УДК 519.81

СПЕКТРАЛЬНЫЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ ЭКСПЕРТНОЙ ГРУППЫ

Т. М. Леденева, К. С. Погосян

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 16.12.2018 г.

Аннотация. В статье развивается подход к определению согласованности группы экспертов на основе анализа соответствующего знакового графа. Суть подхода заключается в анализе спектра матрицы смежности графа, включающего только положительные ребра. Предложены новые понятия (s-группируемость, совершенная s-группируемость) для оценки структурных свойств знакового графа, а также алгоритм для анализа экспертной группы и формирования коалиций экспертов.
Ключевые слова: Знаковый граф, сбалансированность, группируемость, спектр графа.
Annotation. The article develops an approach to determining the consistency of a group of experts based on the analysis of the corresponding sign graph. The essence of the approach is to analyze the spectrum of the adjacency matrix of a graph that includes only positive edges. New concepts (s-grouping, perfect s-grouping) for evaluating the structural properties of the sign graph, as well as an algorithm for analyzing the expert group and forming coalitions of experts have been proposed.
Keywords: sign graph, balance, groupability, graph spectrum.

ВВЕДЕНИЕ

При проведении любой экспертизы можно выделить следующие проблемы, непосредственно касающиеся ее результатов: анализ *непротиворечивости* индивидуальных суждений каждого из экспертов и оценка *согласованности* экспертных суждений для каждой пары экспертов и всей группы в целом. Непротиворечивость суждений предполагает транзитивность индивидуальных предпочтений эксперта [1, 2]. Существующие подходы к оценке согласованности базируются на основных типах экспертной информации и насчитывают значительное количество методов (лишь малая часть в [3–6]). Уже классическими стали методы оценки согласованности экспертных ранжирований в виде коэффициентов ранговой корреляции Кендалла и Спирмена [7], метод оценки согласованности экспертных классификаций [8] и, конечно, метод оценки согласованности парных сравнений [6, 9].

Оценка согласованности экспертных суждений позволяет при обработке результатов экспертизы выявить возможные группировки в экспертной группе и причины возникновения расхождений в экспертных оценках, при этом можно выделить следующие ситуации: 1) эксперты проявляют единодушие в оценке вариантов решений; 2) экспертная группа разбивается на подгруппы, внутри которых суждения экспертов близки, в то время как, между группами имеются разногласия; 3) в группе невозможно выделить никаких подгрупп экспертов, суждения которых были бы попарно согласованны.

Цель статьи заключается в развитии подходов к анализу структуры экспертной группы, при этом в качестве основного инструмента исследования предлагается использовать понятие знакового графа и его спектра.

1. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

1.1. Знаковый граф как модель экспертной группы

Экспертная группа относится к *малым группам*, и поэтому для ее анализа целесообразно использовать понятие знакового графа, впервые введенного Хайдером и используемого для исследования структуры сложных систем [10,11].

Пусть $E=\{e_1,...,e_m\}$ – группа экспертов. Предположим, что в рамках экспертизы определен метод, позволяющий для каждой пары экспертов e_i и e_j определить количественную оценку φ_{ij} согласованности экспертных суждений. Задав пороговое значение согласованности ε_{ij}, построим полный знаковый граф, в котором вершинам соответствуют эксперты, а ребро (e_i,e_j) помечается знаком «+», если $\varphi_{ij}\geq\varepsilon_{ij}$, т. е. оценка согласованности превышает заданный порог, и знаком «–» – иначе. Знаковый граф экспертной группы E будем обозначать G_E в отличие от универсального обозначения G для знакового графа.

Важнейшим свойством знакового графа при исследовании малых групп является сбалансированность, при этом большинство подходов к оценке сбалансированности базируются на *теореме о структуре* [10]. В соответствии с ней, граф является сбалансированным, если выполняется одно из свойств: а) каждый цикл в графе положителен; б) все цепи между любыми двумя вершинами имеют одинаковый знак; а) существует такое разбиение вершин графа на два подмножества, что в каждом подмножестве связи только положительные, а связи между вершинами из разных подмножеств только отрицательные (заметим, что в этом случае при удалении отрицательных связей граф разбивается на две компоненты связности).

Недостатком критериев сбалансированности, которые основаны на теореме о структуре, является то, что они позволяют говорить лишь о балансе или дисбалансе, игнорируя возможность градации сбалансированности.

