

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ТРЕХИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ. РАЗВИТИЕ ПОИСКОВЫХ СПОСОБНОСТЕЙ

А. Г. Трегубов, С. Н. Медведев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 22.10.2018 г.

Аннотация. В статье рассматривается адаптивный алгоритм решения трехиндексной аксиальной задачи о назначениях. Алгоритм основан на переходе к вероятностной постановке задачи. На основе вычислительного эксперимента рассмотрена возможность его улучшения. Для этого вводится понятие окрестности решения задачи на основе расстояния Хэмминга, и рассматривается переход из окрестности одной точки в окрестность другой на основе настройки параметров алгоритма. В результате предлагается изменение параметров алгоритма по некоторой функциональной зависимости от числа итераций. В завершении приводятся результаты вычислительного эксперимента и выводы.

Ключевые слова: трехиндексная аксиальная задача о назначениях, адаптивный алгоритм, вероятностная постановка, локальный поиск.

Annotation. The article considers the adaptive algorithm for solving axial 3-index assignment problem. The algorithm is based on the transition to a probabilistic statement of the problem. On the basis of a calculation experiment, the possibility of its improvement was considered. For this, the concept of a neighborhood of a solution based on the Hamming distance is introduced. As a result, the proposed change in the parameters of the algorithm for some function. Finally, the results of the computational experiment and conclusions are given.

Keywords: axial 3-index assignment problem, adaptive algorithm, probabilistic statement, local search.

ВВЕДЕНИЕ

Естественным обобщением классической задачи о назначениях (ЗОН) является трехиндексная аксиальная ЗОН, которая состоит в таком выборе n элементов трехмерной матрицы затрат (c_{ij}^k) размерности $n \times n \times n$, что в каждом ее сечении выбран ровно один элемент, и сумма всех выбранных элементов минимальна.

Для получения математической записи аксиальной ЗОН вводится n^3 переменных вида:

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases}$$

где $i, j, k = \overline{1, n}$.

В результате задача принимает следующий вид:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ij}^k x_{ij}^k \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ij}^k = 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ij}^k = 1, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}^k = 1, \quad k = \overline{1, n}, \quad (4)$$

$$x_{ij}^k = \{0, 1\}, \quad i, j, k = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Данная задача является NP -трудной [4], что стимулирует разработку приближенных алгоритмов с оценками качества получаемых решений. Такого рода алгоритмам посвящено множество работ, некоторые из которых представлены далее.

В [10] рассматривается полный трехдольный граф, вершины которого соответствуют индексам i, j и k соответственно. Каждое его ребро $[i, j]$ (или $[i, k]$, или $[j, k]$) имеет длину $d(i, j)$ (или $d(i, k)$, или $d(j, k)$). Предлагаются две модели трехиндексной аксиальной

задачи: в первой затраты c_{ij}^k определяются как сумма трех длин $c_{ij}^k = d(i, j) + d(i, k) + d(j, k)$, а во второй – как сумма двух более коротких. Предлагаются ϵ -приближенные алгоритмы, которые получают решение, значение которого в первом случае не хуже, чем $3/2$ от оптимального значения, а во втором случае – чем $4/3$ от оптимального значения, показана NP-трудность данной задачи.

В работе [3] представлен асимптотически точный подход к построению алгоритмов решения аксиальных задач большой размерности на случайных входах и получены условия, при которых эти алгоритмы позволяют находить асимптотически точные решения многоиндексной аксиальной ЗОН.

В [1] предложен эвристический алгоритм решения NP-трудных многоиндексных задач с декомпозиционной структурой (применимый в том числе и для аксиальной задачи о назначениях), степень отклонения от оптимума находимого решения ограничена через значение критерия вспомогательной задачи ЛП.

В работе [2] найдены достаточные условия сводимости к задаче поиска потока в сети, предложенный полиномиальный алгоритм в частности применим для решения аксиальной задачи о назначениях с критерием специальной декомпозиционной структуры.

