

---

---

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА И УПРАВЛЕНИЯ

---

---

УДК 517.97 : 532.526

## АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ЛИНЕЙНО ВОЗРАСТАЮЩЕГО ВДУВА И ЛИНЕЙНО УБЫВАЮЩЕГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ФАКТОРА НА ПАРАМЕТРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ЛОКАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕПЛОМАССОБМЕНА И ТРЕНИЯ НА ПРОНИЦАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ГЛА

Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко

*Казанский национальный исследовательский технический университет  
(КНИТУ - КАИ) им. А. Н. Туполева*

Поступила в редакцию 23.09.2019 г.

**Аннотация.** Исследуются свойства математической модели управления тепломассообменом и трением в ламинарном пограничном слое на проницаемых цилиндрических и сферических поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. Рассмотрен случай применения на всём участке управления сочетания линейно возрастающего вдува, линейно убывающего температурного фактора и постоянного магнитного поля. Получены зависимости параметров математической модели и локальных характеристик тепломассообмена и трения от управляющих воздействий. Приведены результаты вычислительных экспериментов. **Ключевые слова:** управление, тепломассообмен, ламинарный пограничный слой, гиперзвуковые течения, проницаемые поверхности, линейно возрастающий вдув, линейно убывающий температурный фактор, параметры математической модели, локальные характеристики тепломассообмена и трения.

### ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является расширенным вариантом материалов докладов, представленных на LXXII научную конференцию «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения-2019» [1] и XII Международную научную конференцию «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий» (ПМТУКТ-2019) [2].

В ней продолжается исследование свойств математической модели ламинарного пограничного слоя (ЛПС) электропроводящего газа на проницаемых цилиндрических и сферических поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА) [4–9] из [3] – рассматри-

вается влияние (на всём участке управления [10] из [3]) следующего сочетания управляющих воздействий: **линейно возрастающего вдува, линейно убывающего температурного фактора и постоянного магнитного поля:**

- 1) на параметры математической модели ЛПС  $\theta_0(x)$ ,  $\theta_1(x)$ ,  $\omega_0(x)$ ,  $\omega_1(x)$ ;
- 2) на локальные характеристики тепломассообмена и трения  $q(x)$ ,  $f(x)$ .

Являясь продолжением [3], данная статья сохраняет введённые в ней обозначения.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Прямая задача (1) [3] (с диапазонами изменения *неизменяемых параметров* (2)–(4) [3] и диапазонами изменения *управляющих параметров* (5)–(7) [3]) рассматривается для **линейно возрастающих вдувов** (8) [3] и **линейно убывающих температурных факторов** (9) [3].

---

© Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г., 2019

Вычислительные эксперименты (аналогично рассмотренным в [3]) выполнены для воздуха в атмосфере Земли при  $H = 10$  [км],  $M_\infty = 10$ ,  $R = 0,1$  [м].

На левой половине рис. 1 представлены линейно возрастающие ( $m_0 < m_1$ ) вдувы (8) [3] с  $m_0, m_1 \in M_{25}^d$ ; на правой половине – линейно убывающие ( $\tau_0 > \tau_1$ ) температурные факторы (9) [3] с  $\tau_0, \tau_1 \in T_{15}^d$  (см. (11), (14) [3]), обозначенные с помощью заглавных букв латинского алфавита от “А” до “J” и от “К” до “Y”, соответственно.

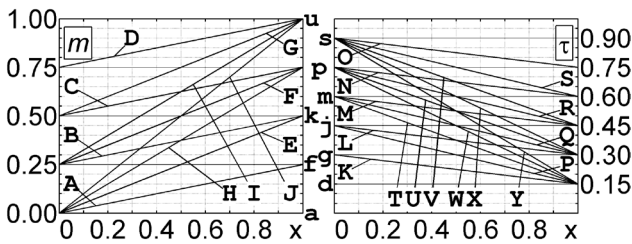


Рис. 1. Законы  $m(x)$  и  $\tau(x)$

Результаты вычислительных экспериментов при  $(m_1 - m_0) \in M_{25}^d$  и  $(\tau_0 - \tau_1) \in T_{15}^d$  (см. (12), (15) [3]) для  $\theta_0, \dots, \omega_1$  представлены на рис. 2-10, для  $q(x), f(x)$  – на рис. 11–19. Распределение случаев сочетания законов управления по рисункам указано в табл. 1 [3].

## 2. ВЛИЯНИЕ НА ПАРАМЕТРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

**Утверждение 1.** В условиях (2)–(7) [3] для  $k \in \{0; 1\}$  и любой постоянной  $s \equiv C \in S^c$  в случае применения (8), (9) [3] для любых  $\underline{m}_0, \underline{m}_1, \underline{\tau}_0, \underline{\tau}_1 \in T^c$  если

$$\underline{m}_0 \leq \underline{m}_1, \quad \overline{m}_0 \leq \overline{m}_1, \quad (1)$$

$$\underline{\tau}_0 \geq \underline{\tau}_1, \quad \overline{\tau}_0 \geq \overline{\tau}_1 \quad (2)$$

и выполнены условия (18), (19) [3] подчинения параметров, то

$$\theta_k(x; m(x; \underline{m}_0, \underline{m}_1), \tau(x; \underline{\tau}_0, \underline{\tau}_1), C) \leq \theta_k(x; m(x; \overline{m}_0, \overline{m}_1), \tau(x; \overline{\tau}_0, \overline{\tau}_1), C), \quad (3)$$

$$\omega_k(x; m(x; \underline{m}_0, \underline{m}_1), \tau(x; \underline{\tau}_0, \underline{\tau}_1), C) \leq \omega_k(x; m(x; \overline{m}_0, \overline{m}_1), \tau(x; \overline{\tau}_0, \overline{\tau}_1), C) \quad (4)$$

для всех  $x \in X$ .

