УДК 372.8

ПРИНЦИПЫ ФУНДИРОВАНИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ОСНОВНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУР БУДУЩИМИ УЧИТЕЛЯМИ МАТЕМАТИКИ

И. В. Кузнецова

Филиал Северного (Арктического) федерального университета имени М. В. Ломоносова (г. Коряжма)

В. А. Тестов

Вологодский государственный университет

Поступила в редакцию 10 августа 2015 г.

Аннотация: *рассматривается механизм усиления теоретической и практической составляющих математического образования будущего учителя математики на основе принципов фундирования. В качестве материала для спиралевидной схемы моделирования базовых знаний, умений и навыков математической и методической подготовки будущего учителя математики используются основные алгебраические структуры. Рассматриваются принципы построения математического курса и спираль фундирования содержания понятия группы.*
Ключевые слова: *подготовка учителя математики, основные алгебраические структуры, принципы фундирования.*

Abstract: *the mechanism of enhancing theoretical and practical components of the future Mathematics teachers' mathematical education based on the principles of foundation is regarded. Basic algebraic structures are used as the material for basic knowledge and skill Circuit Simulation Spiral Model in future teachers' Mathematics and Methodology training. The building principles of a Mathematics course as well as the foundation spiral of the "group" concept content are discussed.*
Key words: *mathematics teachers' training, basic algebraic structures, the principles of foundation.*

В настоящее время основной проблемой математического образования является низкая учебная мотивация обучающихся, которая связана прежде всего с тем, что в процессе изучения математики не достигается понимания основных математических понятий. У учащихся наблюдается формализм математических знаний, их недостаточная действенность; недостаточный уровень математической культуры и математического мышления. Во многих случаях изучаемый конкретный материал не складывается в систему знаний; математический багаж значительной части выпускников средних школ состоит из большего или меньшего числа слабо связанных между собой догматически усвоенных сведений, причем обучаемые не в состоянии самостоятельно их структурировать и осмыслить. Представление о математике как о единой науке со своим предметом и методом у них отсутствует.

Преодолеть разобщенность различных математических дисциплин, изолированность отдельных тем и разделов, обеспечить целостность и единство в обучении математике возможно лишь на основе выделения в ней наиболее существенных, основных стержней. Такими стержнями, как отмечали А. Н. Колмогоров и другие крупнейшие ученые, являются математические структуры, которые подразделяются, согласно Н. Бурбаки, на алгебраические, порядковые и топологические. Поэтому одним из определяющих принципов построения любого математического курса является принцип *генерализации знаний*, который означает, что начинать построение курса надо с выделения основных структур и понятий и организовывать материал обучения в порядке логического развертывания этих структур и понятий по мере их конкретизации в систему математической науки. Изучение конкретных математических структур должно осуществляться таким образом, чтобы в первую очередь выявлялись их наиболее общие, фундаментальные свойства; необходимо начинать ознакомление с главного, общего – не с элементов, а со структуры.

Используя этот принцип, можно сформировать не только отдельные знания, отдельные качества какого-либо вида мышления, но и всю его структуру, раскрыть внутренние связи и отношения фундаментальных понятий, показать, их проявления на конкретных фактах и явлениях действительности. Фактически это положение содержалось еще в учении Я. А. Коменского, согласно которому в обучении с самого его начала в ум ребенка должны быть вложены некоторые фундаментальные, базовые «корневые и стволовые» общенаучные основания. Это значит, что расположение изучаемого материала должно быть таково, чтобы всё последующее вытекало из предыдущего, было его развитием, а не представляло бы собой совсем нового знания.

Генерализация знаний позволяет обеспечить и лучшее понимание, поскольку порождает структуру, которая значительно сильнее взаимодействует с новыми знаниями, чем отдельные факты. А чем больше разных связей новых знаний с уже имеющимися в долговременной памяти может быть установлено, тем глубже и шире понимание нового материала, тем лучше он усваивается [1].

