгебре, и в геометрии (в алгебре задачи на построение связаны с построением и преобразованием графиков). Задачами на исследование являются практически все задачи с параметрами. В геометрии задачи на исследование связаны с выяснением взаимного расположения фигур, обнаружением некоторых их качеств. Например, в задаче: «В треугольник со сторонами 6 см, 10 см и 12 см вписана окружность, к которой проведена касательная так, что она пересекает две большие стороны. Найдите периметр отсечённого этой касательной треугольника», – исследовательская работа состоит в том, чтобы доказать, что периметры всех отсекаемых касательной треугольников равны. Задачи, решаемые приведением конкретного примера или контрпримера, могут быть такими: «Существует ли четырёхугольная пирамида, противоположные боковые грани которой перпендикулярны друг другу и плоскости основания?»; «Может ли сумма однозначного и двузначного чисел быть трёхзначным числом?» (задача для учащихся начальных или младших классов) и т. п. Конструктивной задачей является, например, составление логарифмического уравнения, которое посредством потенцирования сводится к тригонометрическому уравнению, не имеющему корней. Задачи седьмого вида представлены в текстах ЕГЭ (задачи № 7 из первой части экзамена, связанные с графиками функции или её производной).

Приведём примеры задач каждого из четырёх классов. **1.** Построить перпендикуляр к данной прямой. **2.** Найти объём прямого параллелепипеда высотой 5 м, если его основание – параллелограмм со сторонами 8 м и 14 м и углом 30°. **3.** Решить уравнение $\sin x + \cos 2x = 1$. **4.** Решить в целых числах уравнение $xy = 20 - 3x + y$.

Задача: «Найти гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами 5 м и 12 м», – сформулирована и может быть решена средствами одной теории школьного курса математики. Уравнение $\log_2 \cos x = -1$ сформулировано и может быть решено средствами двух теорий. Задача: «Основания трапеции равны 20 м и 60 м, а боковые стороны равны 13 м и 37 м, найти её площадь», – сформулирована средствами одной теории, но для её решения необходимо использовать алгебраический аппарат – уравнение. С помощью арсенала двух теорий сформулирована, например, задача: «Решить уравнение $\cos(x-3) = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x + 10$», но для его решения надо найти производную функции $y = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x + 10$.

Примем во внимание задачи из курса высшей математики. Алгоритмические задачи здесь связаны с непосредственным применением формул, алгоритмов, теорем и т. п. Например, вычисление определителя, нахождение ранга матрицы и т. п. Практически все остальные задачи высшей математики являются полуэвристическими. К эвристическим задачам можно отнести самостоятельное доказательство студентами некоторых теорем (лемм), выведение некоторых формул, в частности, формулы Муавра и т. д.

Задачи на нахождение и доказательство доминируют в курсе высшей математики. Задачи на исследование в нём могут быть связаны с исследованием функций и практическим приложением математического аппарата в спецдисциплинах. Например, используя арсенал динамического программирования, студенты экономических специальностей могут исследовать проблему замены оборудования на предприятии. Конструктивные задачи могут быть, например, такими: «Составить задачу на вычисление предела функции, в ходе решения которой необходимо использовать свойства эквивалентных бесконечно малых функций и умножение числителя и знаменателя дроби на сопряжённое выражение» и т. д. Задачи, решаемые приведением конкретного примера или контрпримера, можно связать с изучением функций: «Может ли быть периодической функция, не являющаяся тригонометрической?» (таковой, например, является функция «Дробная часть действительного числа») и т. п. Задачи на построение в курсе высшей математики, в основном, связаны с построением сечений многогранников, а также с изучением проективной геометрии. Задачи, решаемые словесным описанием, в вузе могут быть такими же, как и в школе, но, в частности, они могут быть и более трудными.

Приведём примеры задач каждого из четырёх классов. **1.** Найти производную функции $y = \cos 3x + \ln x$. **2.** Точки A(2; 5), B(9; 1), C(6; 8) являются вершинами треугольника. Составить уравнение всех его высот. **3.** Вычислить интеграл: $\int \cos 8x dx$. **4.** Даны функции $f(x)$ и $g(x)$. Установить характер монотонности функций $f(g(x))$ и $g(f(x))$, если функция $f(x)$ строго возрастает, а функция $g(x)$ строго убывает на множестве всех действительных чисел.

Нахождение суммы чисел $2 + 3i$ и $7 - i$ сформулировано и может быть решено средствами теории комплексных чисел. Дифференциальное уравнение $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ сформулировано средствами одной теории, но, выполняя его решение, необходимо привлечь аппарат теории рациональных функций для нахождения корней характеристического уравнения третьей степени. Задача нахождения предела последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}(n^3 - 4n^2 - 2n + 7)$ сформулирована и может быть решена средствами теории пределов последовательностей и теории рациональных функций. Функция $y = e^x \cos x$ составлена с помощью арсенала двух теорий, но для её исследования нужно использовать аппарат производной.