**Утверждение 2.** В условиях (2)–(7) [3] для  $k \in \{0; 1\}$  и любой постоянной  $s \equiv C \in S^c$  в случае применения (8), (9) [3] для любых  $\underline{m}_0, \underline{m}_1 \in M^c$  и  $\underline{\tau}_0, \underline{\tau}_1, \overline{\tau}_0, \overline{\tau}_1 \in T^c$  если

$$\underline{m}_0 \leq \underline{m}_1, \quad (5)$$

$$\underline{\tau}_0 \geq \underline{\tau}_1, \quad \overline{\tau}_0 \geq \overline{\tau}_1 \quad (6)$$

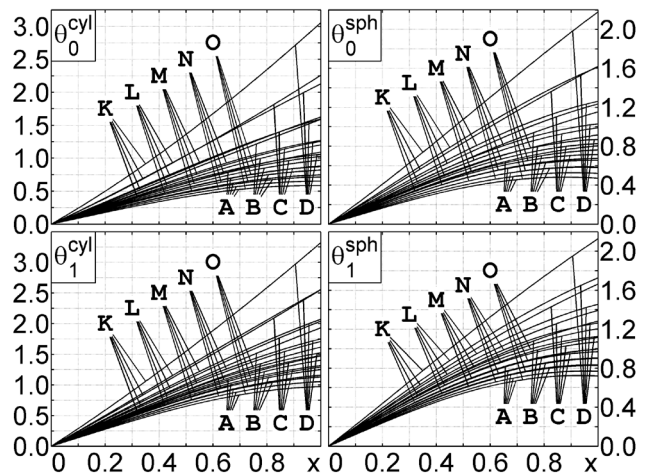
и выполнены условия (24), (25) [3] подчинения параметров, то

$$\theta_k(x; m(x; \underline{m}_0, \underline{m}_1), \tau(x; \underline{\tau}_0, \underline{\tau}_1), C) \geq \theta_k(x; m(x; \overline{m}_0, \overline{m}_1), \tau(x; \overline{\tau}_0, \overline{\tau}_1), C), \quad (7)$$

$$\omega_k(x; m(x; \underline{m}_0, \underline{m}_1), \tau(x; \underline{\tau}_0, \underline{\tau}_1), C) \geq \omega_k(x; m(x; \overline{m}_0, \overline{m}_1), \tau(x; \overline{\tau}_0, \overline{\tau}_1), C) \quad (8)$$

для всех  $x \in X$ .

Сравнивая Утверждение 1 с Утверждением 1 из [3] и Утверждение 2 с Утверждением 2 из [3], можно заметить, что условия (2), (6) убывания и условия (17), (23) [3] возрастания температурных факторов можно исключить. Таким образом, Утверждение 1 и Утверждение 2 верны для линейно возрастающих вдувов и **линейных** температурных факторов.



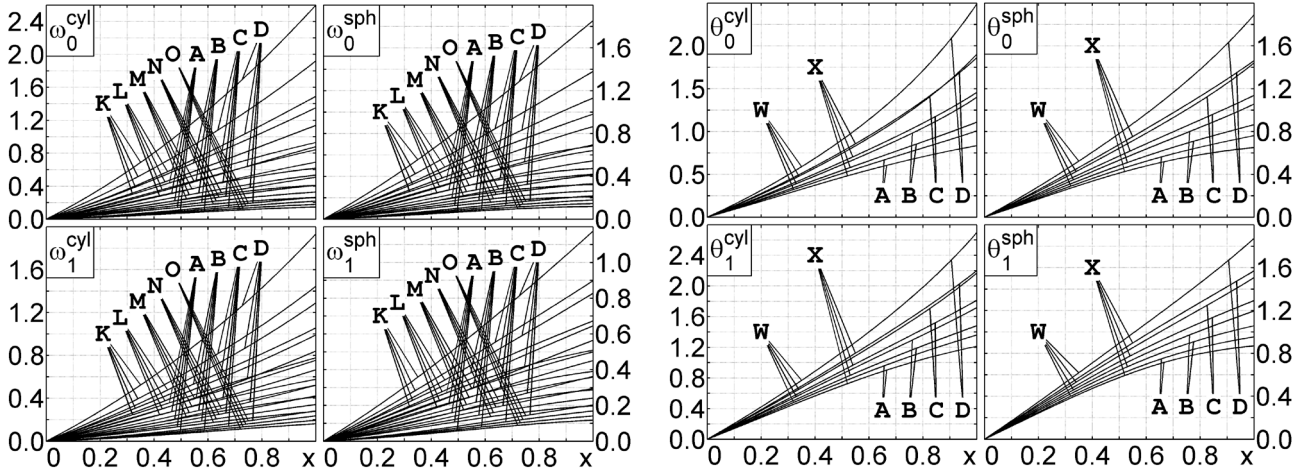


Рис. 2. Зависимости  $\theta_0(x), \dots, \omega_1(x)$  при  $m' = +0,25$  и  $\tau' = -0,15$