Генерализация знаний позволяет из основных понятий как на стержнях построить скелет математики. Об этом писал еще Ф. Клейн: «Чисто логические концепции должны составить, так сказать, жесткий скелет организма математики, сообщающий ей устойчивость и достоверность» [2, с. 33]. Этот скелет в качестве связующих стержневых понятий, изучаемых на протяжении всего курса математики и тесно взаимосвязанных, и должны составить математические структуры.

Но, как показывает опыт, изучение основных математических структур при традиционном изложении с трудом дается и школьникам, и студентам. Должна присутствовать достаточная пропедевтика ведущих понятий с учетом возрастных особенностей учащихся. Такие обобщающие и объединяющие понятия, как «функция», «группа», «величина», «число», могут появляться в обучении не как исходные пункты, а как итоги изучения, подводимые по мере накопления фактов и закономерностей, дающих повод к соответствующим обобщениям.

В процессе обучения количественные изменения в мышлении и в других личностных качествах учащихся происходят постоянно, а качественные – скачкообразно, в определенные периоды, поэтому выделение фаз, ступеней развития является необходимым условием правильного подхода к отбору содержания обучения, построения его по принципу «спирали». Весь опыт обучения математике показывает существенные преимущества спиральной структуры знаний, когда материал располагается в виде развертывающейся спирали, причем каждый виток (цикл) образует внутренне целостную тему.

Ступени в таком последовательно-повышаемом содержательном познании, соотнесенные с уровнями восприятия учебной информации, в дидактике обычно называются уровнями обучения или уровнями усвоения. Разные авторы (В. П. Беспалько, И. Я. Лернер, М. Н. Скаткин и др.) предлагают рассматривать такие различные уровни.

По мнению С. И. Архангельского, более правильно говорить не об уровнях обучения, а о некоторых ступенях интеллектуального уровня учащихся в процессе обучения – уровнях научного познания. Конструктивно эти уровни скорее могут быть представлены спиральными связными ступенями, чем разорванными параллельными ступенями. Подчинение и связь этих уровней характеризуются мерой последовательного продвижения в приобретении знаний и в оперировании более высокими формами и инструментами научного познания.

Таким образом, другим важнейшим принципом построения математических курсов является принцип *поэтапности формирования* знаний. В соответствии с этим принципом процесс обучения следует рассматривать как многоуровневую систему с обязательной опорой на нижележащие, более конкретные уровни научного познания. Без такой опоры обучение может стать формальным, дающим знание без понимания.

Среди математиков-педагогов широко распространено мнение о необходимости выделения последовательных этапов в формировании понятий о математических структурах. Еще Ф. Клейн в своих лекциях для учителей отмечал необходимость предварительных этапов в изучении основных математических понятий: «Мы должны приспособляться к природным склонностям юношей, медленно вести их к высшим вопросам и лишь в заключение ознакомить их с абстрактными идеями; преподавание должно идти по тому же самому пути, по которому все человечество, начиная со своего наивного первобытного состояния, дошло до вершин современного знания... Как медленно возникали все математические идеи, как они почти всегда всплывали сперва скорее в виде догадки и лишь после долгого развития приобретали неподвижную выкристаллизованную форму систематического изложения».

По мнению А. М. Колмогорова, обучение математике должно состоять из нескольких ступеней. Он обосновывал это тяготением психологических установок учащихся к дискретности и тем, что «естественный порядок наращивания знаний и умений всегда имеет характер “развития по спирали”». Принцип «линейного» построения многолетнего курса, в частности математики, по его мнению, лишен ясного содержания. Однако логика науки не требует, чтобы «спираль» обязательно разбивалась на отдельные «витки» [3].

Развитием идеи спиралевидного построения содержания обучения математике явилась концепция фундирования, разработанная Е. И. Смирновым на основе идей академика В. Д. Щадрикова. Эта концепция включает в себя, помимо принципа поэтапности формирования знаний, принцип генерализации знаний, выделения существенных, узловых моментов. Важно, что в условиях современной компетентностной парадигмы концепция фундирования затрагивает не только построение содержания обучения, но и формирование опыта и личностных качеств учащегося. Она предполагает развертывание в процессе предметной подготовки таких компонентов, как определение, анализ и механизмы реализации обобщенного содержания уровней базовых школьных учебных элементов и видов деятельности (знания, умения, навыки, математические методы, идеи, алгоритмы и процедуры, содержательные линии, характеристики личностного опыта); определение, анализ и механизмы реализации содержания уровней и этапов развертывания базовых учебных элементов и видов деятельности в направлении применения их на практике.