Авторами статьи также предложен свой метод решения трехиндексной аксиальной ЗОН. Его основная идея и алгоритм представлены в работах [7, 8], а также будут кратко описаны ниже для лучшего понимания дальнейшего исследования. Рассматриваемый адаптивный алгоритм обладает как рядом достоинств, таких как гибкость настройки и возможность внедрения дополнительных эвристических приемов, так и некоторыми недостатками, основной из которых – сравнительно большое время работы. Целью данной работы является развитие поисковых возможностей алгоритма для улучшения получаемого значения целевой функции, что является возможным благодаря гибкости настройки его параметров.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Адаптивный алгоритм

Для трехиндексной аксиальной задачи известен базовый «жадный» алгоритм, основанный на поиске минимального элемента в плоских матрицах при фиксировании одного из индексов [4]. На его основе предлагается построение адаптивного алгоритма решения аксиальной трехиндексной ЗОН (1)–(5). Для этого осуществляется переход к вероятностной постановке задачи на основе рандомизации переменных [5].

Задача минимизации целевой функции

$$L(X) \rightarrow \min_{X \in \Omega}$$

заменяется задачей минимизации ее математического ожидания

$$M(L(X)) \rightarrow \min_{\{X\}: X \in \Omega},$$

где $\{X\}$ – множество случайных величин X с реализациями X из множества Ω .

Здесь $X = [X^1 \dots X^n]$ – кубическая матрица случайных величин,

$X^k = [X_1^k \dots X_n^k]^t$ – матрица $n \times n$ случайных величин,

$X_i^k = (X_{i1}^k \dots X_{in}^k)$ – строка матрицы X^k ,

X_{ij}^k – случайная величина с рядом распределения:

Возможные значения	1	0
Вероятность p	p_{ij}^k	$q_{ij}^k = 1 - p_{ij}^k$

где $i, j, k = \overline{1, n}$.

Вводятся полные группы событий A_{ij}^k , для каждого $k = \overline{1, n}$, где A_{ij}^k – событие, заключающееся в том, что x_{ij}^k примет значение 1, для каждого $k = \overline{1, n}$, т. е. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij}^k = 1, k = \overline{1, n}$.

Подробное описание этапов разработки алгоритма приводится в [8]. Здесь же приведем главное отличие алгоритма от базового «жадного», которое заключается в следующем:

при фиксированном k вместо

$$\min_{i,j} c_{ij}^k = c_{\mu\nu}^k$$

вычислить

$$\min_{i,j} \left\{ c_{ij}^k - \sum_{l=k+1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}^l (p_{ij}^l)^N + \sum_{l=k+1}^n \sum_{i=1}^n c_{ij}^l (p_{ij}^l)^N \right\}.$$

То есть вместо выбора минимального элемента в плоской матрице, выбираются минимальные возможные потери $\left(- \sum_{l=k+1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}^l (p_{ij}^l)^N + \sum_{l=k+1}^n \sum_{i=1}^n c_{ij}^l (p_{ij}^l)^N \right)$ от текущего выбора c_{ij}^k .

При этом на каждой итерации алгоритма происходит адаптация, пересчет вероятностей по следующим формулам:

$$\begin{aligned} (p_{\mu\nu}^l)^{N+1} &= (p_{\mu\nu}^l)^N q_u + p_u, \\ (p_{ij}^l)^{N+1} &= (p_{ij}^l)^N q_u, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq \mu, \quad j \neq \nu, \\ (p_{ij}^k)^{N+1} &= (p_{ij}^k)^N, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{l+1, n}, \end{aligned}$$

где p_u – настраиваемый параметр алгоритма, $q_u + p_u = 1$.

Сам адаптивный алгоритм решения трехиндексной аксиальной задачи о назначениях (1)–(5) можно представить следующей схемой [8].

Алгоритм.

