УДК 330.42

КОАЛИЦИОННО УСТОЙЧИВЫЕ РАЗБИЕНИЯ НА ЮРИСДИКЦИИ ПРИ МОНОТОННО УБЫВАЮЩЕЙ ПЛОТНОСТИ НАСЕЛЕНИЯ*

Ш. Вебер[1], Д. В. Мусатов[1,2], А. В. Савватеев[1,2,3], А. Б. Шаповал[4,1]

[1]Российская экономическая школа

[2]Московский физико-технический институт

[3]Университет им. Дмитрия Пожарского

[4]Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

Поступила в редакцию 17 октября 2017 г.

Аннотация: *какой размер группы (клуба, партии, юрисдикции и т.д.) оптимален при разбиении большого сообщества? С одной стороны, экономия на общих издержках делает выгодными большие группы, с другой – маленькие группы более однородны. Всегда ли эти силы уравновесят друг друга? В статье анализируется коалиционная устойчивость в одномерной модели с размещением общественного блага в медиане и индивидуальными транспортными издержками. В отличие от общего случая, при монотонно и «плавно» убывающей плотности населения на полуоси устойчивое разбиение всегда есть. Более того, пример такого разбиения строится конструктивно. Введенное условие «плавного» убывания влечет условие однократного пересечения и обеспечивает устойчивость конструкции. Вопрос о монотонной плотности на отрезке или «неплавно» убывающей плотности на полуоси пока открыт. Для текущей конструкции построены контрпримеры, но нет и общего опровержения.*

Ключевые слова: *коалиционная устойчивость, разбиение на юрисдикции, линейный мир, условие однократного пересечения*

Abstract: *what size of a group (club, party, jurisdiction etc.) is optimal when a large society partitions itself into smaller entities? On the one hand, in a large group fixed cost is split among greater number of agents. On the other hand, small groups are more homogeneous. Do these forces always balance each other? Our paper studies unidimensional model with median public good location and individual transportation costs. Unlike the general case, under monotonically and "smoothly" decreasing population density on a half-line a stable partition does always exist. Moreover, one such partition is constructed explicitly. The condition of "smooth" decreasing implies a single-crossing condition that guarantees the stability of our construction. However, the question about monotone density on a segment or "non-smoothly" decreasing density on a half-line is open. There are counterexamples to the current construction, but there is no general refutation.*

Key words: *coalitional stability, jurisdiction partition, linear world, single-crossing condition*

Во многих ситуациях группе экономических агентов нужно каким-то образом разбиться на подгруппы для поставки некоторого клубного блага внутри каждой подгруппы. Агенты в группе отличаются разнообразием, поэтому возникают две противоборствующие силы. С одной стороны, чем больше группа, тем меньше расходы на клубное благо для каждого из членов группы. С другой стороны, чем меньше группа, тем она однороднее и тем точнее клубное благо может удовлетворить потребности. Приведем три истории, в каждой из которых возникают эти две силы.

История первая, географическая. Пусть агенты отличаются друг от друга исключительно местом жительства, а клубное благо должно быть расположено в некоторой конкретной точке. В качестве блага можно рассмотреть какой-либо объект инфраструктуры: школу, поликлинику, спортивный центр, специализированный магазин, районную администрацию или, например, прорубь для зим-

* Работа выполнена в Лаборатории исследования социальных отношений и многообразия общества РЭШ при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, грант Правительства РФ, договор № 14.U04.31.0002.

него купания. Для простоты будем считать, что насыщения мощности не происходит: любое число агентов может быть обслужено в одной точке. В таком случае – чем больше клуб, тем меньше расходы каждого члена на его содержание. Эти расходы могут финансироваться из налогов (для школы), быть включены в цену товаров (для магазина) или быть возложены непосредственно на агента (замерзшую прорубь надо сначала разбить). С другой стороны, чем больше клуб, тем дольше приходится добираться до блага дальним агентам. Например, в некоторых регионах России строятся новые районы высотной застройки на границе с областным центром, но формально на территории сельского района. В результате жителям приходится ездить в далекий райцентр по любым бюрократическим, а часто и медицинским надобностям. Во многих случаях проблема решается расширением территории основного города (особенно если в результате население превысит миллион человек), но иногда сам город может быть против, не желая взваливать на себя дополнительную социальную и инфраструктурную нагрузку.