На основе этой концепции появляется возможность углубить теоретическую и практическую составляющие математического образования. Начиная с ранних этапов обучения через послойное фундирование в разных теоретических дисциплинах объем, содержание и структура предметной подготовки должны претерпеть значительные изменения в направлении теоретического обобщения школьного знания и дальнейшей практической реализации. Школьные знания выступают структурообразующим фактором, позволяющим отобрать теоретические знания из предметной области более высокого уровня [4].

В качестве примера использования концепции фундирования рассмотрим процесс формирования в обучении понятия такой математической структуры, как группа. Первым этапом в этом процессе можно считать дошкольный возраст, когда дети знакомятся с алгебраическими операциями (сложения и вычитания), которые проводятся непосредственно над множествами предметов. Этот процесс продолжается в школе. Можно сказать, что весь курс школьной математики пронизан идеей группы. Знакомство учащихся с понятием группы начинается, по сути дела, уже в 1–5 классах. В этот период в школе алгебраические операции производятся уже над числами. Теоретико-числовой материал является в школьной математике наиболее благодатным материалом для формирования понятия об алгебраических структурах. Целое число, сложение целых чисел, введение нуля, нахождение для каждого числа ему противоположного, изучение законов действий – всё это, по существу, этапы в формировании понятия об основных алгебраических структурах (группах, кольцах, полях).

В последующих классах школы учащиеся сталкиваются с вопросами, которые способствуют расширению знаний такого характера. В курсе алгебры осуществляется переход от конкретных чисел, выражаемых цифрами, к абстрактным буквенным выражениям, обозначающим конкретные числа лишь при определенном истолковании букв. Алгебраические операции производятся уже не только над числами, но и над объектами другой природы (многочленами, векторами). Учащиеся начинают осознавать универсальность некоторых свойств алгебраических операций.

Особенно важным для осознания идеи группы является изучение геометрических преобразований и понятий композиции преобразований и обратного преобразования. Однако последние два понятия не отражены в ныне действующей школьной программе (о последовательном выполнении движений и об обратном преобразовании лишь вскользь упоминается в учебнике А. В. Погорелова).

В элективных и факультативных курсах целесообразно рассмотреть группы самосовмещений некоторых геометрических фигур, группы вращений, орнаментов, бордюров, паркетов и различные приложения теории групп в кристаллографии, химии и т.д. Эти темы, в рамках которых приходится знакомиться с математической постановкой практических задач, вызывают у учащихся наибольший интерес.

При знакомстве с понятием группы в общем виде необходимо опираться на ранее полученные знания, которые выступают структурообразующим фактором в системе математической подготовки студентов, что позволяет надлежащим образом решить проблему преемственности между школьной и вузовской математикой. В частности, на школьные знания следует опираться при рассмотрении такого важнейшего примера, как аддитивная группа целых чисел. Значение этого примера вытекает из того факта, что этой группе изоморфна любая бесконечная циклическая группа.

В большинстве педвузов программа курса «Алгебра и теория чисел» предусматривает введение основных алгебраических структур в начале курса, что позволяет значительно повысить теоретический уровень изложения алгебраических и других математических циклов. Однако зачастую первокурсники не осознают роли аксиом в математическом определении, неточно представляют его схему. Следует признать, что необходим предварительный этап формирования понятия алгебраической структуры, роль которого сводится к четкому описанию математического определения и ряда вспомогательных понятий (отображения, алгебраической операции).

Вводить понятие группы, имея только примеры числовых групп, представляется нецелесообразным. Числовые группы все бесконечные и абелевы, и у студентов может возникнуть неправильное первое представление о группах. Поэтому предварительно полезно изучить хотя бы подстановки, умножение подстановок и свойства этой операции. Группы подстановок дают значительно более полное представление о группе. Эти группы являются конечными и некоммутативными. Кроме того, это так называемый модельный пример, поскольку любая конечная группа изоморфна некоторой группе подстановок.

