Курицын Ю. Г.

Проблема выбора с точки зрения технической надежности

Поразительно большое число вопросов общественной, административной, хозяйственной, научной и др. деятельности требуют ответы в виде «да» или «нет». Виновен ли подсудимый или нет, следует ли удовлетворять данную просьбу посетителя или нет, верна ли предлагаемая теория или ложна, следует ли вкладывать средства в данное дело или нет, следует ли участвовать в данной акции или нет? Вот примеры вопросов, требующие бинарный ответ в виде «да» или «нет». И человек, коллектив, некая структура или в целом общество отвечает на поставленные вопросы, выбирая один из двух ответов. Ниже нас будет интересовать выбор ответа на подробные вопросы с точки зрения технической надежности, допускающей возможность ошибки в различных ситуациях.

В основном, нас будет интересовать проблема группового выбора, когда вместе с ответами индивидуумов (элементов) присутствует некоторое правило согласования (структура), вырабатывающая общий ответ группы. Среди упомянутых структур естественно выделить «демократические», в которых мнение каждого индивидуума имеет одинаковый вес, оставив за остальными структурами название «иерархических». Очевидно, что последнее имя используется в самом широком смысле.

Перечислим основные допущения, в рамках которых будет рассматриваться проблема выбора.

1^0. Как уже отмечалось выше, будем допускать только бинарный ответ «да» ли «нет». Более общую ситуацию мы надеемся исследовать позже.

2^0. Условимся считать, что предлагаемый вопрос имеет истинное решение вида **<u>да</u>** или **<u>нет</u>**. Понимая условность такого допущения, мы ограничимся ситуациями, когда правильный ответ существует и индивидуум или группа (структура) пытается его угадать.

3^0. Будем предполагать, что предлагаемый ответ может быть ошибочным, и ошибки в двух возможных ситуациях имеют вероятностную природу. Такое допущение для многих бюрократических, политических и религиозных структур является крамольным и преследуется самым жестким образом.

Перечисленные выше основные условия связывают непосредственную задачу принятия группового решения с задачами дихотомической надежности, в которых одновременно учитываются два типа отказов, когда дан ответ «нет» в ситуации **<u>да</u>** и ответ “<u>да</u>” в ситуации **<u>нет</u>**. Теория дихотомической надежности была заложена в 50-е годы нашего века Дж. фон Нейманом [1], Муром и Шенноном [2]. Дальнейшее развитие этой теории в основном связано с техническими применениями (см., например, [3, 4, 5]). Мы полагаем, что область применения этих идей существенно шире и надеемся, что наша работа может служить скромным подтверждением тому.

Ответ индивидуума (элемента)

Следуя принятой в дихотомической теории надежности традиции, будет обозначать решение «да»- единицей, а «нет»- нулем. Соответственно, ситуацию истинного **<u>да</u>** будем обозначать **1**, а **нет** – **0.** Теперь можно обозначать вероятность правильного решения в условиях **1** буквой p ($0 \le p \le 1$), а вероятность правильного решения в условиях **0** буквой q ($0 \le q \le 1$). В статистической практике числа 1-p и 1-q являются вероятностями ошибок 1-го и 2-го рода (см. [6]). Назовем пару чисел (p, q) - оперативной характеристикой элемента. В простейших случаях число p - доля правильных ответов элементов и условиях **1**, q - доля правильных ответов того же элемента в условиях **0**.

Пользуясь обычным математическим приемом, изобразим оперативную характеристику элемента точкой в единичном квадрате для данной системы координат, когда горизонтальная ось отвечает ситуации **<u>да</u>**, а вертикальная – **нет**.

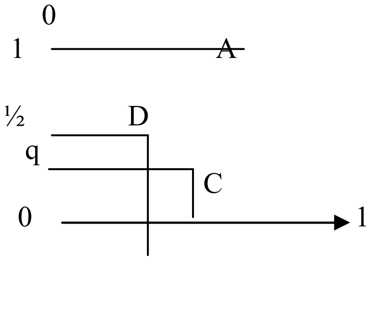

Рис. 1

Так на рис.1 отмечены пять характерных точек: А–оперативная характеристика (1,1) идеального решающего элемента (пророк); О–оперативная характеристика (0,0) антиидеального решающего элемента (антипророка); В–оперативная характеристика (0,1) упертого элемента, всегда говорящего «нет» (отрицатель); С–оперативная характеристика (1,0) упертого элемента, всегда говорящего «да» (соглашатель); D–оперативная характеристика элемента, отвечающего с помощью жребия.