История вторая, политическая. Перейдем от реального физического пространства к виртуальному пространству политических убеждений. Агенты в данном случае являются политиками, имеющими некоторые убеждения по ряду вопросов. Исследования показывают, что обычно ответы на различные вопросы связаны между собой, а потому убеждения можно задать либо точкой на отрезке (левые–центристы–правые), либо точкой в квадрате (отдельно разделяются воззрения по экономическим и собственно политическим вопросам). Если политики объединяются в партию, то эта партия вырабатывает программу, которая может не совпасть в точности с позицией ни одного ее члена. Тем не менее большие партии выгодны: во-первых, меньше удельные расходы на аппарат, во-вторых, больше шансов выиграть выборы. С другой стороны, чем больше партия, тем больше в ней внутренних противоречий и тем сильнее неудовольствие от разницы между личной и партийной позициями.

История третья, потребительская. Перейдем к другому виртуальному пространству – пространству потребительских характеристик некоторого товара. В качестве товара с одной характеристикой можно рассмотреть дальние лыжные прогулки по свежему снегу. У каждого лыжника есть своя идеальная продолжительность прогулки, но большой группой идти проще: каждому участнику приходится меньше прокладывать лыжню. Чем больше группа, тем проще «тропить», но тем сильнее отличие реальной продолжительности от идеальной.

Возникает естественный вопрос: всегда ли эти противоборствующие силы могут прийти в равновесие и в каком смысле? Оказывается, ответ существенно зависит от деталей модели. Во-первых, равновесие можно понимать одним из трех способов: либо ищется максимум суммарной полезности, либо – равновесие по Нэшу, в котором ни один агент не имеет стимулов в одиночку перейти в другую группу, либо – коалиционное равновесие, в котором никакая группа агентов не имеет стимулов выделиться. Во-вторых, до сих пор ничего не было сказано про выбор точки поставки клубного блага и распределение издержек на эту поставку. В любом случае точка выбирается в медиане группы: это минимизирует суммарные затраты, а на прямой также является победителем по Кондорсе. Но распределять издержки можно тремя способами. Самый простой: ничего не перераспределяется, т. е. фиксированные затраты делятся поровну на всех, а транспортные издержки каждый агент несет сам. Самый справедливый – роулсов: затраты перераспределяются так, что суммарные затраты каждого агента в юрисдикции одинаковы. Наконец, можно никак не задавать способ дележа, но тогда и в потенциально выделяющейся коалиции он никак заранее не задан. В-третьих, нужно специфицировать плотность расселения агентов. Если рассматривать одномерную модель, это также можно сделать тремя способами: либо расселение задано абсолютно непрерывной функцией с некоторой плотностью, либо конечное число агентов расселено в некоторых точках, либо агенты сосредоточены в отдельных точках, но в каждой точке агентов континуум. Эти три трихотомии задают «кубик Рубика» из 27 вариантов модели.

Впервые подобная модель разделения на юрисдикции была рассмотрена в работе Алесины и Сполаоре [1]. Многие варианты модели проанализированы в диссертации третьего автора [2]. В настоящей работе мы изучаем один из маленьких «кубиков», а именно: жители распределены на отрезке или положительной полуоси абсолютно непрерывно; более того, плотность населения монотонно убывает. Изучается коалиционная устойчивость, при этом перераспределения издержек внутри юрисдикции не происходит. Основной результат работы такой.

Теорема. При непрерывном распределении с монотонно и «плавно» убывающей и отделенной от нуля плотностью коалиционно устойчивое разбиение на юрисдикции всегда существует.

Данная теорема доказывается конструктивно, а именно: каждый раз для крайнего агента выбирается оптимальная для него юрисдикция. Такое разбиение оказывается устойчивым. На отрезке или без условия «плавности» такая конструкция не работает, поэтому вопрос о существовании устойчивого разбиения на отрезке остается открытым.

Модель. В этом разделе мы формально опишем используемую модель. Будем считать, что задан линейный мир Ω, который может быть либо отрезком $[0,1]$, либо положительной полуосью $[0,+\infty)$. На множестве Ω определена абсолютно непрерывная мера, заданная плотностью $f > 0$. Таким образом, население множества (коалиции, группы, юрисдикции, клуба) S равняется $\int_S f(x)dx$. Население всего мира в случае отрезка всегда конечно, а в случае полуоси может быть как конечным, так и бесконечным.