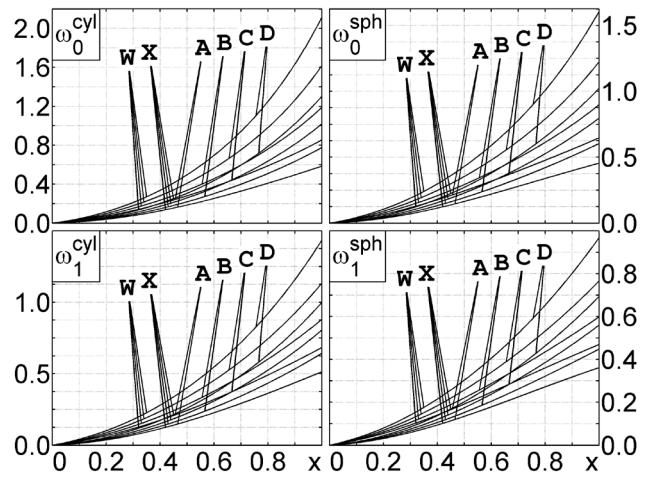
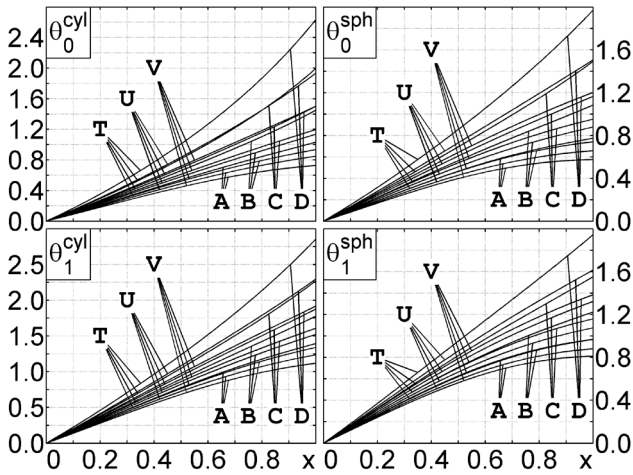


Рис. 4. Зависимости  $\theta_0(x), \dots, \omega_1(x)$  при  $m' = +0,25$  и  $\tau' = -0,6$

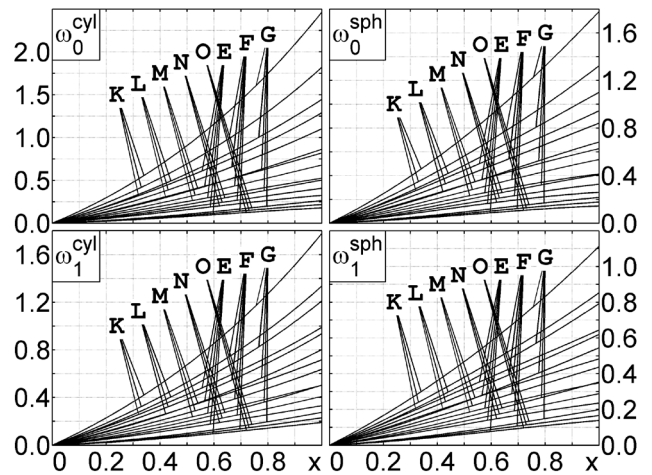
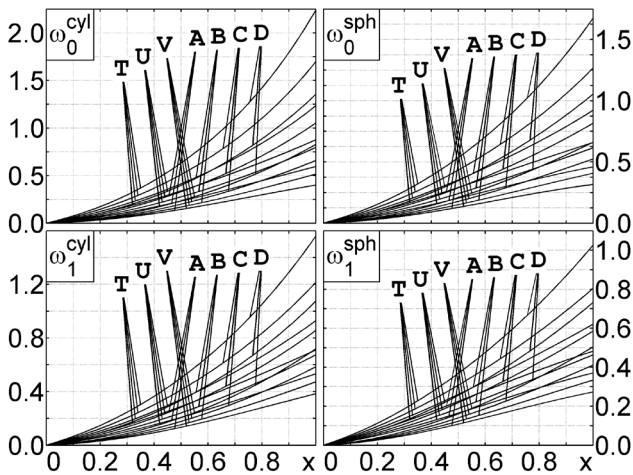


Рис. 3. Зависимости  $\theta_0(x), \dots, \omega_1(x)$  при  $m' = +0,25$  и  $\tau' = -0,45$