Аналогично можно изобразить областями квадрата типичные ситуации.

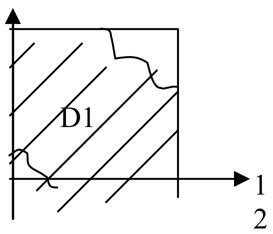

Рис. 2

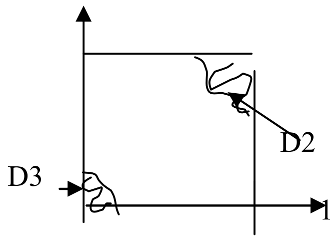

Рис. 3

На рисунке 2 изображена область D_1 оперативных характеристик малоинформированных элементов («обыватели»). На рисунке 3 изображены две области: D_2 («эксперты»), D3 («антиэксперты»).

В качестве примеров можно рассмотреть следующее. Элементы рынка с плохой оперативной характеристикой разоряются; сообщества, которые не могут дать правильный ответ на вопрос окружающего – гибнут; теории с плохими характеристиками отмирают. В более конкретной ситуации были бы полезны социологические исследования на предмет выяснения оперативных характеристик индивидуумов для организации суда присяжных.

Ответ группы (структуры)

Рассмотрим группу из n индивидуумов (элементов), обладающих личным мнением по предлагаемому вопросу. Следуя принятому выше подходу, поставим в соответствие мнению 1-ого элемента бинарную переменную $X_i \in \{0, 1\}$ (i=1,..,n). Назовем группу структурой, если она вырабатывает общее мнение с помощью некоторой функции согласования (структурной функции)

$$\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\{0;1\} \qquad (1)$$

Структура φ приводит мнение всех элементов к единому. Обычно это жестко определенная процедура. Примерами могут служить различные формулы голосования в представительных учреждениях.

В дополнение к ограничениям 1^0-3^0 будем предполагать монотонность структурной функции, наблюдаемую во многих практических применениях. К примеру, все обычные процедуры голосования обладают свойствами монотонности.

Теперь обратимся к природе решений элементов. Следуя вероятностному подходу, который учитывает возможные ошибки, перейдем от фиксированных (неслучайных) ответов $x_1,x_2,..,x_n$ индивидуумов к случайным векторам $\mathbf{X}=(x_1,\ldots,x_n)$ и $\mathbf{Y}=(y_1, y_2,\ldots,y_n)$, представляющим случайные ответы элементов в ситуациях **<u>да</u>** и **<u>нет</u>** соответственно. Если известны законы распределения вероятностей векторов **X** и **Y**, то нетрудно вычислить оперативную характеристику структуры φ. Именно,

$$p_\varphi = M\varphi\ (x_1,x_2,\ldots,x_n),\ \ q_\varphi=M\varphi^D\ (y_1,y_2,\ldots,y_n), \qquad (2)$$

Формулы (2) позволяют сравнивать оперативные характеристики различных форм организации общего мнения группы. Однако, в большинстве практических ситуаций законы распределения случайных векторов **X** и **Y** неизвестны. Исключение составляют по крайней мере два случая, один из которых классический, когда индивидуумы принимают решения независимо друг от друга. В этом случае компоненты случайных векторов **X** и **Y** стохастически независимы и законы распределения определяются лишь оперативными характеристиками (p_i, q_i) (i=1,..,n) элементов.

Пример 1. Рассмотрим процедуру голосования на основе консенсуса. Используя обычные логические знаки $\wedge$ - «и», $\vee$ - «или», легко представить структурную функцию $\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_1\wedge x_2\wedge\dots\wedge x_n$. Нетрудно проверить, что оперативная характеристика такой структуры имеет вид:

$$\prod_{i=1}^{n} p_i, 1-\prod_{i=1}^{n}(1-q_i)$$

В частности, если n=10, p=q=0,95, то оперативная характеристика такой структуры имеет вид $(0{,}35;1\text{-}10^{-11})$. Отсюда легко заключить, что если даже элементы в нашей терминологии являются «экспертами», то все равно оперативная характеристика приближается к характеристике «упертой» структуры типа (0,1). Интуитивно это очевидный факт. Слишком часто такая структура говорит «нет».