Если образовалась коалиция S, то она размещает клубное благо в медиане $med(S)$, т. е. такой точке m, что население части S левее m равняется населению части S правее m. Издержки на поставку клубного блага составляют g и распределяются равномерно среди всех участников коалиции. Для простоты выкладок мы будем предполагать $g = 1$, в противном случае можно перенормировать единицы измерения. Также участник, живущий в точке x, несет транспортные издержки $t(|x-m|)$ на перемещение к благу и обратно. Мы будем считать, что издержки равномерны, т. е. равны $|x-m|$. Таким образом, агент, живущий в точке x и приписанный к коалиции S, несет следующие издержки:

$$C(x,S) = \frac{1}{\int_S f(x)dx} + |x - med(S)|.$$

Мы предполагаем, что агент обязательно должен быть приписан к какой-либо коалиции, иначе он получает бесконечно отрицательную полезность. Нас интересует вопрос коалиционной устойчивости: можно ли разбить весь мир на коалиции так, чтобы никакая новая коалиция не могла выделиться из сформированной структуры (подробнее о концепции см. [3]). Можно рассмотреть три основных типа выделения из структуры. Во-первых, несколько коалиций могут слиться воедино, если выгоды от меньших затрат на клубное благо перевесят рост транспортных издержек. Примером может служить ряд объединений регионов в России в 2000-е годы. Во-вторых, некоторая подкоалиция может отделиться от большой коалиции, если уменьшение транспортных издержек перевесит увеличение затрат. Примером может служить множество сепаратистских движений по всему миру, из которых наиболее актуальным на момент написания статьи является ситуация в Каталонии. В-третьих, новая коалиция может образоваться на границе двух старых. Примером может служить баскский (и тот же каталонский) сепаратизм или, например, успех новой центристской партии «Вперед!» на парламентских выборах 2017 г. во Франции. Подобные действия успешны только в том случае, если все участники новой коалиции согласны с изменением структуры. (Например, коммуна Валь д'Аран рассматривает возможность выйти из состава гипотетической независимой Каталонии и присоединиться к Арагону. Впрочем, каталонских сепаратистов это не останавливает). Иными словами, для устойчивости в любой потенциально выделяющейся коалиции должен найтись агент, которому это выделение невыгодно. Формально нужно представить $\Omega = S_1 \sqcup S_2 \sqcup \cdots \sqcup S_n$ (возможны пересечения нулевой меры), так чтобы для любой коалиции T нашелся $x \in T$, такой что $C(x,T) \geq C(x,S_i)$ для $S_i \ni x$.

Существование коалиционно устойчивых разбиений на полуоси

В общем случае коалиционно устойчивых разбиений может не быть. В работах [4; 5] приведены контрпримеры в дискретной модели, но их легко обобщить и на непрерывную модель. Мы анализируем случаи монотонно убывающей плотности на полуоси и на отрезке.

Теорема. Пусть плотность населения f на $\Omega = [0, +\infty)$ строго положительна, непрерывна, нестрого убывает и удовлетворяет условию «плавного» убывания $|f'(x)| < 2\sqrt{2} f(x)^{3/2}$. Тогда существует разбиение Ω на юрисдикции, устойчивое в коалиционном смысле. Более того, эти юрисдикции связны, т. е. представляют собой отрезки.

Конструкция и идея доказательства. Теорема доказывается при помощи явной конструкции. Сначала образуется коалиция $[0, x_1]$, оптимальная для агента в точке 0. Затем образуется коалиция $[x_1, x_2]$, оптимальная для агента в точке x_1, и так далее. Мы доказываем, во-первых, что такой процесс приведет к разбиению всей полупрямой на отрезки. Во-вторых, в любой коалиции T, которая потенциально может отделиться, самый левый агент z проиграет от отделения. В частности, если этот агент принадлежит коалиции $[x_i, x_{i+1}]$ и расположен слева от ее медианы, то из-за убывания плотности его издержки в T выше, чем издержки агента x_i в коалиции $[x_i, x_{i+1}]$, а те, в свою очередь, выше, чем издержки агента z в коалиции $[x_i, x_{i+1}]$. Если z лежит правее медианы, то требуется специфичное рассуждение.