Итак, показано, что и в школьной, и в высшей математике имеют место задачи, обладающие всеми теми теоретико-методическими характеристиками, которые были выявлены в ходе исследования математических задач и процесса поиска их решения. Разумеется, нетрудно составить задачи, имеющие такие же теоретико-методические характеристики, но относящиеся к другим теориям школьной или высшей математики. Заметим, что отдельная теория в школьной и высшей математике – это нередко разные реальности (в курсе высшей математики в одну теорию можно объединить все трансцендентные функции, изучаемые в школе). Однако в процессе обучения важно, чтобы и школьники, и студенты усвоили сам подход к анализу задачи и выполнению её решения, состоящий в том, что задачу можно сформулировать средствами одной или нескольких теорий, а в ходе её решения не выходить (или выйти) за их пределы.

Поскольку структурной единицей процесса поиска и обучения поиску решения математических задач является локальная идея решения задачи, в обучении поиску решения задач на одно из первых мест выходит формирование умения разделять данную задачу на несколько подзадач. В школе этот приём работы с задачей используется довольно часто. С одной стороны, из этого следует, что будущие студенты с ним хорошо знакомы. С другой стороны, первые же практические занятия по высшей математике изобилуют задачами, в достаточно высокой степени стандартизированными, поэтому даже если в их решении имеет место разделение исходной задачи на ряд подзадач, то почти для каждой из них не требуется выполнять собственно поиск решения. Можно было бы утверждать, что здесь целесообразно использовать задачи, в которых надо выполнять полноценный поиск решения, но высшая математика такова, что первичное знакомство с ней практически не может состояться вне решения большого числа стандартных задач. По этой причине разнообразить деятельность студентов на этом этапе обучения следует с помощью других средств. Одним из них может быть применение в обучении задач, формулировка и процесс решения которых задействует аппарат нескольких теорий, причём основная часть из них должна быть изучена студентами ещё в средней школе.

По мере того как студенты далее усвоят другие крупные теории, им уже можно будет предлагать задачи, теоретический базис которых в значительной степени состоит из фактов, изученных в курсе высшей математики. Однако при этом не следует пренебрегать теоретическими средствами школьной математики, поскольку часто студенты школьную и высшую математику не воспринимают как единое целое, считая, что это «две различных математики».

Обучая студентов математике, преподаватели вузов должны постоянно подчёркивать логическое единство школьной и высшей математики, особенно в процессе решения задач, поскольку процессы мышления, имеющие здесь место, одни и те же, разными могут быть только теоретические средства, используемые для реализации решения. Так, если в решении задачи из курса высшей математики возникла необходимость выйти за рамки исходного теоретического базиса, целесообразно провести аналогию с какой-либо из задач школьного курса математики. Такие аналогии могут помочь студентам в понимании того, что, изучая высшую математику, выполнять поиск решения задач следует с помощью тех же приёмов, которые они освоили ещё в средней школе.

Заметим, что полноценное внедрение всех указанных методических средств в процесс обучения школьников и студентов требует определённых изменений в работе как школьных учителей математики, так и преподавателей вузов. Новые методические идеи (даже если их новшество проявляется на субъективном уровне) требуют осмысления, «принятия» самим учителем или преподавателем, поиска конкретных путей воплощения в процессе обучения и т. п. Всё это требует немалых временных затрат. Кроме того, опытные учителя и преподаватели вузов не склонны к кардинальным изменениям используемых ими методических средств, новые идеи внедряются ими в процесс обучения постепенно. Этот факт приводит к выводу о том, что в решении таких проблем, как проблема преемственности в обучении поиску решения задач, приобретает значимость теоретико-методологическое и теоретико-методическое обоснование её сущности и также возможных путей решения. Иными словами, и школьным учителям, и преподавателям вузов прежде всего необходимо осмыслить суть обучающей деятельности, направленной на формирование у учащихся умения выполнять логический поиск решения математических задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колягин Ю. М.* Задачи в обучении математике / Ю. М. Колягин. – М. : Просвещение, 1977. – Ч. I. – 110 с.

2. *Колягин Ю. М.* Задачи в обучении математике / Ю. М. Колягин. – М. : Просвещение, 1977. – Ч. II. – 144 с.

3. *Крупич В. И.* Теоретические основы обучения решению школьных математических задач / В. И. Крупич. – М. : Прометей, 1995. – 166 с.

4. *Брушлинский А. В.* Психология мышления и кибернетика / А. В. Брушлинский. – М. : Мысль, 1970. – 202 с.

5. *Уёмов А. И.* Системный подход и общая теория систем / А. И. Уёмов. – М. : Педагогика, 1978. – 272 с.

6. *Кохановский В. П.* Основы философии науки : учеб. пособие для аспирантов / В. П. Кохановский, Т. Г. Лешкевич, Т. П. Матяш, Т. Б. Фахти. – Изд. 5-е. – Ростов н/Д. : Феникс, 2007. – 603 с.

7. *Аксёнов А. А.* Теория обучения поиску решения школьных математических задач / А. А. Аксёнов. – Орел : ОГУ ; Картуш, 2007. – 200 с.

Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева

Аксёнов А. А., доктор педагогических наук, профессор, кафедра математики и прикладных информационных технологий имени Н. А. Ильиной

E-mail: aksenovaa@inbox.ru

Oryol State University named after I. S. Turgenev

Aksenov A. A., Dr. Habil. in Pedagogy, Professor, Department of Mathematics and Applied Information Technologies named after N. A. Ilyina

E-mail: aksenovaa@inbox.ru