1. Задать начальное распределение вероятностей для каждого $k = \overline{1, n}$ $(p_{ij}^k)^1 = \frac{1}{n^2}$, $i, j = \overline{1, n}$.

Задать максимальное количество итераций N_{max} , положить $N = 1$.

2. Задать множества $I = \{1, \dots, n\}$, $J = \{1, \dots, n\}$, положить $k = 1$.

3. Вычислить

$$\begin{aligned} \min_{i \in I, j \in J} \left\{ c_{ij}^k - \left(\sum_{l=k+1}^n \sum_{j \in J} c_{ij}^l (p_{ij}^l)^N + \sum_{l=k+1}^n \sum_{i \in I} c_{ij}^l (p_{ij}^l)^N \right) \right\} = \\ = c_{\mu\nu}^l - \left(\sum_{l=k+1}^n \sum_{\mu j \in J} c_{\mu j}^l (p_{\mu j}^l)^N + \sum_{l=k+1}^n \sum_{i \in I} c_{i\nu}^l (p_{i\nu}^l)^N \right), \end{aligned}$$

зафиксировать соответствующее назначение $(x_{\mu\nu}^k)^N = 1$.

4. Пересчитать вероятности по формулам

$$\begin{aligned} (p_{\mu\nu}^l)^{N+1} &= (p_{\mu\nu}^l)^N q_u + p_u, \\ (p_{ij}^l)^{N+1} &= (p_{ij}^l)^N q_u, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq \mu, \quad j \neq \nu, \\ (p_{ij}^k)^{N+1} &= (p_{ij}^k)^N, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{l+1, n}. \end{aligned}$$

5. Пересчитать безусловные вероятности по формуле

$$\bar{p}^{N+1} = \frac{N}{N+1} \left(\bar{p}^N + \frac{1}{N} p^{N+1} \right).$$

6. Изменить множества

$$I, J: I = I \setminus \{\mu\}, \quad J = J \setminus \{\nu\}.$$

7. Проверить: $k = n$? Если **нет**, то положить $k = k + 1$ и переход к шагу 3, если **да**, то переход к шагу 8.

8. Возможная смена рекорда $(X)^N$, $(L(X))^N$, $(P)^N$.

9. Проверить $N = N_{max}$? Если **нет**, то положить $N = N + 1$ и перейти к шагу 2, если **да**, то записать ответ. В качестве ответа записывается последний рекорд.

Для анализа эффективности построенного адаптивного алгоритма был проведен вычислительный эксперимент, результаты которого также представлены в [8]. Один из выводов на основании эксперимента заключается в том, что на итоговый результат существенное влияние оказывает параметр p_u . Причем при разном количестве итераций и для матриц разной размерности наилучший результат достигается с разными значениями p_u (рис. 1).

Улучшение поисковых способностей алгоритма

Описанные в предыдущем разделе (и более подробно в [8]) наблюдения приводят к идее изменения параметра p_u на каждой итерации по некоторой заданной функции. Выбор функции, по которой изменяется p_u , основывается на следующих положениях:

- сначала осуществляется поиск в окрестности некоторого текущего решения для его улучшения;
- затем происходит выход из окрестности данного решения, с целью избежать «застревания» в локальном минимуме;
- после чего начинается поиск в окрестности другого решения.

Схематично данная идея представлена на рис. 2.

Для определения понятия окрестности решения X^N аксиальной ЗОН воспользуемся определением расстояния Хэмминга.

Определение 1. [6] Расстояние Хэмминга – число позиций, в которых различаются соответствующие элементы двух матриц одинаковой размерности.