Определение сбалансированности экспертной группы с точки зрения теоремы о структуре подробно исследовалось в [12]. Сбалансированную группу экспертов можно разбить на две подгруппы так, что в каждой подгруппе оценки являются согласованными, а для каждой пары экспертов из различных подгрупп оценки не согласованные. Заметим, однако, что в рамках экспертизы и для большего количества подгрупп результат может быть интерпретирован.

1.2. О спектре неориентированного графа

Пусть граф G задан матрицей смежности $A=(a_{ij})_{m\times m}$. Совокупность m собственных значений $\lambda_1^A,...,\lambda_m^A$ матрицы A называется спектром графа G.

Известно, что собственные значения симметричной матрицы с элементами 0 и 1 действительные числа, так что спектр неориентированного графа содержит m действительных чисел $\lambda_{\max}^A=\lambda_1^A\geq...\geq\lambda_m^A=\lambda_{\min}^A$, при этом имеют место следующие свойства [13]:

1) среди собственных значений существуют как положительные, так и отрицательные, при этом $\lambda_1^A+\lambda_2^A+...+\lambda_m^A=0$;

2) если G содержит, по крайней мере, одно ребро, то

$$1\leq\lambda_{\max}^A\leq m-1 \text{ и } -\lambda_{\max}^A\leq\lambda_{\min}^A\leq-1;$$

3) если граф связен, то

$$2\cos\frac{\pi}{m-1}\leq\lambda_{\max}^A\leq m-1;$$

4) если граф полный, то $\lambda_{\max}^A=\lambda_1^A=m-1$, $\lambda_2^A=...=\lambda_m^A=-1$;

5) если граф вполне несвязный, т. е. состоит только из вершин, то $\lambda_1^A=...=\lambda_m^A=0$;

6) Пусть G_1, G_2 – неориентированные графы с множеством ребер U_1 и U_2 соответственно, причем $U_1\subset U_2$, тогда $\lambda_{\max}(G_1)<\lambda_{\max}(G_2)$;

7) если граф G полный, то его хроматическое число $\gamma(G)$ совпадает с максимальным собственным значением матрицы смежности, т. е. $\gamma(G)=\lambda_{\max}^A$, иначе $\gamma(G)\leq\lambda_{\max}^A$.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

2.1. Обобщение понятия группируемости

Остановимся на нескольких характерных ситуациях.

Если в связном знаковом графе все ребра положительны, то он удовлетворяет теореме о структуре, а разбиение состоит лишь из одного множества. Полный граф на m вершинах, как известно, обозначается через K_m. Если все его ребра положительны, то примем обозначение K_m^+.

Группу из m экспертов будем называть *абсолютно сбалансированной*, если соответствующий ей знаковый граф G_E совпадает с K_m^+.

На практике абсолютно сбалансированная группа экспертов является скорее редкостью, поэтому более типичной является ситуация, когда образуется несколько подгрупп экспертов.

Если существует разбиение множества вершин знакового графа G на несколько подмножеств такое, что все ребра, соединяющие вершины каждого из подмножеств положительны, а ребра, соединяющие вершины из разных подмножеств, отрицательны, то знаковый граф называется *группируемым* [10] (иначе говорят, что он соответствует *идеализированной партийной структуре*).

Уточним данное понятие следующим образом. Пусть знаковый граф G является группируемым и после удаления отрицательных ребер он разбивается на s компонент связности, тогда такой граф назовем *s-группируемым*. Если при этом каждая компонента связности представляет собой полный подграф, то такой s-группируемый граф назовем *совершенным*.

Пусть G – полный совершенный s-группируемый граф, тогда, очевидно, что существует отношение эквивалентности, которое индуцирует разбиение множества вершин на классы эквивалентности. Такое разбиение является единственным, причем каждому классу эквивалентности соответствует компонента связности графа.

Заметим, что s-группируемый и совершенный s-группируемый графы при $s = 2$ является сбалансированными. Однако в первом случае, в отличие от второго, компонента связности не является полным подграфом. При анализе экспертной группы целесообразно учитывать разбиение именно на полные компоненты связности. Это означает, что в группе экспертов, которая соответствует такой компоненте, суждения экспертов являются попарно согласованными.

Будем говорить, что экспертная группа E является s-группируемой (совершенной s-группируемой), если ее знаковый граф G_E обладает данными свойствами при $2 < s < m$.