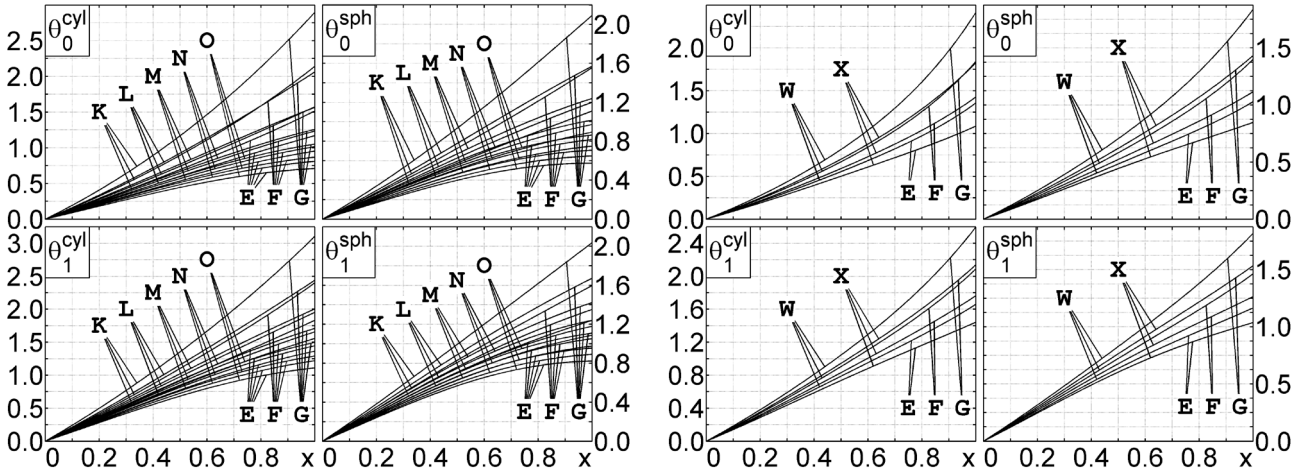


Рис. 5. Зависимости  $\theta_0(x), \dots, \omega_1(x)$  при  $m' = +0,5$  и  $\tau' = -0,15$

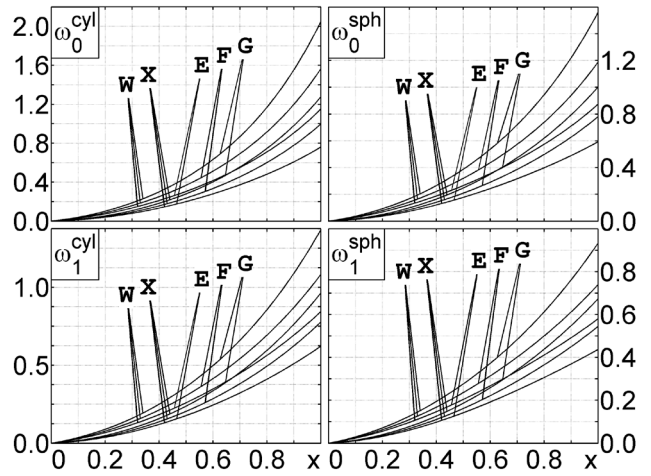
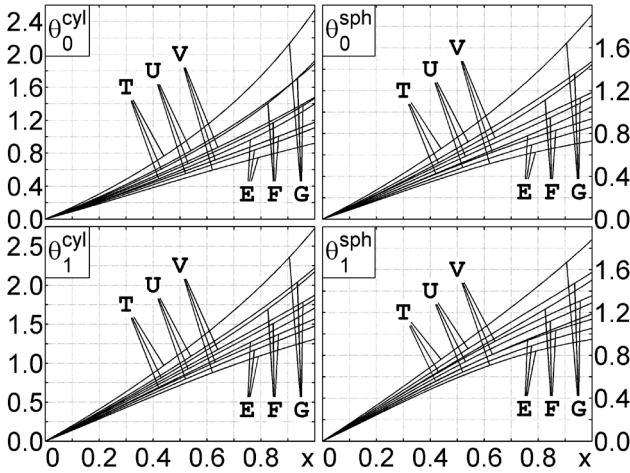


Рис. 7. Зависимости  $\theta_0(x), \dots, \omega_1(x)$  при  $m' = +0,5$  и  $\tau' = -0,6$

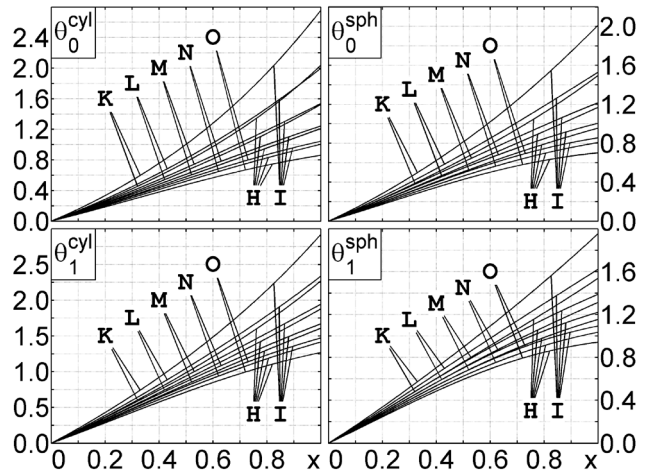
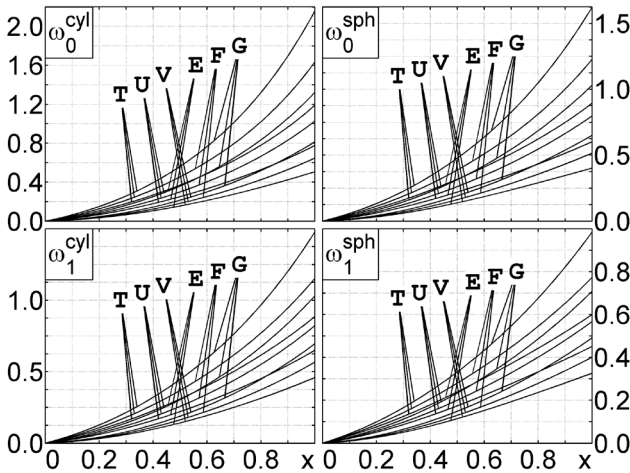


