

УДК 378

### ПРИМЕНЕНИЕ ТОПОЛОГИИ В НЕЛИНЕЙНОМ АНАЛИЗЕ

(Рец. на кн.: В. Г. Звягин. Введение в топологические методы нелинейного анализа : учебное пособие. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. – 291 с. – (Учебник Воронежского государственного университета))

Ю. Е. Гликлих

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 11 ноября 2014 г.

**Аннотация:** рецензируется учебник В. Г. Звягина «Введение в топологические методы нелинейного анализа», опубликованный в серии «Учебник Воронежского государственного университета»

**Ключевые слова:** топология, нелинейный анализ, неподвижные точки.

**Abstract:** the article is devoted to the review of V. G. Zvyagin's textbook «Introduction into Topological Methods of Nonlinear Analysis» published in «Voronezh State University Textbook» Series.

**Key words:** topology, nonlinear analysis, fixed point.

Одним из наиболее важных вопросов в теории дифференциальных уравнений и вообще нелинейного анализа являются аспекты изучения разрешимости различных задач как для дифференциальных, так и для операторных уравнений, а также исследование качественного поведения решений этих уравнений. Одним из самых распространенных методов таких исследований являются топологические методы. Фактически на развитии этих методов и их применении и возникла Воронежская математическая школа, получившая международное признание в этом направлении. Уже первая монография по этому направлению (М. А. Красносельский. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М. : Гостехиздат, 1956) получила широкую известность не только в России, но и за рубежом и была переведена на многие иностранные языки. Затем появились и другие книги М. А. Красносельского с соавторами, в которых топологические методы получили дальнейшее развитие. Однако эти книги являются научными монографиями и их трудно использовать для первоначального введения в эту дисциплину, в то время как на математическом факультете Воронежского госуниверситета уже начиная с третьего курса читаются спецкурсы по данной тематике.

Учебник В. Г. Звягина «Введение в топологические методы нелинейного анализа», вышед-

ший в 2014 г. в Издательском доме ВГУ в серии «Учебник Воронежского государственного университета», призван восполнить имеющийся пробел в изучении топологических методов нелинейного анализа.

Книга состоит из предисловия, трех глав и приложения. Она рассчитана на студентов 2–4 курсов математических факультетов университетов, желающих изучить один из аспектов топологических методов нелинейного анализа, а именно теорию топологической степени отображений конечномерных и бесконечномерных пространств и познакомиться с ее приложениями в различных вопросах анализа.

Материал книги связан с тем фактом, что явно найти решение нелинейных уравнений практически почти никогда не удастся. Поэтому в нелинейном анализе исследования идут по такому пути – вначале проводится качественное исследование решений нелинейного уравнения (доказываются теоремы существования, единственности, поведения решений) и здесь применяются изложенные в этой книге топологические методы, затем, применяя приближенные методы, находят приближенные решения. На самом деле они и нужны, так как при создании модели все практические данные приводятся приближенно. При этом игнорировать первый этап – качественное поведение решений – нельзя, поскольку, например, может оказаться, что уравнение вообще не имеет решений, и приближенные методы будут давать хаотические приближения, не связанные друг с другом.

Первая глава книги содержит материал по теории степени отображений областей конечномерных пространств и многообразий. В ней впервые в русскоязычном издании подробно изложен аксиоматический подход и показана единственность теории степени, удовлетворяющей четырем аксиомам. Приводится конструкция степени, основанная на методах дифференциальной топологии. Теория степени распространяется на непрерывные отображения многообразий, причем изложение этой теории является одним из самых подробных в существующей литературе. Здесь же дано изложение теории степени для одного класса разрывных отображений со значениями в поле рациональных чисел. Приведены приложения теории степени для изучения теорем существования в периодических задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений и задачах алгебры.

Во второй главе строится теория степени отображений Лере–Шаудера, изучаются ее свойства, а также вопросы теории бифуркации решений нелинейных уравнений. При этом доказывается знаменитая теорема М. А. Красносельского о бифуркации в случае нечетной кратности характеристического значения производной компактного оператора, участвующего в уравнении. Здесь же приведена известная теорема Марино о бифуркации решений уравнений с вариационными операторами в гильбертовом пространстве. Заканчивается вторая глава изложением известного результата П. Рабиновича о глобальном поведении ветвей решений нелинейных уравнений, проходящих через точки ветвления.

В третьей главе учебного пособия теория степени распространяется на другие классы отображений бесконечномерных пространств. Здесь изложена теория степени отображений, удовлетворяющих условию альфа. Эта теория была построена известным специалистом по нелинейно-

му анализу и дифференциальным уравнениям И. В. Скрыпником и имеет большое число приложений. Здесь же рассмотрен класс компактно сжимаемых операторов и для возмущений тождественного оператора отображениями этого класса построена теория степени. Данная теория содержит теорию степени уплотняющих векторных полей, построению, исследованию и приложению которой посвящены работы воронежских ученых М. А. Красносельского, Б. Н. Садовского, Ю. Г. Борисовича, Ю. И. Сапронова, М. И. Каменского и многих других математиков. В последнем параграфе изложена теория степени многозначных отображений, представляющих возмущение тождественного отображения многозначными компактными операторами с выпуклыми образами. В построении этой теории наряду с польскими участниками и воронежские математики: Ю. Г. Борисович, В. В. Обуховский, Б. Д. Гельман, автор данной рецензии и многие другие специалисты нелинейного анализа.

Заканчивается книга приложением, в котором представлено дифференциальное исчисление для отображений бесконечномерных пространств, в частности, изложены важные для нелинейного анализа теоремы об обратном отображении и неявных операторах.

Книга написана понятным языком, вполне доступным для студентов 2–4 курсов математических факультетов. Материал учебного пособия связан с исследованиями, проводимыми воронежскими математиками на протяжении многих десятилетий, результаты которых хорошо известны во всем мире.

Резюмируя сказанное, отметим, что книга В. Г. Звягина «Введение в топологические методы нелинейного анализа» является хорошим введением в рассматриваемый круг вопросов и вполне доступна студентам младших курсов математических факультетов.

*Воронежский государственный университет  
Гликлик Ю. Е., доктор физико-математических наук, профессор  
Тел.: 8 (473) 220-84-60*

*Voronezh State University  
Gliklikh Yu. Ye., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor  
Tel.: 8 (473) 220-84-60*