Компоненту связности совершенного s-группируемого графа G_E экспертной группы E будем называть *коалицией* экспертов. Заметим, что в коалициях суждения экспертов попарно согласованы, в то время как между любыми двумя экспертами из разных коалиций суждения согласованными не являются. Разбиение экспертов на коалиции является единственным.

Если $s = m$, то экспертную группу E будем называть *полностью рассогласованной*.

2.2. Анализ спектра экспертной группы

Матрицей смежности знакового (неориентированного) графа G называется матрица $A = \{a_{ij}\}_{m\times m}$ порядка m, элементы которой a_{ij} определяются следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } (i, j) \text{ помечено} +, \\ -1, & \text{если ребро } (i, j) \text{ помечено} -, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что в силу того, что знаковые графы, рассматриваемые в данной статье, являются неориентированными, их матрицы смежности симметричны.

Матрица A представима в виде

$$A = A^- + A^+,$$

где $A^- = \{a_{ij}^-\}_{m\times m}$ – матрица, учитывающая только отрицательные связи, $A^+ = \{a_{ij}^+\}_{m\times m}$ – матрица, учитывающая только положительные связи.

Пусть $\left\{\lambda_j^{A^+(G_E)}\right\}_{j=\overline{1,m}}$ – множество собственных значений матрицы смежности A^+ знакового графа G_E. Имеют место следующие ситуации.

1) Максимальное собственное число $\lambda_{\max}^{A^+}$ является дробным и среди собственных векторов нет векторов с компонентами из $\{0,1\}$ – в этом случае граф, учитывающий только положительные связи, соответствующие согласованным суждениям пар экспертов, является связным, а, следовательно, коалиций экспертов не сформировалось.

2) Максимальное собственное число $\lambda_{\max}^{A^+}$ является дробным и среди собственных векторов существует хотя бы один вектор с компонентами из $\{0,1\}$ – в этом случае граф разбивается на несколько компонент связности, но среди них хотя бы одна компонента не является полной. Таким образом, существует хотя бы одно подмножество экспертов, которые не образуют коалицию, т. е. в этом подмножестве существуют эксперты, суждения которых не являются согласованными.

3) Спектр графа целочисленный, среди собственных векторов имеются векторы с компонентами из $\{0,1\}$ – в этом случае граф разбивается на полные компоненты связности, причем их количество равно $NumCom = \left|\left\{\lambda_j : \lambda_j \geq 0\right\}\right|$.

4) Если количество компонент связности в случаях 2) или 3) равно 2, то граф является сбалансированным. Для случая 2) это возможно, если $\left|\left\{X^j : \forall i = \overline{1,m}\left(x_i^j \in \{0,1\}\right)\right\}\right| = 1$, т. е. среди собственных векторов есть только один с компонентами из $\{0,1\}$. Для случая 3) это возможно, если отрицательных собственных чисел в целочисленном спектре имеется ровно $(m-2)$ для m-вершинного графа.

Замечание 1. При анализе связных и несвязных графов необходимо учитывать специальные графы, которые имеют целочисленный спектр. К таким графам, например, относятся 3-дольный граф $K_{3,1,1}$, граф-звезда, простой цикл и др. Такие ситуации требуют дополнительного анализа. Например, если экспертной группе соответствует граф-звезда, то это означает, что в группе существует некоторый эксперт, с которым согласны все остальные эксперты, но между любой другой парой экспертов согласованности нет. Другой вариант – эксперт согласен только с парой экспертов из группы, в этом случае соответствующий граф образует цикл на m вершинах, и для $m = 2,4,6$ спектр является целочисленным.

Замечание 2. Установлено, что если максимальное собственное значение целое положительное, то и весь спектр графа (за исключением некоторых специальных графов) целочисленный, причем матрицу смежности соответствующего графа можно привести к блочно-диагональному виду, так что блоки из 1 как раз соответствуют полным компонентам связности (коалициям экспертов).

2.3. Алгоритм анализа экспертной группы

Согласно свойству 6) при увеличении количества ребер в графе максимальное собственное число может только увеличиваться, поэтому для характеристики графа экспертной группы, учитывающего только положительные связи, введем показатель степени согласованности группы в виде

$$ConsExp = \frac{\max\limits_j\left\{\lambda_j^{A^+}\right\}}{m-1} = \frac{\lambda_{\max}^{A^+}}{m-1}.$$

Чем больше показатель $ConsExp$, тем большее количество экспертов имеют попарно согласованные суждения.