Удобное переобозначение. Наше рассуждение получится более простым, если перейти от равномерных транспортных издержек к равномерной плотности населения. Для этого нужно заменить переменную x на переменную y так, чтобы было выполнено равенство $\int_0^x f(v)dv = y$. После такой замены транспортные издержки уже не будут выражаться функцией от расстояния, но по-прежнему будут симметричными. А именно, издержки от транспортировки между y_1 и y_2 будут равны $|T(y_1) - T(y_2)|$, где $T(y)$ равно такому x, что $\int_0^x f(t)dt = y$. По теореме о производной обратной функции $T'(y) = \frac{1}{\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt} = \frac{1}{f(x)}$. Поскольку $f(x)$ монотонно убывает, получаем, что $t(y) = T'(y)$ монотонно возрастает, а $T(y)$ есть выпуклая функция. Если общее население бесконечно, то по-прежнему $\Omega = [0, +\infty)$. Если же оно конечно, то теперь $\Omega = [0, M)$.

Посмотрим, во что перейдет наше условие плавного убывания. Заметим, что из $t(y) = \frac{1}{f(x)}$ следует, что $t'(y) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2} \cdot \frac{dx}{dy}$. Мы уже выяснили, что $\frac{dy}{dx} = f(x)$, так что $t'(y) = -\frac{f'(x)}{f(x)^3}$. По условию плавного убывания имеем $|f'(x)| < 2\sqrt{2} f(x)^{3/2}$. Поскольку $f' < 0$, получаем $-f'(x) < 2\sqrt{2} f(x)^{3/2}$. Значит, $t'(y) < 2\sqrt{2} f(x)^{-3/2} = 2\sqrt{2} t(y)^{3/2}$. Таким образом, транспортные издержки «плавно» возрастают. Точный смысл этого условия станет ясен в процессе доказательства.

Условие первого порядка. Рассмотрим издержки агента, расположенного в точке 0, вошедшего в коалицию $[0, 2y]$. В силу равномерности плотности населения монетарные издержки составляют $\frac{1}{2y}$, медиана расположена в точке y, а транспортные издержки равны $T(y)$. Получаем общие издержки $\frac{1}{2y} + T(y)$. Условие первого порядка для минимизации выглядят как $t(y) = \frac{1}{2y^2}$. Оно заведомо выполнено ровно в одной точке: правая часть монотонно убывает и стремится к нулю, а левая часть монотонно возрастает и либо определена для всех точек (при бесконечном общем населении), либо стремится к бесконечности (при конечном общем населении). Аналогичные условия первого порядка можно выписать для агента в точке z. Он несет минимальные издержки в юрисдикции $[z, z + 2r]$, где r задается условием первого порядка $t(z + r) = \frac{1}{2r^2}$, которое выполнено ровно в одной точке.

Интерпретация условия «плавности». Оказывается, из нашего условия плавности можно вывести такое следствие: юрисдикция $[z, z + 2r]$ оптимальна не только для агента a среди всех юрисдикций, где z на левом конце, но и для агента $z + 2r$ среди всех юрисдикций, где $z + 2r$ на правом конце. Действительно, его издержки в юрисдикции длины $2s$ равны $\frac{1}{2s} + T(z + 2r) - T(z + 2r - s)$. Условие первого порядка будет таким: $\frac{1}{2s^2} = t(z + 2r - s)$. Оно будет заведомо выполнено при $s = r$. Докажем, что из условия плавности следует условие однократного пересечения, и потому других точек, где выполнено условие первого порядка, нет. Действительно, производная правой части равна $-t'(z + 2r - s)$, а левой $-\frac{1}{s^3}$. Имеем $-t'(z + 2r - s) > -2\sqrt{2} t(z + 2r - s)^{\frac{3}{2}} = -2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2s^2}\right)^{3/2} = -\frac{1}{s^3}$. Здесь неравенство взято из условия плавности, а первое равенство – из условия первого порядка. Значит, в окрестности любой точки пересечения правая часть сначала ниже левой, а потом выше. Значит, точка пересечения ровно одна, а именно: $s = r$, и именно там расположен оптимум.

Обоснование корректности конструкции. Итак, мы образуем юрисдикции $[y_i, y_{i+1}]$, где $y_0 = 0$, а $y_{i+1} = y_i + 2r(y_i)$, где $r(y)$ есть решение уравнения $t(y + r(y)) = \frac{1}{2r(y)^2}$. Ясно, что $r(y)$ есть непрерывная возрастающая функция (здесь используется непрерывность f и, как следствие, t). Докажем, что эти юрисдикции дают в объединении весь мир. Действительно, в любом случае последовательность y_i монотонно возрастает. Значит, у нее есть предельная точка $\hat{y}$. Если $\hat{y}$ оказалась внутри Ω, то определено $r(\hat{y}) > 0$. Поскольку $y_i \to \hat{y}$, то $y_{i+1} = y_i + 2r(y_i) \to \hat{y}$. Но, с другой стороны, $y_{i+1} \to \hat{y}$. Полученное противоречие доказывает, что $\hat{y}$ находится на краю Ω, и потому весь мир разбит на юрисдикции.