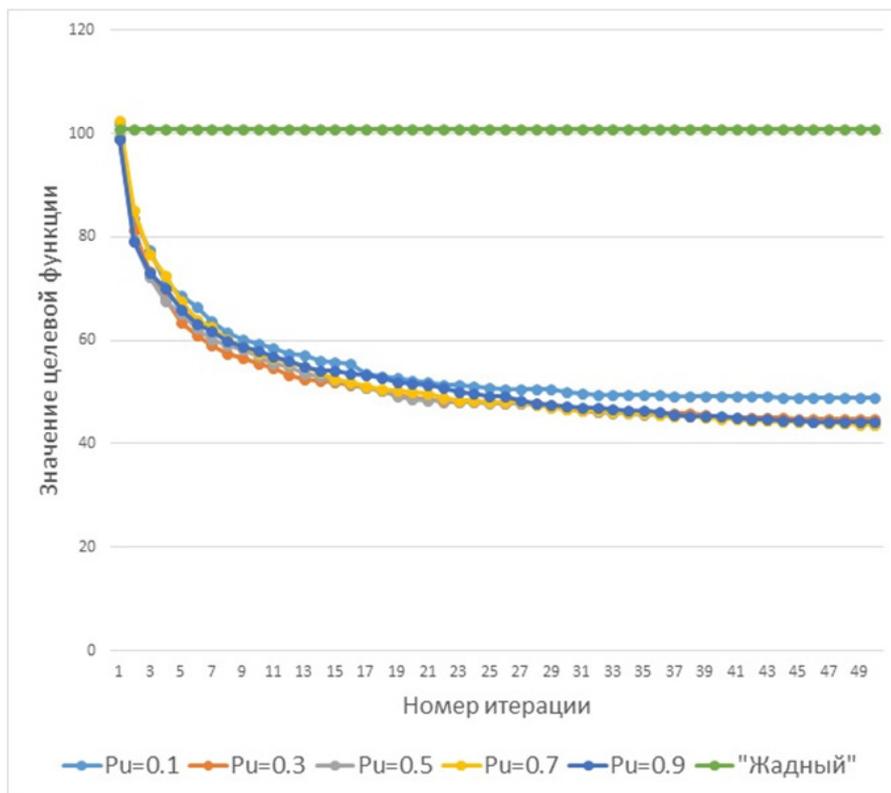


Рис. 1. График работы алгоритма с разными параметрами p_u

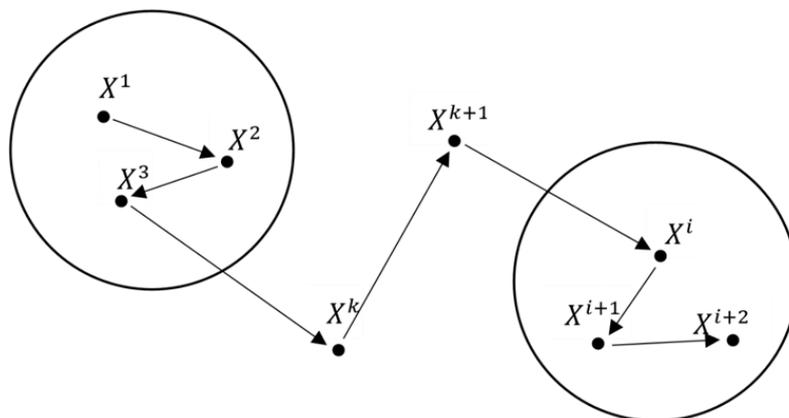


Рис. 2. Поиск решений в окрестности текущего и выход из локального минимума

Определение 2. k -окрестностью решения X трехиндексной аксиальной ЗОН назовем множество $\bar{\Omega}$ решений \tilde{X} , для которых выполняется неравенство $d(X, \tilde{X}) \leq k$, где $d(X, \tilde{X})$ – расстояние Хэмминга, $k \in \mathbb{Z}$.

Замечание 1. При $k = 2n$, окрестность допустимой точки трехиндексной аксиальной ЗОН – есть все множество допустимых решений.

Основной вопрос, ответ на который можно получить экспериментально, заключается в том, каким именно образом следует изменять значения параметра p_u .