Заметим, что если граф является рассогласованным, т. е. каждый из экспертов не согласен со всеми остальными, то $ConsExp = 0$. С другой стороны, если группа экспертов является абсолютно сбалансированной, то есть $G_E = K_m^+$, а, следовательно, $\lambda_{\max}^{A^+} = m-1$, то $ConsExp = 1$. Для остальных случаев $ConsExp \in (0,1)$.

Для анализа графа экспертной группы предлагается следующий алгоритм:

Шаг 1. На основе построенного знакового графа G_E необходимо сформировать матрицу смежности A^+ графа, учитывающего только положительные связи.

Шаг 2. Вычислить собственные значения $\lambda_1,..,\lambda_m$ и соответствующие собственные векторы $X_1,..,X_m$ $\left(X_j = (x_{1j},..,x_{mj})\right)$ матрицы A^+.

Шаг 3. Проанализировать спектр матрицы $A^+(G_E)$:

3.1. Если значение $\lambda_{\max}^{A^+}$ является дробным и среди характеристических векторов нет векторов с компонентами из $\{0,1\}$, то соответствующий граф связен и, следовательно, коалиций не существует, граф является несбалансированным.

3.2. Если среди собственных значений нет целых, то экспертная группа несбалансированная. Пусть λ_j – дробное собственное число, тогда на его основе можно определить количество экспертов $\left[\lambda_j\right] \le \left|E_l\right| \le \left[\lambda_j\right]+1,$ из которых можно сформировать сбалансированную коалицию E_l при определенных рекомендациях по изменению их суждений.

3.3. Если значение $\lambda_{\max}^{A^+}$ является дробным и среди собственных векторов имеется $NumEVector_{\{0,1\}}$ векторов с компонентами из $\{0,1\}$, то группа экспертов разбивается на подгруппы, при этом хотя бы в одной такой подгруппе существует пара экспертов, суждения между которыми не являются согласованными. Если $NumEVector_{\{0,1\}}=1,$ т. е. собственный вектор с компонентами из $\{0,1\}$ единствен, то граф экспертной группы является сбалансированным, иначе s-группируемым при $s = NumEVector_{\{0,1\}}+1,$ но не совершенным.

3.4. Если $\lambda_{\max}^{A^+}$ является целым положительным числом, то существует $NumCom$ коалиций, и, следовательно, граф G_E – совершенный s-группируемый при $s = NumCom$. Если $NumCom = 2,$ то граф, а, следовательно, и экспертная группа являются сбалансированными. Коалиции экспертов формируются по правилу:

$$\forall \lambda_j^{A^+} \ge 0 \left(E_l = \left\{e_i \in E \,\middle|\, x_i^j = 1, i = \overline{1,m}\right\}\right),$$

при этом $\left|E_l\right| = \lambda_l + 1.$

3.5. Если спектр включает только нулевые собственные значения, то группа является рассогласованной.

<u>Шаг 4</u>. Определить степень согласованности $ConsExp$.

2.4. Иллюстративный пример

Пусть после обработки результатов экспертизы построен знаковый граф G_E для группы экспертов $E = \{e_1,...,e_7\}$, а затем на его основе сформирована матрица A^+, учитывающая только положительные связи и имеющая следующий вид:

$$A^+(G) = \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \\ e_7 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим собственные значения и собственные векторы матрицы A^+.

$$\left|A^+ - \lambda I\right| =$$

$$= \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & -\lambda & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda-2)(\lambda+1)^4(\lambda-1)^2.$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad X_1 = (1,0,0,1,1,0,0),$$
$$\lambda_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad X_2 = (0,0,-1,0,0,0,1),$$
$$\lambda_3 = -1 \quad \Rightarrow \quad X_3 = (0,-1,0,0,0,1,0),$$
$$\lambda_4 = -1 \quad \Rightarrow \quad X_4 = (-1,0,0,0,1,0,0),$$
$$\lambda_5 = -1 \quad \Rightarrow \quad X_5 = (-1,0,0,1,0,0,0),$$
$$\lambda_6 = 1 \quad \Rightarrow \quad X_6 = (0,0,1,0,0,0,1),$$
$$\lambda_7 = 1 \quad \Rightarrow \quad X_7 = (0,1,0,0,0,1,0).$$