Рис. 6. Зависимости  $\theta_0(x), \dots, \omega_1(x)$  при  $m' = +0,5$  и  $\tau' = -0,45$

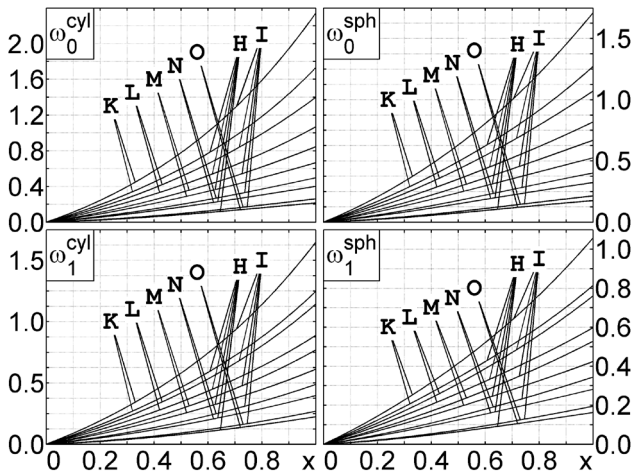


Рис. 8. Зависимости  $\theta_0(x), \dots, \omega_1(x)$  при  $m' = +0,75$  и  $\tau' = -0,15$

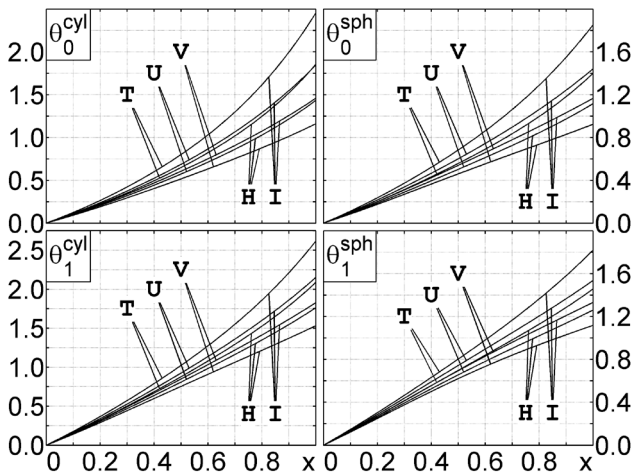
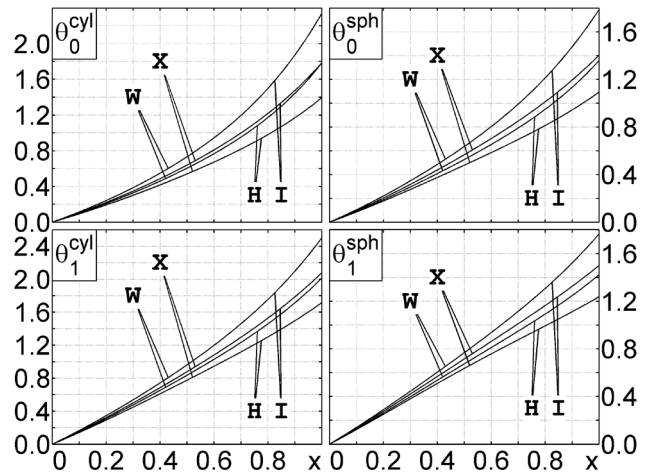


Рис. 10. Зависимости  $\theta_0(x), \dots, \omega_1(x)$  при  $m' = +0,75$  и  $\tau' = -0,6$

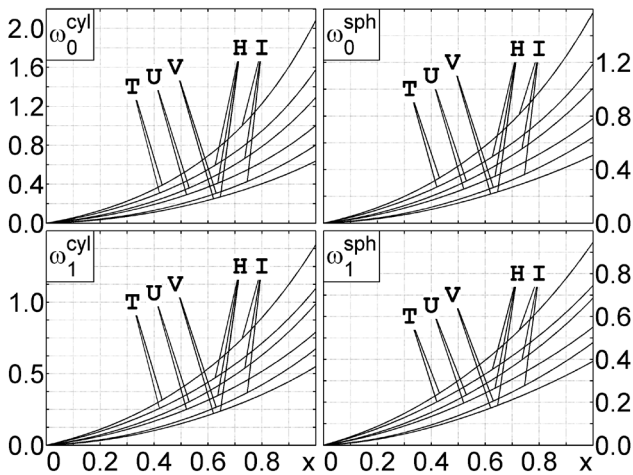


Рис. 9. Зависимости  $\theta_0(x), \dots, \omega_1(x)$  при  $m' = +0,75$  и  $\tau' = -0,45$

### 3. ВЛИЯНИЕ НА ПАРАМЕТРЫ ТЕПЛОМАССООБМЕНА И ТРЕНИЯ

**Утверждение 3.** В условиях (2)–(7) [3] для любой постоянной  $s \equiv C \in S^c$  в случае применения (8), (9) [3] для любых  $\underline{m}_0, \overline{m}_0, \underline{m}_1, \overline{m}_1 \in M^c$  и  $\underline{\tau}_0, \overline{\tau}_0, \underline{\tau}_1, \overline{\tau}_1 \in T^c$  если выполнены условия (1), (2) и условия (18), (19) [3] подчинения параметров, то

$$f(x; m(x; \underline{m}_0, \overline{m}_1), \tau(x; \underline{\tau}_0, \overline{\tau}_1), C) \geq f(x; m(x; \underline{m}_0, \overline{m}_1), \tau(x; \underline{\tau}_0, \overline{\tau}_1), C) \quad (9)$$

для всех  $x \in X$ .

