УДК 517.97 : 532.526

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССООБМЕНА НА ПРОНИЦАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ГИПЕРЗВУКОВЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ. IV. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ НА ВСЁМ УЧАСТКЕ УПРАВЛЕНИЯ

Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко

Казанский национальный исследовательский технический университет (КНИТУ - КАИ) им. А. Н. Туполева

Поступила в редакцию 13.06.2018 г.

Аннотация. Рассматриваются задачи математического моделирования эффективного управления тепломассообменом и трением в ламинарном пограничном слое на проницаемых цилиндрических и сферических поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. Приводятся прямые и обратные задачи в обычной и экстремальной постановках на всём участке управления. Проводится классификация задач управления тепломассоообменом и трением.
Ключевые слова: управление, тепломассообмен, трение, ламинарный пограничный слой, проницаемые поверхности, гиперзвуковые течения, прямые задачи, обратные задачи, экстремальные задачи.
Annotation. The problems of mathematical modeling of effective control of heat and mass transfer and friction in laminar boundary layer on permeable cylindrical and spherical surfaces of hypersonic aircraft are considered. Direct and inverse problems are presented in the ordinary and extreme formulations for the entire segment of control. Classification of the problems of control of heat and mass transfer and friction is carried out.
Keywords: control, heat and mass transfer, friction, laminar boundary layer, permeable surfaces, hypersonic flows, direct problems, inverse problems, extreme problems.

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа, как и [1], являющаяся продолжением цикла статей [2–4], посвящённых математическому моделированию синтеза эффективного управления тепломассоообменом (ТМО) и трением в ламинарном пограничном слое (ЛПС) на проницаемых цилиндрических и сферических поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА), представляет собой расширенный вариант материалов докладов, представленных на Международную конференцию «Крейн-100» [5, 6] и на Международную конференцию «ВЗМШ-2018» [7, 8] (секция «Качественные методы математического моделирования»).

В данной работе, продолжающей исследования [2–4, 9–17]:

1) рассматриваются прямые и обратные задачи управления ТМО и трением в ЛПС на проницаемых поверхностях ГЛА в обычной и экстремальной постановках;

2) приводятся постановки гибридной прямой экстремальной задачи;

3) детализируются (по сравнению с [4]) постановки двумерной обратной задачи;

4) описываются дополнительные ограничения для обратных задач в аппроксимационной постановке;

5) проводится классификация перечисленных задач на **всём** участке управления;

6) приводятся иллюстрирующие классификацию таблицы.

Являясь продолжением [2–4, 9–17], данная статья сохраняет введённые в них обозначения.

1. ПРЯМАЯ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ

1.1. Рассмотренную в [2, 9, 14] *прямую задачу*

$$(m,\tau,s)\to(q,f,\eta;Q,F,N) \qquad (1)$$

обозначим ПЗ. Здесь для $x\in X=[0;1]$, $m=m(x)$ – *вдув*, $\tau=\tau(x)$ – *температурный фактор*, $s=s(x)$ – *магнитное поле*, $q=q(x;m,\tau,s)$ – *локальный тепловой поток*, $f=f(x;m,\tau,s)$ – *локальное напряжение касательного трения*, $\eta=\eta(x;m,\tau,s)$ – *локальная мощность обеспечивающей вдув системы*, $Q=Q(X;m,\tau,s)$ – *интегральный тепловой поток*, $F=F(X;m,\tau,s)$ – *суммарная сила ньютоновского трения*, $N=N(X;m,\tau,s)$ – *мощность обеспечивающей вдув системы*, ось x направлена вдоль контура тела. Рассмотренные в [2] *обратные задачи* по m:

$$q^{\vee}\to m^{\sim},\ (m^{\sim},\tau,s)\to(q^{\sim}\approx q^{\vee},f^{\sim}), \qquad (2)$$

$$f^{\vee}\to m^{\sim},\ (m^{\sim},\tau,s)\to(q^{\sim},f^{\sim}\approx f^{\vee}), \qquad (3)$$

обратные задачи по τ:

$$q^{\vee}\to \tau^{\sim},\ (m,\tau^{\sim},s)\to(q^{\sim}\approx q^{\vee},f^{\sim}), \qquad (4)$$

$$f^{\vee}\to \tau^{\sim},\ (m,\tau^{\sim},s)\to(q^{\sim},f^{\sim}\approx f^{\vee}) \qquad (5)$$

и рассмотренную в [4] *двумерную обратную задачу*:

$$(q^{\vee},f^{\vee})\to(m^{\sim},\tau^{\sim}),$$
$$(m^{\sim},\tau^{\sim},s)\to(q^{\sim}\approx q^{\vee},f^{\sim}\approx f^{\vee}) \qquad (6)$$

обозначим $ОЗ^q_m$, $ОЗ^f_m$, $ОЗ^q_\tau$, $ОЗ^f_\tau$, $ОЗ^{(q,f)}_{(m,\tau)}$, соответственно. Здесь $q^{\vee}$ и $f^{\vee}$ - наблюдаемые, $q^{\sim}$ и $f^{\sim}$ – вычисляемые, $m^{\sim}$ и $\tau^{\sim}$ – восстанавливаемые. Таким образом, перечисленные задачи реализуются в зависимости от того, какие **два** из четырёх параметров m, τ, q, f – **свободны** (“0” в табл. 1), а какие – **заданы** (“1” в табл. 1). В частности, для ПЗ характерно **отсутствие** наблюдаемых q, f, а для ОЗ – **наличие** хотя бы одного из них.