Значение параметра $(\pi_{ij}^k)^{N+1}$ влияет на увеличение или уменьшение текущей вероятности $(p_{ij}^k)^N$, представляя собой полный аналог направления движения в градиентном алгоритме. Величина p_u , в свою очередь, говорит о том, на сколько нужно изменить эту вероятность, что соответствует размеру шага.

Исходя из этого, рассмотрим две пограничные ситуации. Положим $p_u = 0$. Тогда мы видим, что $(p_{ij}^k)^{N+1} = (p_{ij}^k)^N$ и пересчета вероятностей на $N + 1$ шаге не произойдет. В обратном случае, положив $p_u = 1$, $(p_{ij}^k)^{N+1}$ ста-

новится равным $(\pi_{ij}^k)^{N+1} \in \{0,1\}$ и алгоритм становится детерминированным.

Рассмотрим теперь значения p_u , лежащие в промежутке от 0 до 1. Очевидно, что значения p_u , близкие к нулю, дадут незначительное изменение вероятности $(p_{ij}^k)^{N+1}$, и, наоборот, близкие к единице значительно изменят вероятность $(p_{ij}^k)^{N+1}$ в сторону ее детерминации до 1 или 0 [9].

Результаты вычислительного эксперимента (табл. 2) подтвердили, что при малых значениях параметра пересчета условных вероятностей p_u (порядка $\frac{1}{n^2}$, где n – размерность матрицы) расстояние Хэмминга между решениями аксиальной ЗОН мало (от итерации к итерации решение мало изменяется), в то время, как при значениях p_u , близких к 1, расстояние Хэмминга стремится к $2n$, т. е. решение практически полностью меняется.

Таким образом, идею изменения параметра p_u , описанную выше, можно переформулировать следующим образом:

- сначала берется малое значение параметра p_u , что позволяет осуществлять поиск в окрестности некоторого текущего решения для его улучшения;
- затем происходит увеличение p_u с целью выхода из окрестности данного решения, дабы избежать «застревания» в локальном минимуме;
- после чего p_u вновь уменьшается для того, чтобы попасть в окрестность другого решения.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

В табл. 1 приведены значения целевой функции аксиальной ЗОН для матриц разной размерности. В ходе вычислительного эксперимента проводились серии по 100 испытаний для каждого случая. Матрицы заполнялись случайными числами из диапазона от 1 до 100.

В табл. 1 жирным шрифтом выделены несколько лучших значений при разных значениях параметра p_u .

В табл. 2 и на рис. 3 представлена зависимость расстояния Хэмминга от параметра p_u для разных размерностей задачи.

Как показывают результаты тестов, расстояние Хэмминга напрямую зависит от параметра p_u и от размерности задачи (при значениях параметра p_u меньше $\frac{1}{n^2}$, где n – размерность матрицы, расстояние Хэмминга стремится к нулю, при значениях, близких к 1, расстояние Хэмминга стремится к $2n$).

Дальнейшая серия экспериментов была проведена с целью подтвердить или опровергнуть предположение, согласно которому изменение параметра пересчета вероятностей p_u на каждой итерации по некоторой заданной функции должно привести к улучшению значения целевой функции.

В ходе эксперимента рассматривались следующие классы функций:

$$f_1(i, a, b, c, d) = ae^{-b(i-c)^2} + d,$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ – заданные числа, $i \in \mathbb{Z}$ – номер итерации (рис. 4);

Таблица 1

Сравнение значений целевой функции в зависимости от параметра p_u и числа итераций

Размерность		10×10×10			50×50×50			100×100×100		
Число итераций		10	50	100	10	50	100	10	50	100
Параметр p_u	$p_u = 0.001$	90	89	89	103	96	89	135	125	124
	$p_u = 0.01$	78	67	64	85	74	71	132	119	117
	$p_u = 0.1$	51	43	42	84	71	68	132	122	118
	$p_u = 0.2$	49	41	39	86	74	69	135	123	120
	$p_u = 0.3$	52	41	39	87	75	71	135	123	121
	$p_u = 0.5$	53	40	38	89	78	73	137	124	123
	$p_u = 0.7$	55	40	37	92	78	74	137	127	123
	$p_u = 0.9$	56	39	37	95	79	74	138	127	122