Обоснование устойчивости конструкции. Обозначим через $C(z)$ издержки агента в точке z при построенном разбиении, а через $C^{\min}(z)$ – издержки агента в точке z в оптимальной для него юрисдикции $[z, z + 2r(z)]$. (Напомним, что оптимум берется по тем юрисдикциям, где он находится на левом краю). Мы докажем, что $C^{\min}(z) \geq C(z)$, и потому в любой выходящей юрисдикции самый левый агент заблокирует выделение.

Лемма 1. Функция $C^{\min}(z)$ возрастает.

Доказательство. Действительно, из-за возрастания $t(z)$ издержки самого левого агента в юрисдикции фиксированного размера тем больше, чем правее расположена эта юрисдикция. Значит, и минимальное значение этих издержек будет больше. Лемма доказана.

Из леммы 1 сразу следует, что агент z, расположенный на левой половине отрезка $[y_i, y_{i+1}]$, не захочет отделяться, если после отделения окажется на левом краю. Действительно, для такого агента выполнено $C^{\min}(z) \geq C^{\min}(y_i) = C(y_i) \geq C(z)$. Для агентов, расположенных на правой половине, такое рассуждение уже не сработает: и $C^{\min}(z)$, и $C(z)$ возрастают, причем вторая функция – быстрее. Мы используем специальное рассуждение, чтобы показать, что «запаса», набранного к середине отрезка, хватит.

Лемма 2. Пусть z расположено на отрезке $\left[\frac{y_i + y_{i+1}}{2}, y_{i+1}\right]$. Тогда $C^{\min}(z) \geq C(z)$.

На первый взгляд, кажется, что лемму 2 можно обосновать таким же простым образом, как и лемму 1, а именно, нужное соотношение легко получается для точек, близких к y_{i+1}. Как мы уже выяснили, отрезок $[y_i, y_{i+1}]$ оптимален не только для y_i, но и для y_{i+1}. Но издержки агента y_{i+1} в любой юрисдикции $[y_{i+1} - 2r, y_{i+1}]$ меньше, чем в юрисдикции $[y_{i+1}, y_{i+1} + 2r]$. Значит, то же верно и для оптимальных юрисдикций. Но тогда получаем $C(y_{i+1}) < C^{\min}(y_{i+1})$, что и требовалось. С другой стороны, для середины отрезка мы уже получили $C\left(\frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right) < C^{\min}\left(\frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right)$. Кажется, что посередине соотношение также должно сохраниться, так и было бы, если бы выполнялось неравенство $\frac{d}{dy}C^{\min}(z) < t(z)$. К сожалению, можно построить пример, когда оно не выполняется, именно поэтому нужно отдельное рассуждение.

Доказательство леммы 2. По определению имеем

$$C^{\min}(z) = \frac{1}{2r(z)} + \int\limits_{z}^{z+r(z)} t(x)dx.$$

Поскольку $r(z)$ получено из условия первого порядка, получаем $\frac{1}{2r(z)} = r(z)t(z + r(z))$. Значит,

$$C^{\min}(z) = r(z)t(z + r(z)) + \int\limits_{z}^{z+r(z)} t(x)dx.$$

Аналогично получаем

$$C(z) = \frac{1}{2r(y_i)} + \int\limits_{y_i+r(y_i)}^{z} t(x)dx =$$

$$= r(y_i)t(y_i + r(y_i)) + \int\limits_{y_i+r(y_i)}^{z} t(x)dx.$$

Значит, нам нужно доказать

$$r(z)t(z + r(z)) + \int\limits_{z}^{z+r(z)} t(x)dx \geq r(y_i)t(y_i + r(y_i)) +$$

$$+ \int\limits_{y_i+r(y_i)}^{z} t(x)dx.$$

Данное неравенство мы будем доказывать при помощи графической интерпретации, а именно: $r(z)t(z + r(z))$ является площадью прямоугольника, заданного вершинами $(z, 0)$ и $(z + r(z), t(z + r(z)))$. На рис. 1 это сумма площадей фигур D и E. Интеграл $\int\limits_{z}^{z+r(z)} t(x)dx$ равен площади фигуры D, поэтому левая часть неравенства равна $2D + E$. Аналогично $r(y_i)t(y_i + r(y_i))$ равняется площади прямоугольника $A + C$: его ширина равна $r(y_i)$, а высота равна $t(y_i + r(y_i))$; показанная на рисунке возрастающая кубика есть отражение убывающей кубики $t = \frac{1}{2(y - y_i)^2}$ относительно $y = \frac{y_i + z}{2}$. В свою очередь, интеграл $\int\limits_{y_i+r(y_i)}^{z} t(x)dx$ равен площади фигуры $A + B$. Поэтому требуется доказать, что $2D + E > 2A + B + C$.