**Утверждение 4.** В условиях (2)–(7) [3] для любой постоянной  $s \equiv C \in S^c$  в случае применения (8), (9) [3] для любых  $\underline{m}_0, \overline{m}_1 \in M^c$  и  $\underline{\tau}_0, \overline{\tau}_0, \underline{\tau}_1, \overline{\tau}_1 \in T^c$  если выполнены условия (5), (6) и



условия (24), (25) [3] подчинения параметров, то

$$f(x; m(x; m_0, m_1), \tau(x; \tau_0, \tau_1), C) \leq f(x; m(x; m_0, m_1), \tau(x; \tau_0, \tau_1), C) \quad (10)$$

для всех  $x \in X$ .

Аналогично случаю Утверждения 1 и Утверждения 2 можно сделать вывод, что Утверждение 3 и Утверждение 4 верны для линейно возрастающих вдувов и **линейных** температурных факторов.

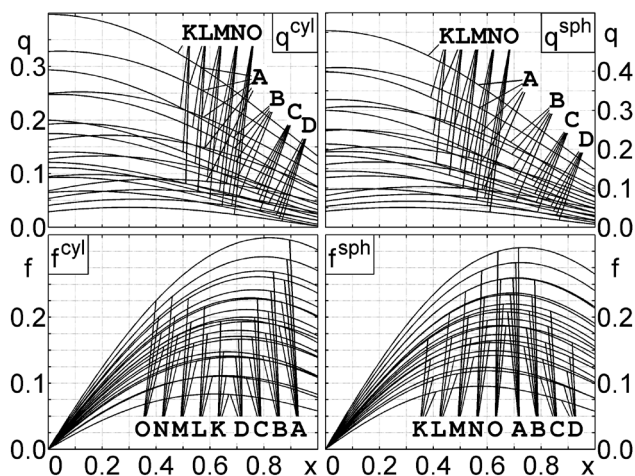


Рис. 11. Зависимости  $q(x)$  и  $f(x)$  при  $m' = +0,25$  и  $\tau' = -0,15$

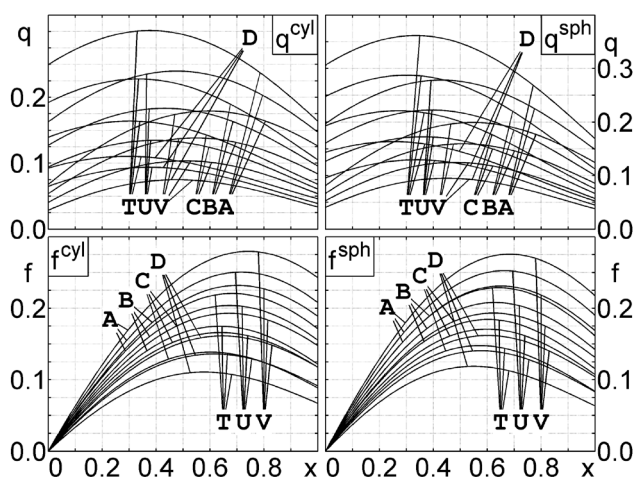


Рис. 12. Зависимости  $q(x)$  и  $f(x)$  при  $m' = +0,25$  и  $\tau' = -0,45$

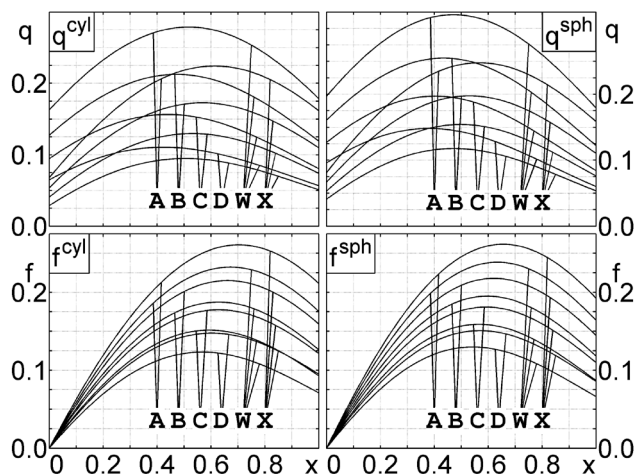


Рис. 13. Зависимости  $q(x)$  и  $f(x)$  при  $m' = +0,25$  и  $\tau' = -0,6$

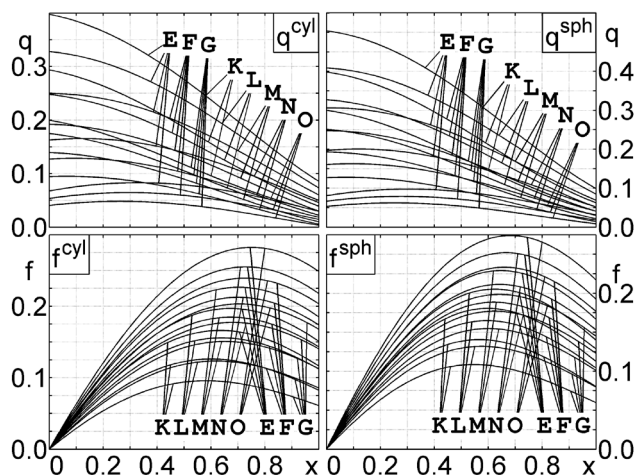


Рис. 14. Зависимости  $q(x)$  и  $f(x)$  при  $m' = +0,5$  и  $\tau' = -0,15$

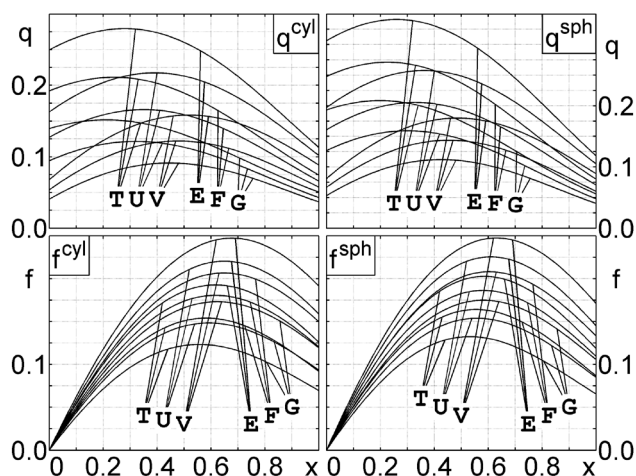


Рис. 15. Зависимости  $q(x)$  и  $f(x)$  при  $m' = +0,5$  и  $\tau' = -0,45$

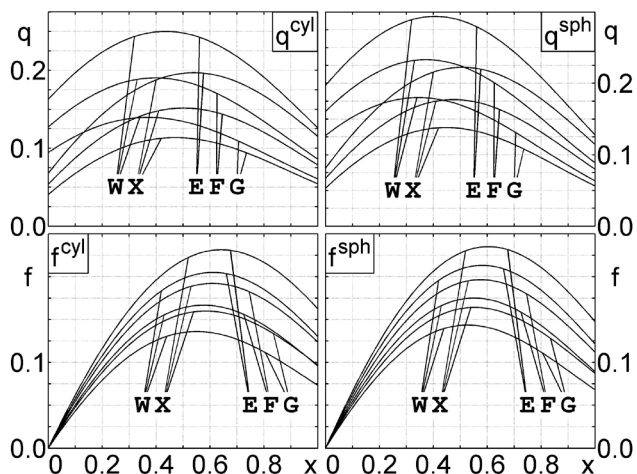


Рис. 16. Зависимости  $q(x)$  и  $f(x)$  при  $m' = +0,5$  и  $\tau' = -0,6$

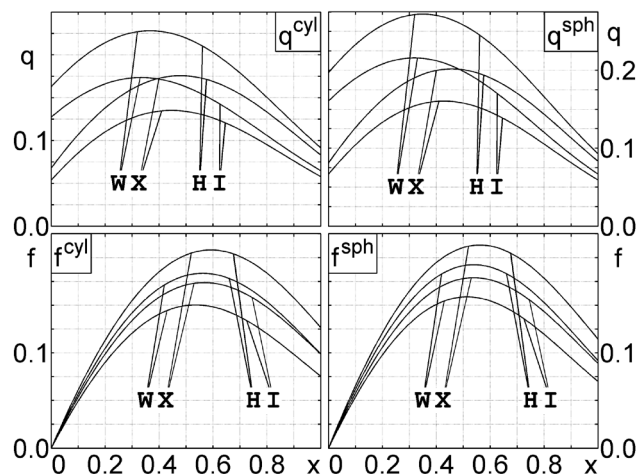


Рис. 19. Зависимости  $q(x)$  и  $f(x)$  при  $m' = +0,75$  и  $\tau' = -0,6$

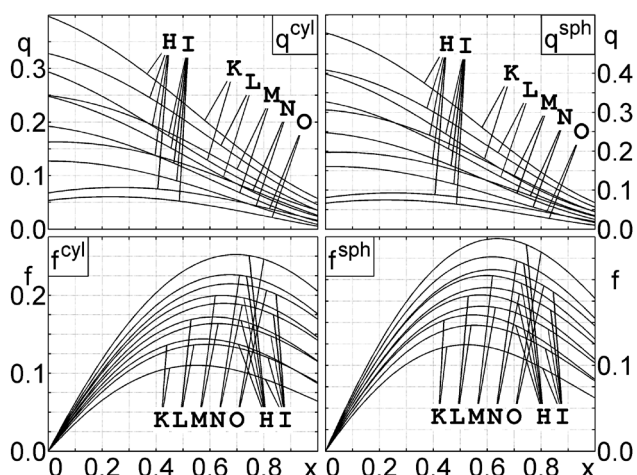


Рис. 17. Зависимости  $q(x)$  и  $f(x)$  при  $m' = +0,75$  и  $\tau' = -0,15$

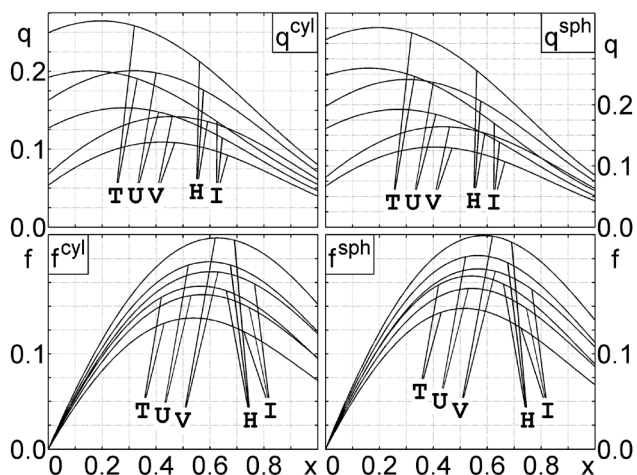


Рис. 18. Зависимости  $q(x)$  и  $f(x)$  при  $m' = +0,75$  и  $\tau' = -0,45$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе изучено влияние на параметры математической модели ламинарного пограничного слоя  $\theta_0(x)$ ,  $\theta_1(x)$ ,  $\omega_0(x)$ ,  $\omega_1(x)$  и на локальные характеристики теплообмена и трения  $q(x)$ ,  $f(x)$  одного из сочетаний наиболее простых представителей класса монотонных функций – **линейно возрастающего** вдува и **линейно убывающего** температурного фактора.