На первом же курсе следует также хорошенько изучить группу корней *n*-й степени из единицы, первообразные корни, их свойства. Эта группа также является модельным примером, поскольку любая конечная циклическая группа порядка изоморфна группе корней *n*-й степени из единицы.

Очень полезным примером является группа симметрий ромба (четвертная группа Клейна), поскольку это наиболее простая группа, не являющаяся циклической. Такие наглядные модели групп более конструктивны и наглядны, более доступны, чем само абстрактное понятие группы. Наглядные модели пробуждают интуицию, способны предвосхитить общий результат и даже его доказательство. Они на первых этапах обучения могут выступать заменителями абстракций, по крайней мере на уровне правдоподобных рассуждений.

Из концепции фундирования следует, что к рассмотрению различных математических структур необходимо возвращаться несколько раз, поднимаясь на всё более высокие ступени абстракции. Тем самым образуются спирали фундирования. Процесс фундирования состоит из трех компонентов: глобального, локального и модульного. При изучении понятий о математических структурах образуется спираль глобального фундирования. Пример такой спирали при изучении понятия группы изображен на рис. 1.

Наглядные модели должны отражать более или менее полно всю совокупность существенных свойств данной абстракции. Такими наглядными моделями при изучении математических структур могут служить:

а) арифметическое векторное пространство R^n в теории векторных пространств над R, причем особенно важны координатные плоскость R^2 и пространство R^3;

б) группа подстановок S_n и преобразований бесконечных множеств в теории групп;

в) булеан в теории булевых алгебр.

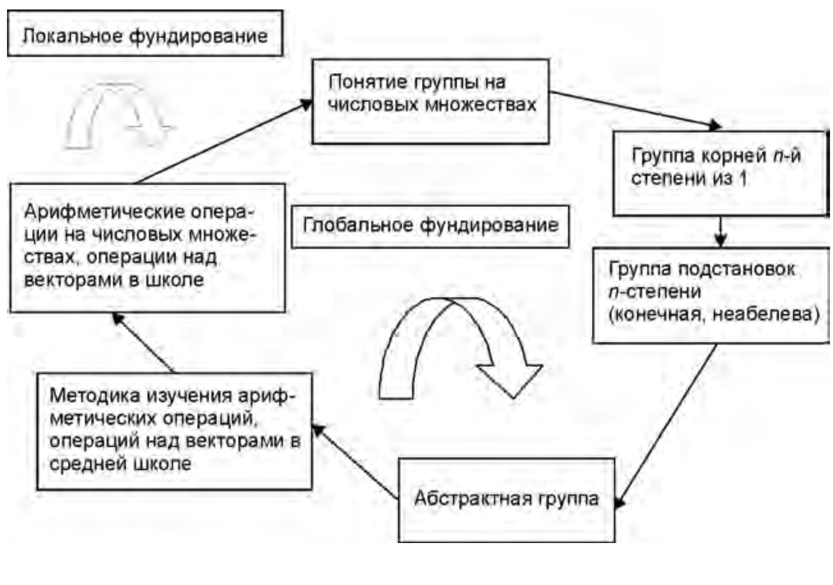

Рис. 1. Спираль фундирования содержания понятия группы

Как правило, такие модели фигурируют в теоремах представления основных абстрактных математических объектов. Так, любое *n*-мерное векторное пространство над R изоморфно арифметическому пространству R^n (теорема о строении конечномерных векторных пространств). Всякая группа изоморфна некоторой подгруппе группы всех преобразований ее множества-носителя (обобщенная теорема Кэли). А произвольная булева алгебра изоморфна подалгебре соответствующего булсана (теорема М. Стоуна).

Реализуются положения концепции фундирования на основе модульного принципа построения учебного предмета. Так, например, содержание курса «Алгебра и теория чисел», представляющего собой образовательную область «алгебра» в профессиональной математической подготовке будущего учителя математики, состоит из восьми дидактических модулей. Каждый из дидактических модулей образует взаимосвязанную цепочку и дает определенную порцию знаний.