Для доказательства неравенства мы отразим D и E относительно прямой $y = z$. В результате $z + r(z)$ перейдет в $z - r(z)$, что может оказаться правее или левее, чем $y_i + r(y_i)$. Полученная в первом случае картина представлена на рис. 2. Второй случай мы рассмотрим чуть позже. Легко видеть, что $2A + B + C = 2U + 2P + V + X + Q$, а $2D + E = 2P + 2Q + 2R + S$. После сокращений получаем: $2D + E > 2A + B + C$ равносильно $Q + 2R + S > 2U + V + X$. Здесь мы второй раз используем условие плавности, точнее, следующее из него условие однократного пересечения.

Дело в том, что фигура X целиком находится ниже кубики, иначе график функции t, ограничивающий X сверху, пересечется с кубикой дважды. Значит, левая

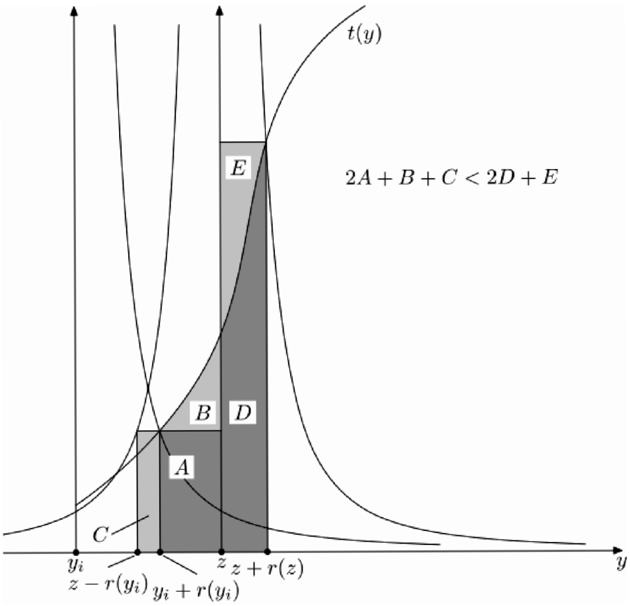

Рис. 1. Графическая интерпретация леммы 2

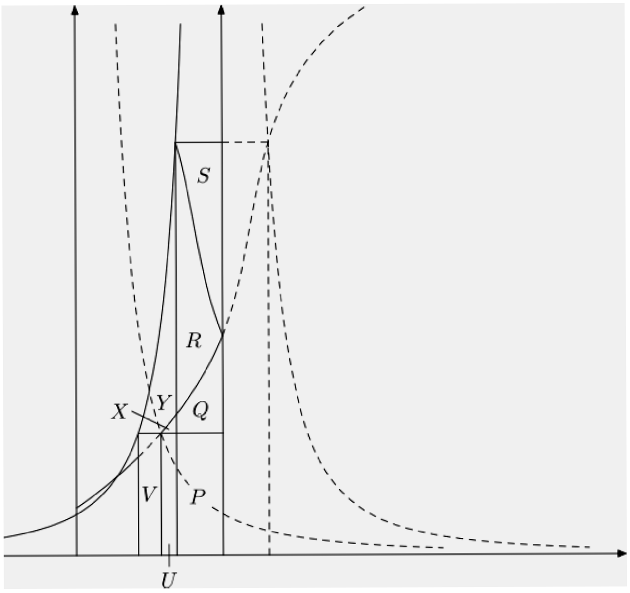

Рис. 2. Иллюстрация к доказательству леммы 2

часть неравенства находится «справа» от кубики, а правая – «снизу». Чтобы сравнить их, нам потребуется следующее утверждение.

Техническая лемма. Пусть точки $A = (x_0, y_0)$ и $B = (x_1, y_1)$ лежат на кубике $x^2y = 1$. Тогда площадь между криволинейным сегментом AB и горизонтальной осью вдвое меньше площади между AB и вертикальной осью.