Второй случай допускает зависимость специального вида между ответами индивидуумов, когда некоторая группа элементов кооперируется и принимает единое решение. Такая ситуация в задачах технической надежности не естественна, но в социальных, экономических и политических приложениях, когда элемент обладает свободой воли, представляет существенный интерес. По нашим сведениям такой вариант мало изучен. Нас будет интересовать с точки зрения контроля кооперативной группы над всей структурой.

«Демократические структуры»

Рассмотрим структуры, в которых мнение каждого элемента одинаково важно. С формальной точки зрения такое свойство функции φ можно определить, если ввести показатель структурной важности для каждого из элементов (см. [4])

$$I(i)=\frac{1}{2^{(n-1)}}\sum\nolimits_{\mathbf{X}}(\varphi(\mathbf{X},1_i)-\varphi(\mathbf{X},0_i))\ (i=1,\dots,n)$$

где $(\mathbf{X}, 1_i)=(x_1,x_2,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n)$,
а $(\mathbf{X}, 0_i)=(x_1,x_2,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n)$.
Ясно, что показатель структурной важности i-го элемента в структуре φ представляет относительную долю раскладов мнений всех элементов, когда изменение мнения данного элемента приводит к изменению общего мнения.
Теперь «демократичность» структуры φ можно определить равенством

$$I(1)=I(2)=\dots=I(n) \tag{4}$$

Пример 2. В теории технической надежности хорошо известны структуры “k из n”, которые решение «да» принимают лишь в случае, когда, по крайней мере, k элементов из n говорят «да». Очевидно, что эти структуры прямого демократического голосования. С формальной точки зрения структурная важность каждого из элементов такой структуры равна $C_n^k/2^{n-1}$ и условие (4) выполняется.

Нам неизвестно полное описание класса «демократических» структур. Неизвестно даже число «демократических» структур для $n\geq5$. Ясно, что в этот класс входят не только структуры типа “k из n”, что видно из следующего примера.

Пример 3. Пусть $\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1\wedge x_2)\vee(x_3\wedge x_4)$. Нетрудно проверить, что такая структура является «демократической». В практических задачах подобные структуры аналогичны способам многоступенчатого выбора.

Обратимся к некоторым свойствам демократических структур. В случае, когда индивидуумы принимают решение независимо друг от друга и приблизительно одинаково информированы, т.е. имеют одну и ту же оперативную характеристику (p,q) компоненты оперативной характеристики $(p_\varphi(p), q_\varphi(q))$ многих монотонных структур обладают свойством S–образности (см. пример, [4]). Это свойство означает, что оперативная характеристика такой структуры равномерно лучше оперативной характеристики ее элементов, когда они хорошо информированы. В частности, для самодвойственных $(\varphi\equiv\varphi^D)$ демократических структур условие хорошей информированности можно заменить условием $p,q>1/2$.

Пример 4. Рассмотрим структуру «11 из 21» в условии, когда ее элементы принимают решение независимо друг от друга с общей оперативной характеристикой (0,65; 0,65). Пользуясь стандартными приемами, можно вычислить оперативную характеристику такой структуры. Она равна (0,9; 0,9).

Таким образом, в указанных условиях данная структура переводит «обывательское» решение почти в «экспертное». Возможно, что это обстоятельство является одним из оснований широкого распространения суда присяжных в демократическом мире. Это замечательное свойство демократических структур оборачивается полной противоположностью в случае, когда информированность индивидуумов резко отличается. Очевидно, что в «демократических» структурах типа “k из n” за счет осреднения мнения хорошо информированных элементов стирается и ее оперативная характеристика может быть существенно хуже оперативных характеристик некоторых ее элементов. В этом случае демократические структуры можно считать консервативными, то есть сохраняющими общий уровень информированности.