Заметим, что спектр является целочисленным, найдем $NumCom = 3$, следовательно, граф G_E является совершенным 3-группируемым. Рассмотрим положительные собственные числа $j \in \{1,6,7\}$ и соответствующие им собственные векторы. Сформируем следующие коалиции, включая в них тех экспертов, которым в собственных векторах соответствуют 1:

$$E_1 = \left\{e_i \in E \middle| x_{i1} \ne 0\right\} = \{e_1, e_4, e_5\},$$
$$E_2 = \left\{e_i \in E \middle| x_{i6} \ne 0\right\} = \{e_3, e_7\},$$
$$E_3 = \left\{e_i \in E \middle| x_{i7} \ne 0\right\} = \{e_2, e_6\}.$$

Таким образом, экспертная группа делится на коалиции, то есть образует идеализированную партийную структуру со степенью согласованности

$$ConsExp = \frac{\lambda_{\max}^{A^{+}}}{m-1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен подход к определению оценки согласованности экспертной группы на основе анализа спектра графа, учитывающего только положительные связи соответствующего знакового графа. Введены понятия s-группируемости и совершенной s-группируемости. С использованием предложенного алгоритма были проведены вычислительные эксперименты, которые показали приемлемость спектрального подхода к принятию решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бугаев, Ю. В.* Методы проверки транзитивности индивидуальных экспертных предпочтений // Ю. В. Бугаев, И. Е. Медведкова, М. К. Бабаян // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий, 2014. – Т. 11, № 3. – С. 16–29.

2. *Каплиева, Н. А.* Исследование различных типов транзитивности в приложении к нечеткой классификации / Н. А. Каплиева, Т. М. Леденева // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика, 2006. – № 2. – С. 206–216.

3. *Литвак, Б. Г.* Экспертные технологии в управлении / Б. Г. Литвак. – М.: Дело, 2004. – 400 с.

4. *Леденева, Т. М.* Согласование лингвистических экспертных оценок в процедуре группового выбора / Т. М. Леденева, К. С. Погосян // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2010. – № 2. – С. 125–130.

5. Обзор существующих в научно-технической сфере экспертных технологий (из опыта работы отечественных экспертных систем) / Ю. Л. Рыбаков, В. П. Голубев, Н. А. Дивуева, В. И. Медведев, Б. И. Ефимов // Инноватика и экспертиза: научные труды, 2012. – № 2. – С. 173–182.

6. *Петровский, А. Б.* Теория принятия решений / А. Б. Петровский. – М. : Издательский центр «Академия», 2009. – 400 с.

7. *Леденева, Т. М.* Модели и методы принятия решений / Т. М. Леденева. – Воронеж : Изд-во ВГТУ, 2004. – 189 с.

8. *Бурков, В. Н.* Получение и анализ экспертной информации / В. Н. Бурков, Л. А. Панкова, М. В. Шнейдерман. – М. : Институт проблем управления, 1980. – 49 с.

9. *Ломакин, В. В.* Алгоритм повышения степени согласованности матрицы парных сравнений при проведении экспертных опросов / В. В. Ломакин, М. В. Лифиренко // Фундаментальные исследования, 2013. – № 11-9. – С. 1798–1803.

10. *Робертс, Ф. С.* Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам / Ф. С. Робертс. – М. : Наука, 1986. – 496 с.

11. *Шварц, Д. А.* О мере сбалансированности полных знаковых графов : препринт WP7/2013/09 / Д. А. Щварц; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». – М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2013. – 24 с.

12. *Погосян, К. С.* Определение сбалансированности знакового графа экспертной группы / К. С. Погосян // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии, 2015. – № 4. – С. 138–143.

13. *Цветкович, Д.* Спектры графов. Теория и применение / Д. Цветкович, М. Дуб, Х. Захс. – Киев : Наукова думка, 1984. – 384 с.

Леденева Т. М. – д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики и прикладных информационных технологий, факультет прикладной математики, информатики и механики, Воронежский государственный университет.
E-mail: ledeneva-tm@yandex.ru

Ledeneva T. M. – Doctor of Technical Science, Professor, Department of Computational Mathematics and Applied Information Technologies, Faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics, Voronezh State University.
E-mail: ledeneva-tm@yandex.ru

Погосян Кристине Самвеловна – преподаватель кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий факультета прикладной математики, информатики и механики, Воронежский государственный университет
E-mail: pogosyan_k_s@mail.ru

Pogosyan Kristine Samvelovna – Lecturer, Department of Computational Mathematics and Applied Information Technologies, Faculty of Applied Mathematics, Computer Science and Mechanics, Voronezh State University.
E-mail: ledeneva-tm@yandex.ru