Доказательство технической леммы. Без ограничения общности $x_0 < x_1$. Первая площадь равна $\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}$. Вторая площадь равна $\int_{y_1}^{y_0} \frac{1}{\sqrt{y}}dy = 2\left(\sqrt{y_0} - \sqrt{y_1}\right) = 2\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}\right)$, что вдвое больше. Лемма доказана.

Заметим, что утверждение технической леммы верно для любой кубики $x^2y = c$, ведь обе площади просто увеличатся в c раз. В нашей ситуации $c = \frac{1}{2}$, и для фигур на рис. 2 выполнено соотношение $2(X + Y + U + V) = X + Y + Q + R + S$. Как следствие, $2U + V + X = Q + R + S - V - Y$. Поскольку все величины положительные, получаем $Q + R + S - \mathrm{V} - \mathrm{Y} < Q + R + S < Q + 2R + S$, откуда следует требуемое соотношение $2U + V + X < Q + 2R + S$.

Второй случай. Картина во втором случае представлена на рис. 3. В этом случае $2A + B + C = 2P + Q + U + V$, а $2D + E = 2P + 2U + 2Q + 2R + S$. Таким образом, требуется доказать неравенство $V < Q + 2R + U + S$. Согласно технической лемме, $2V + 2X = X + Q + R + S$, откуда $V = Q + R + S - X - V < Q + R + S < Q + 2R + U + S$, что и требовалось.

Таким образом, во всех случаях имеет место неравенство $2A + B + C < 2D + E$, что и требовалось для доказательства леммы и основной теоремы.

Если условие плавности не выполнено, то доказательство может не пройти. Действительно, фигура X может частично оказаться выше кубики, эта часть не сократится и в итоге неравенство будет неверным. В следующем разделе мы покажем, что не только доказательство корректности не прохо-

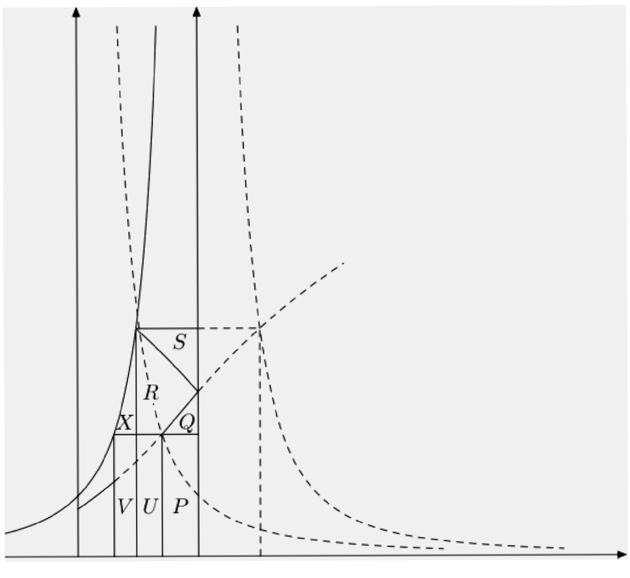

Рис. 3. Второй случай в доказательстве леммы 2

дит, но и вся конструкция может быть некорректной. Мы изложим обоснования для отрезка, но похожая ситуация возникнет для плотности на полуоси, почти целиком сосредоточенной на некотором отрезке.

Коалиционно устойчивые разбиения на отрезке

Наша конструкция существенно опиралась на условия первого порядка. В случае отрезка возможно краевое решение, и это оказывает критическое влияние на рассуждение. Мы показываем, что приведенная нами конструкция не работает, а именно: строится пример, в котором оптимальная коалиция для агента в нуле – это весь отрезок, но при этом в правой части есть коалиция, которой выгодно отделиться. Вопрос о том, можно ли получить коалиционно устойчивое разбиение каким-то другим способом, остается открытым.

Контрпример. Рассмотрим мир $\Omega = [0,10]$ с равномерной плотностью населения и транспортными издержками, заданными формулой

$$t(z) = \begin{cases} 0{,}01, & z \le 6; \\ 1, & z \ge 7; \\ 0{,}01 + 0{,}99(z-6), & z \in (6,7). \end{cases}$$

В этом случае издержки агента 0 в коалиции [0, 2*y*] равны $\frac{1}{2y} + 0{,}01y$ и убывают при $y \in [0,5]$. Значит, оптимальной коалицией для агента 0 является [0, 10], при этом условие первого порядка не выполнено. Однако, например, агент 9 в такой коалиции несет издержки больше 2 (это только транспортные издержки до точки 7). А в коалиции [9, 10] его издержки составляют 1,5. Для агентов $z > 9$ в исходной коалиции издержки будут еще больше, а в [9, 10] не больше. Значит, коалиция [9, 10] захочет отделиться.