Таблица 2

Сравнение средних значений расстояния Хэмминга в зависимости от параметра p_u

Размерность		10×10×10	50×50×50	100×100×100
Параметр p_u	$p_u = 0.0001$	0	2	6
	$p_u = 0.0005$	0	5	69
	$p_u = 0.001$	1	32	111
	$p_u = 0.005$	1	56	135
	$p_u = 0.01$	4	65	153
	$p_u = 0.05$	7	79	172
	$p_u = 0.1$	10	81	180
	$p_u = 0.2$	13	84	183
	$p_u = 0.3$	15	88	189
	$p_u = 0.5$	15	90	192
	$p_u = 0.7$	16	90	193
	$p_u = 0.9$	17	93	195

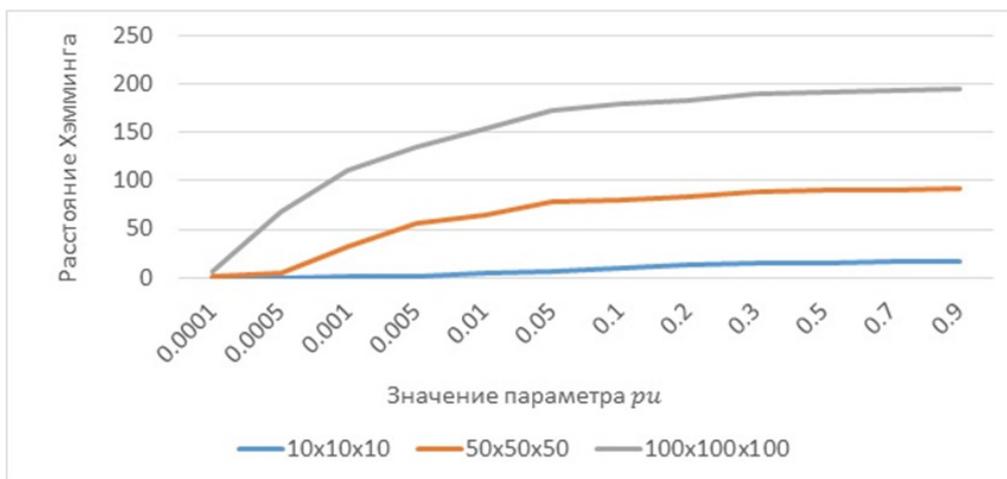


Рис. 3. Зависимость расстояния от параметра p_u

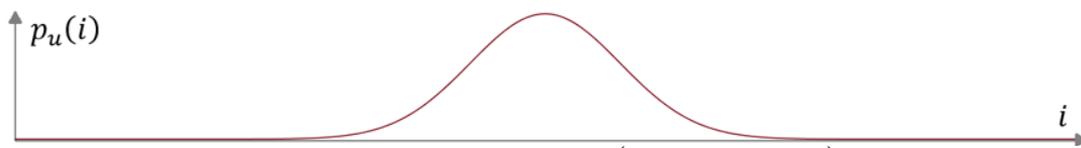


Рис. 4. График функции $f_1(i, 0.2, 0.2, 25, 0.1)$



Рис. 5. График функции $f_2(i, 0.1, 0.25, 0)$

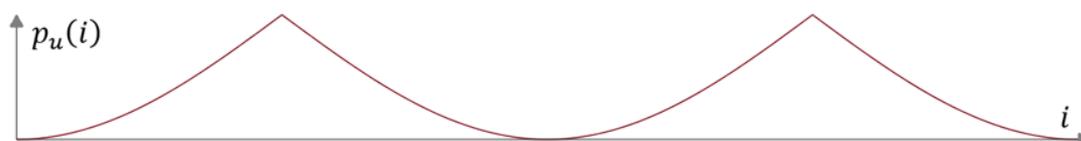


Рис. 6. График функции $f_3(i, 0.1, 0.25\pi, 0)$

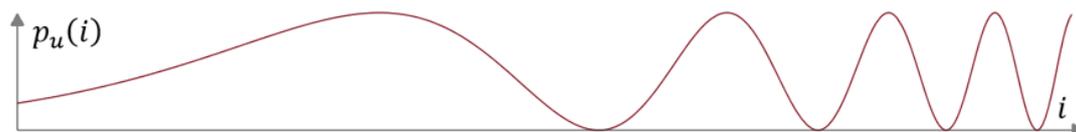


Рис. 7. График функции $f_4(i, 0.05, 0.1, 0)$

Таблица 3

Сравнение значений целевой функции в зависимости от функции $p_u(i)$ и числа итераций для матриц разной размерности

Размерность		50×50×50		100×100×100	
Число итераций (N)		50	100	100	200
Функция $p_u(i)$	$p_u = const$ (лучший результат)	71	68	117	115
	$p_u(i) = f_1(i, 0.3, 0.1, N/2, 0.01)$	70	68	115	112
	$p_u(i) = f_1(i, 0.2, 0.2, N/2, 0.1)$	69	67	116	114
	$p_u(i) = f_2(i, 0.1, 0.25, 0.01)$	67	65	110	107
	$p_u(i) = f_2(i, 0.5, 0.5, 0.05)$	66	63	114	111
	$p_u(i) = f_3(i, 0.1, 0.25\pi, 0.01)$	71	70	115	113
	$p_u(i) = f_3(i, 0.2, 0.50\pi, 0.01)$	70	66	116	113
	$p_u(i) = f_4(i, 0.05, 4/N, 0.05)$	68	64	115	114
	$p_u(i) = f_4(i, 0.1, 3/N, 0.01)$	70	66	112	109

$$f_2(i, a, b, c) = a(1 - \cos(bx)) + c,$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ – заданные числа, $i \in \mathbb{Z}$ – номер итерации (рис. 5);