Полученные результаты вычислительных экспериментов могут быть использованы в качестве моделей наблюдаемых данных в задачах синтеза эффективного управления как на всём участке [10] из [3], так и на его фрагментах [11] из [3].

Анализ влияния сочетания линейно возрастающего вдува и линейно убывающего температурного фактора на область значений функционалов гиперзвуковой аэродинамики является предметом отдельного исследования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бильченко, Г. Г. О влиянии линейно возрастающего вдува и линейно убывающего температурного фактора на локальные характеристики теплообмена и трения на проницаемых поверхностях ГЛА / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Некоторые актуальные проблемы современной математики и

математического образования. Герценовские чтения-2019». Материалы научной конференции, 8-12 апреля 2019 г. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2019. – С. 21–26.

2. Бильченко, Г. Г. О влиянии линейно возрастающего вдува и линейно убывающего температурного фактора на параметры математической модели на проницаемых поверхностях ГЛА / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: Сборник трудов XII Международ-

ной научной конференции «ПМТУКТ-2019», Воронеж, 25–28 сентября 2019 г. – Воронеж: ВГУИТ, 2019. – С. 79–82.

3. Бильченко, Г. Г. Анализ влияния линейно возрастающего вдува и линейно возрастающего температурного фактора на параметры математической модели и локальные характеристики теплообмена и трения на проницаемых поверхностях ГЛА / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2019. – № 3. – С. 53-62.

**Бильченко Григорий Григорьевич** – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник лаборатории моделирования физико-технических процессов (при кафедре теплотехники и энергетического машиностроения) Казанского национального исследовательского технического университета (КНИТУ-КАИ) им. А. Н. Туполева. E-mail: ggbil2@gmail.com

**Бильченко Наталья Григорьевна** – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник лаборатории