Системообразующей основой для всех модулей курса алгебры является модуль «Основные алгебраические структуры».

Каждый дидактический модуль состоит из нескольких фреймов. Фрейм базовых учебных элементов содержит опорную таблицу основных знаний, умений, навыков, алгоритмов и методов для данного модуля. Основная функциональная роль фрейма состоит в содействии формированию внутренних устойчивых опор в ходе освоения содержания предмета. Кодирование информации позволяет создать, отразить суть базовых понятий и утверждений.

Центральное место в дидактическом модуле занимает фрейм аннотированной учебной программы, которая задает необходимый объем учебной информации, мотивацию каждого учебного элемента, требования к уровню его усвоения и образцы заданий, конкретизирующих эти требования.

В состав модуля должны также входить фреймы базы данных спиралей фундирования, интегративной экзаменационной программы и историко-методического оснащения базовых учебных элементов.

Фрейм спирали фундирования абстрактного понятия поля (рис. 2)

Мотивация: необходимо построить систему (числовую, алгебраическую), в которой выполнялись бы операции сложения, вычитания, умножения и деления.

Нами было проведено опытно-экспериментальное обучение алгебраическим структурам будущих учителей математики на основе концепции фундирования в Вологодском педуниверситете и в Коряжемском филиале САФУ. Для оценки эффективности математической подготовки будущего учителя математики на основе концепции фундирования были использованы следующие критериальные характеристики: коэффициент усвоения учебного материала, коэффициент полноты усвоения студентами содержания понятия.

Коэффициент усвоения учебного материала определяется по результатам контрольных работ в конце каждого семестра и вычисляется по следующей формуле: $k_\alpha = \frac{A}{P}$, где k_α – степень успешности усвоения обучаемыми учебного материала, A – число правильно выполненных заданий, P – общее число предложенных обучаемому заданий. Если коэффициен т усвоения $k_\alpha > 0,7$, значит, обучаемый усвоил учебный материал в мере, достаточной для дальнейшего совершенствования своих знаний в процессе самообучения. В этом случае процесс обучения будем считать завер-

Рис. 2. Фрейм спирали фундирования абстрактного понятия поля

√

шенным. В более наглядной форме динамика изменения коэффициента усвоения представлена на гистограмме (рис. 3).

Для определения полноты усвоения содержания понятий алгебраических структур использовался поэлементный анализ проверочных работ по основным понятиям теории; задания приведены ниже.

Элемент знаний «Алгебра»

1. Найдите наименьшее подмножество Z, содержащее число 2, на котором вычитание было бы алгебраической операцией.

2. Проверьте, является ли операция $\circ$, заданная правилом: $a \circ b = a + b - 2$, алгебраической, коммутативной, ассоциативной на множестве R^+?

3. Докажите, что на множестве Z действие, выполняемое по правилу $a \circ b = -ab$, является алгебраической, коммутативной, ассоциативной, но необратимой операцией. Обладает ли алгебраическая система $(Z,\circ)$ нейтральным элементом?

4. Приведите примеры операций на множестве R, которые ассоциативные, но не коммутативные.

5. Является ли данное отображение $f:(Z,+)\to\to(Z,+)$, $f(a)=a+1$ гомоморфизмом, изоморфизмом указанных алгебр?

Элемент знаний «Группа»

1. Является ли множество квадратных трехчленов вида $A=\{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in R\}$ группой относительно сложения?

2. Является ли множество $M = \{a+b\sqrt{2},\ a, b \in Q\}$ аддитивной или мультипликативной группой?

3. Что можно сказать о множестве всех комплексных чисел, модуль которых равен единице?

4. Пусть D_3 – множество всех самосовмещений равностороннего треугольника. Покажите, что это множество состоит только из шести $x \xrightarrow{\varphi} 2^x$ элементов: $D_3 = \{E, R_0^{120°}, R_0^{240°}, S_{11}, S_{12}, S_{13}\}$.

5. Является ли отображение изоморфизмом аддитивной группы действительных чисел (R,+) на мультипликативную группу положительных действительных чисел $(R^+,\cdot)$?