$$f_3(i, a, b, c) = a(1 - |\cos(bx)|) + c,$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ – заданные числа, $i \in \mathbb{Z}$ – номер итерации (рис. 6);

$$f_4(i, a, b, c) = a(1 - \cos(e^{bx})) + c,$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ – заданные числа, $i \in \mathbb{Z}$ – номер итерации (рис. 7);

В табл. 3 внесены значения целевой функции аксиальной ЗОН при приведенных выше функциях $p_u(i) = f_k(i)$.

В табл. 3 жирным шрифтом выделены несколько лучших значений при различном изменении параметра p_u . Вычислительный эксперимент с $p_u = const$ показал, что наилучшие результаты достигаются в следующих ситуациях:

- для матриц размерности $50 \times 50 \times 50$ при $p_u = 0.1$,
- для матриц размерности $100 \times 100 \times 100$ при $p_u = 0.01$.

Как видно из табл. 3, использование функциональной зависимости параметра p_u от числа итераций приводит к улучшению результатов, особенно на больших итерациях ($N > n$). Однако для задач разных размерностей сами функции могут быть разными. Лучшие значения целевой функции аксиальной ЗОН были показаны с использованием функциональных зависимостей $f_2(i, a, b, c) = a(1 - \cos(bx)) + c$ и $f_4(i, a, b, c) = a(1 - \cos(e^{bx})) + c$.

ВЫВОДЫ

1. В целом, предположение об улучшении значений целевой функции трехиндексной аксиальной ЗОН при изменении p_u по заданной функции подтвердилось.

2. Наилучший результат дают периодические функции, однако это улучшение проявляется при относительно большом количестве итераций ($N > n$).

3. Для матриц разной размерности должны использоваться разнообразные функции пересчета параметра p_u .

ПЕРСПЕКТИВЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

На основании выше изложенного можно говорить, что дальнейшие исследования в области изучения адаптивного алгоритма могут быть направлены на поиск новых функций изменения параметра p_u . Например, функций, изменяющих p_u пропорционально расстоянию Хэмминга между текущим и прошлым решениями, функций, зависящих от смены рекорда и т. п. Также отдельное исследование должно быть посвящено уменьшению времени работы алгоритма, например, с помощью составления специальной дополнительной матрицы, которая позволит избежать множественных вложенных обходов по кубической матрице затрат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афраймович, Л. Г.* Многоиндексные транспортные задачи с декомпозиционной структурой / Л. Г. Афраймович // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 1. – С. 130–147.
2. *Афраймович, Л. Г.* Эвристический метод решения целочисленных декомпозиционных многоиндексных задач / Л. Г. Афраймович // Автоматика и телемеханика. – 2014. – № 8. – С. 3–18.
3. *Гимади, Э. Х.* Аксиальные трехиндексные задачи о назначениях и коммивояжера: быстрые приближенные алгоритмы и их вероятностный анализ / Э. Х. Гимади, А. И. Сердюков // Изв. Вузов. Математика. – 1999. – № 12. – С. 19–25.
4. *Корбут, А. А.* Дискретное программирование / А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн [под ред. Д. Б. Юдина]. – М. : Наука, 1969. – 368 с.
5. *Львович, Я. Е.* Конструирование адаптивных схем перебора для решения дискретных задач оптимизации / Я. Е. Львович, А. И. Каплинский, Г. Д. Чернышова, О. И. Черных // В сб.: Актуальные проблемы фундаментальных наук. – М. : Изд-во МГТУ, 1991.
6. *Малюгина, О. А.* Задача комплектования штатов / О. А. Малюгина, С. Н. Медведев, Г. Д. Чернышова // Системное моделирование социально-экономических процессов : труды 31-й Международной научной школы-семинара, Воронеж, 1–5 октября 2008 г. : в 3 ч. – Воронеж : ИПЦ Воронеж. гос. ун-т., 2008. – Ч. III. – С. 265–272.
7. *Медведев, С. Н.* Адаптивные алгоритмы решения трехиндексных задач о назначениях / С. Н. Медведев // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. VI Международ. конф. «ПМТУКТ-2013», Воронеж, 10–16 сентября 2013 г. – Воронеж: ИПЦ Воронеж. гос. ун-т, 2013. – С. 153–156.
8. *Трегубов, А. Г.* Вероятностный подход к решению трехиндексной аксиальной задачи о назначениях / А. Г. Трегубов, С. Н. Медведев // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2015. – № 4. – 12 с.
9. *Чернышова, Г. Д.* Об использовании вероятностного аналога алгоритма покоординатного спуска в задаче о минимальном покрытии / Г. Д. Чернышова, С. В. Писковецкий – Воронеж: Воронеж. гос. ун-т., 2001. – 14 с.
10. *Crama, Y.* Approximation algorithms for three-dimensional assignment problems with triangle inequalities / Y. Crama, F.C.R. Spieksma // European J. Oper. Res. – 1992. – Vol. 60. – P. 273–279.

Трегубов А. Г. – аспирант кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета.
E-mail: n.a.p.o.l.e.o.n@mail.ru

Медведев С. Н. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета.
E-mail: s_n_medvedev@mail.ru

Tregubov A. G. – postgraduate of the Department of Computing Mathematics and Applied Information Technology, Applied Mathematics, Informatics and Mechanics Faculty, Voronezh State University.
E-mail: n.a.p.o.l.e.o.n@mail.ru

Medvedev S. N. – Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Lecturer of the Department of Computing Mathematics and Applied Information Technology, Applied Mathematics, Informatics and Mechanics Faculty, Voronezh State University.
E-mail: s_n_medvedev@mail.ru