моделирования физико-технических процессов (при кафедре теплотехники и энергетического машиностроения) Казанского национального исследовательского технического университета (КНИТУ-КАИ) им. А. Н. Туполева. E-mail: bilchnat@gmail.com

## ANALYSIS OF THE INFLUENCE OF LINEAR INCREASING BLOWING AND LINEAR DECREASING TEMPERATURE FACTOR ON THE PARAMETERS OF THE MATHEMATICAL MODEL AND LOCAL CHARACTERISTICS OF HEAT AND MASS TRANSFER AND FRICTION ON THE PERMEABLE SURFACES OF THE HYPERSONIC AIRCRAFT

G. G. Bilchenko, N. G. Bilchenko

*Kazan National Research Technical University (KNRTU-KAI) named after A. N. Tupolev*

**Annotation.** The properties of mathematical model of heat and mass transfer and friction control in laminar boundary layer on permeable cylindrical and spherical surfaces of hypersonic aircraft are investigated. The case of application of a combination of linear increasing blowing, linear decreasing temperature factor and constant magnetic field for the entire segment of control is considered. The dependences of mathematical model parameters, local heat and mass transfer and friction characteristics on controls are obtained. The computational experiments results are presented.

**Keywords:** control, heat and mass transfer, laminar boundary layer, hypersonic flows, permeable surfaces, linear increasing blowing, linear decreasing temperature factor, mathematical model parameters, local heat and mass transfer and friction characteristics.

**Bilchenko Grigoriy Grigorievich** – Candidate of Science in Physics and Mathematics, Researcher of Laboratory of Modeling of Physical and Technical Processes, Department of Heat Engineering and Power Engineering Machinery, Kazan National Research Technical University (KNRTU-KAI) named after A. N. Tupolev. E-mail: ggbil2@gmail.com

**Bilchenko Natalya Grigorievna** – Candidate of Science in Physics and Mathematics, Researcher of Laboratory of Modeling of Physical and Technical Processes, Department of Heat Engineering and Power Engineering Machinery, Kazan National Research Technical University (KNRTU-KAI) named after A. N. Tupolev. E-mail: bilchnat@gmail.com