Таким образом, по результатам опытно-экспериментальной работы был сделан вывод о том, что послойное фундирование знаний и опыта деятельности в процессе изучения математических структур в различных математических курсах, объем, содержание и структура которых должны претерпеть значительные изменения, позволит будущему учителю математики овладеть не только предметной, но и методической стороной профессиональной деятельности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тестов В. А.* Математические структуры как научно-методическая основа построения математических курсов в системе непрерывного обучения (школа-вуз) : дис. ... д-ра пед. наук / В. А. Тестов. – Вологда, 1998.

2. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей : в 2 т. Т. 1 / Ф. Клейн. – М. : Наука, 1987. – 432 с.

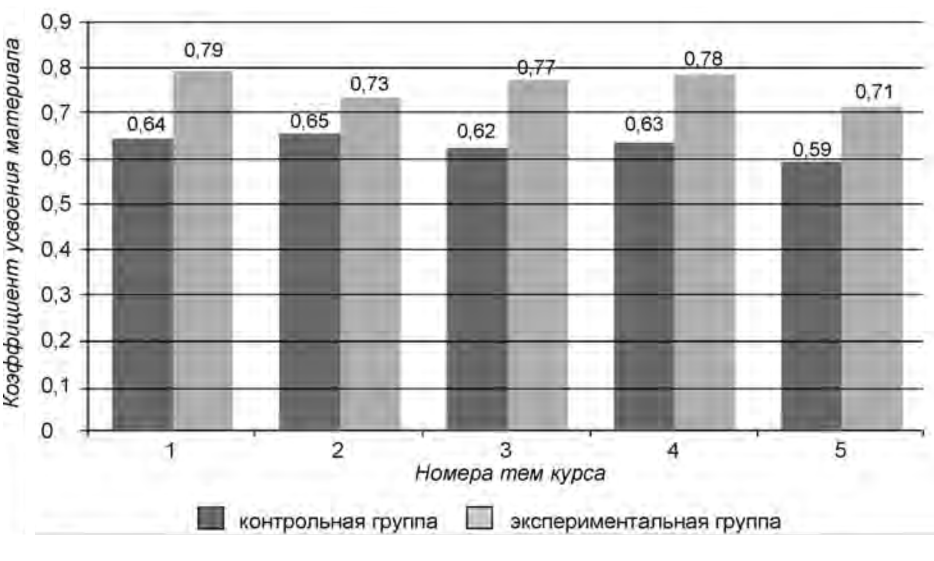

Рис. 3. Гистограмма динамики изменения коэффициента усвоения основных алгебраических структур у студентов КГ и ЭГ

3. *Колмогоров А. Н.* К обсуждению работы по проблеме «Перспективы развития советской школы на ближайшие тридцать лет» / А. Н. Колмогоров // Математика в школе. – 1990. – № 5. – С. 59–61.

4. *Смирнов Е. И.* Фундирование опыта в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога : монография / Е. И. Смирнов. – Ярославль : Канцлер, 2012. – 646 с.

5. *Тестов В. А.* Стратегия обучения математике : монография / В. А. Тестов. – М. : Технологическая школа бизнеса, 1999. – 303 с.

Филиал ФГАОУ ВПО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова» (г. Коряжма)

Кузнецова И. В., кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и информатики, директор филиала
E-mail: i.kuznetsova2@narfu.ru
Тел.: 8 (1850) 3-13-96

Вологодский государственный университет

Тестов В. А., доктор педагогических наук, профессор кафедры математики и методики преподавания математики
E-mail: vladafan@inbox.ru
Тел.: 8 (172) 72-01-62

Koryazhma Branch of Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov

Kuznetsova I. V., PhD in Pedagogical Sciences, Associate Professor at the Department of Mathematics and Informatics
E-mail: i.kuznetsova2@narfu.ru
Tel.: 8 (1850) 3-13-96

Vologda State University

Testov V. A., Dr. habil. in Pedagogical Sciences, Professor at the Department of Mathematics and Mathematics Teaching Methods
E-mail: vladafan@inbox.ru
Tel.: 8 (172) 71-01-33