Таким образом, в настоящей работе мы распространили результат Алесины–Сполаоре о существовании коалиционно устойчивых разбиений в одномерной модели на широкий класс распределений с монотонно убывающей плотностью. Тем не менее, наша конструкция может не подойти в случае резких скачков плотности, в частности, для распределения на отрезке. Вопрос о существовании устойчивого разбиения в этом случае требует дальнейшего изучения; либо может подойти какая-нибудь другая конструкция, либо можно построить контрпример.

Другое интересное направление исследований – поиск приближенных равновесий. В большинстве примеров конфигураций без устойчивых разбиений выделяющиеся коалиции снижают издержки совсем чуть-чуть. Если потребовать, чтобы для успеха отделения все участники должны были бы снизить издержки, например, на 5 %, то, возможно, равновесие было бы всегда. Здесь развитие может идти по двум направлениям, которые в идеале должны сомкнуться: можно придумывать примеры конфигураций без равновесия для все больших факторов снижения издержек, а можно доказывать существование равновесия для все меньших факторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Alesina A.* On the Number and Size of Nations / A. Alesina, E. Spolaore // Quarterly Journal of Economics. – 1997. – Vol. 112. – P. 1027–1056.

2. *Савватеев А. В.* Задача многомерного размещения и ее приложения: теоретико-игровой подход : дисс. д-ра физ.-мат. наук / А. В. Савватеев. – М. : ЦЭМИ, 2013.

3. *Aumann R. J.* Cooperative games with coalition structure / R. J. Aumann, J. H. Drize // International Journal of Game Theory. – 1974. – Vol. 3. – P. 217–237.

4. *Bogomolnaia A.* Stability Under Unanimous Concent, Free mobility and Core / A. Bogomolnaia, M. Le Breton, A. Savvateev, S. Weber // International Journal of Game Theory. – 2007. – Vol. 35, no. 2. – P. 185–204.

5. *Savvateev A.* Uni-dimensional models of coalition formation: non-existence of stable partitions / A. Savvateev // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. – 2012. – Vol. 2, no. 4. – P. 49–62.

Вебер Ш., PhD по математической экономике
Российская экономическая школа, ректор, научный руководитель ЛИСОМО РЭШ
E-mail: sweber@nes.ru

Weber Sh., PhD in Mathematical Economics
New Economic School, Rector, Academic Director of NES CSDSI
E-mail: sweber@nes.ru

Мусатов Д. В., кандидат физико-математических наук
Московский физико-технический институт (государственный университет), доцент кафедры дискретной математики
Российская экономическая школа, ЛИСОМО РЭШ, научный сотрудник
E-mail: musatych@gmail.com

Савватеев А. В., доктор физико-математических наук
Университет Дмитрия Пожарского, ректор
Московский физико-технический институт (государственный университет), кафедра дискретной математики
Российская экономическая школа, ЛИСОМО РЭШ, ведущий научный сотрудник
Кавказский Математический Центр, научный руководитель
ЦЭМИ РАН, ведущий научный сотрудник
E-mail: hibiny@mail.ru

Шаповал А. Б., доктор физико-математических наук
Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, профессор
Российская экономическая школа, ЛИСОМО РЭШ, ведущий научный сотрудник
E-mail: abshapoval@gmail.com

Musatov D. V., Candidate of Physico-Mathematical Sciences
Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Chair of Discrete Mathematics, Associate Professor
New Economic School, Researcher
E-mail: musatych@gmail.com

Savvateev A. V., Doctor of Physico-Mathematical Sciences
The Dmitry Pozharskiy University, Rector
Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Department of Discrete Mathematics
New Economic School, NES CSDSI, Leading Researcher
Caucasian Matematical Center, Academic Director
CEMI RAS, Leading Researcher
E-mail: hibiny@mail.ru

Shapoval A. D., Doctor of Physico-Mathematical Sciences
National Research University Higher School of Economics, Professor
New Economic School, NES CSDSI, Leading Researcher
E-mail: abshapoval@gmail.com