Теперь остановимся на свойстве контролируемости монотонной структуры. Если часть индивидуумов образует коалицию и предъявляет солидарное решение, то различные структуры реагируют на это обстоятельство по-разному. Будем говорить, что коалиция элементов $i_1,i_2,\dots,i_m$ $(1\le i_1<i_2<\dots<i_m\le i_n)$ контролирует решение «да», если $\varphi(\mathbf{X},1_{i1},1_{i2},\dots,1_{im})\equiv 1$ для всех $\mathbf{X}$. Аналогично, коалиция $j_1,j_2,\dots,j_s$ $(1\le j_1<j_2<\dots<j_s\le n)$ контролирует решение «нет», если φ^D $(\mathbf{X},1_{j1},1_{j2},\dots 1_{js})\equiv 0$ для всех $\mathbf{X}$. В случае, когда такая коалиция контролирует оба решения, естественно говорить о полном контроле над структурой. Если обозначить оперативную характеристику контролирующей коалиции (p_0,q_0), то хорошо, если она близка к «пророческой» и ужасно, если она почти случайна.

Одним из основных свойств демократических структур является плохая контролируемость со стороны небольших коалиций. Так нетрудно проверить, что структуры “k из n” допускают полный контроль только лишь, если число элементов коалиции не меньше $\max\{k,n-k+1\}$. В частности, структуры “1 из n” и “n из n” вообще не контролируемы со стороны любой коалиции.

Иначе ведут себя «иерархические» структуры. Это отчетливо просматривается в следующем примере.

Пример 5. Рассмотрим структуру

$$\varphi(\mathbf{X})=x_1\wedge(\vee x_i),\ i=2,\dots,n \tag{5}$$

В ней структурная важность первого элемента $I(1)=1-1/2^{n-1}$, а структурная важность остальных элементов одинакова и равна $I(i)=1/2^{n-1}$ $(i=2,\dots,n)$. Естественно называть первый элемент здесь «иерархом». Почти очевидно, что мнение всей структуры практически совпадает с мнением первого элемента, если число остальных достаточно велико. Тем самым, оперативная характеристика такой структуры мало отличается от оперативной характеристики «иерарха». Кроме того, полный контроль над такой структурой осуществляется двумя элементами, один из которых – первый.

ВЫВОДЫ

Простые модели дихотомической надежности позволяют смотреть на многие, в том числе и социальные явления под особым углом зрения. Так, для хорошего функционирования «демократической» структуры необходимы: хорошая общая информированность; независимость принятия решений; ответственность в принятии решения. В то время, как для «иерархических» структур, основную роль играет информированность верхнего слоя и ответственность в принятии решений. Независимость принятия решения всеми элементами здесь вторична.

Понимая наивность такого взгляда, мы сошлемся на чрезвычайную сложность подобных явлений, для которых, по мнению многих авторов (см. например [7,8]) возможны лишь локальные модели, объясняющие поведение таких структур лишь в ограниченном числе качеств. С этой точки зрения модели дихотомической надежности позволяют статистическими методами исследовать основные свойства существующих структур, с помощью математического моделирования предсказывать поведение некоторых структур, а также синтезировать структуры, обладающие в данных условиях хорошими, с точки зрения надежности, свойствами. Возможно, что такой подход позволит хотя бы немного уменьшить потери общества от плохого функционирования и даже краха некоторых структур, что мы наблюдаем в последнее время слишком часто. Надеюсь, что эти размышления окажутся полезными для студентов нашего института.

Литература

1. von Neumann J. Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components // Automatic Studies, Annals of Math. Studies. – Princeton University Press, 1956/ - №34. – P.43-98.

2. Мур Е., Шеннон К. Надежные схемы из надежных реле / В книге К. Шеннона «Работы по теории информации и кибернетики» пер. с англ. под ред. Р.Л. Добрушина и О.Б.Лупанова. – М.: ИЛ, - 1963. – с.115-153

3. Birnbaum Z.W., Esary J.D. and Sannders S.C. Multicomponent systems and structures and theiz reliability / Technometrics. v.3, №1. – P. 55-77.

4. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. Пер. с англ. – М.: Сов. Радио, 1965. – 485с.

5. Барлоу Р., Прошан Ф. Статистическая теория надежности и испытания на безотказность. Пер. с англ., - М.: Наука, 1994. – 327с.

6. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648с.

7. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. Пер. с англ. – М.: Наука, 1970. – 820с.

8. Касти Дж. Большие системы. Связность, сложность и катастрофы. Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 216с.