Таблица 1

	m	τ	q	f
ПЗ	1	1	0	0
$ОЗ^q_m$	0	1	1	0
$ОЗ^f_m$	0	1	0	1
$ОЗ^q_\tau$	1	0	1	0
$ОЗ^f_\tau$	1	0	0	1
$ОЗ^{(q,f)}_{(m,\tau)}$	0	0	1	1
	δ^m	δ^τ	δ^q	δ^f

1.2. В [2, 4] управления: $m(x)$, $\tau(x)=T_w(x)/T_{e_0}$, $s(x)=\sigma B_0^2(x)$, задавались, а $m^{\sim}$, $\tau^{\sim}$ – разыскивались в виде элементов [17] для сетки *управления*

$$X^{\wedge}:\ x_0^{\wedge}=0<x_1^{\wedge}<\ldots<x_{n^{\wedge}}^{\wedge}=1 \qquad (7)$$

для некоторого $n^{\wedge}\geq 1$; наблюдаемые значения $q^{\vee}=(q_j^{\vee})_{j=0,\ldots,n^{\vee}}$, $f^{\vee}=(f_j^{\vee})_{j=0,\ldots,n^{\vee}}$ задавались, а значения $q^{\sim}=(q_j^{\sim})_{j=0,\ldots,n^{\vee}}$, $f^{\sim}=(f_j^{\sim})_{j=0,\ldots,n^{\vee}}$ вычислялись для всех узлов сетки *наблюдения*

$$X^{\vee}:\ x_0^{\vee}=0<x_1^{\vee}<\ldots<x_{n^{\vee}}^{\vee}=1 \qquad (8)$$

для некоторого $n^{\vee}\geq 1$. Как в [2, 4], будем предполагать, что

$$X^{\wedge}\subseteq X^{\vee}, \qquad (9)$$

а *ограничения* [17] на $m^{\sim}$ и на $\tau^{\sim}$ для $x\in[x_{j-1}^{\wedge};x_j^{\wedge}]$, $j=1,\ldots,n^{\wedge}$ имеют вид

$$(m^{\sim})^{(k)}(x)\in I_{j,k}^m \text{ для } k=0,\ldots,\nu^m; \qquad (10)$$

$$(\tau^{\sim})^{(k)}(x)\in I_{j,k}^\tau \text{ для } k=0,\ldots,\nu^\tau \qquad (11)$$

для некоторых

$$I_{j,k}^m=[b_{j,k}^m;t_{j,k}^m],\ \nu^m\geq 0,$$
$$I_{j,k}^\tau=[b_{j,k}^\tau;t_{j,k}^\tau],\ \nu^\tau\geq 1.$$

1.3. Одномерные ОЗ (далее – ООЗ) (2), (3) имеют две возможные постановки [2, 13]: *интерполяционную* (далее – ИОЗ), когда для заданных $p\in[1;+\infty]$ и $\varepsilon>0$ требуется в условиях (10) отыскать управление $c=m^{\sim}$ так, чтобы для заданного локального параметра ($y=q$ для (2) или $y=f$ для (3)) выполнялось условие близости

$$R_p(y^{\sim};y^{\vee})\leq\varepsilon, \qquad (12)$$

где при $p=+\infty$:

$$R_\infty(y^{\sim};y^{\vee})=\max_{j=0,\ldots,n^{\vee}}\left|y_j^{\sim}-y_j^{\vee}\right|, \qquad (13)$$

при $p \in [1;+\infty)$:

$$R_p(y^{\sim}; y^{\vee}) = \left(\sum_{j=0}^{n^{\vee}} \left| y_j^{\sim} - y_j^{\vee} \right|^p \right)^{1/p}, \qquad (14)$$

и *аппроксимационную* (далее – АОЗ), когда для заданного $p \in [1;+\infty]$ в условиях (10) требуется отыскать управление $c = m^{\sim}$, как приближённое решение задачи

$$\inf_c R_p\left(y^{\sim}; y^{\vee}\right). \qquad (15)$$

Постановки ООЗ (4), (5) – аналогичны: в условиях (11) требуется отыскать $c = \tau^{\sim}$.

Варианты ИОЗ ($\delta^i = 1$ и $\delta^a = 0$), где

$$\delta^i = \delta^{i:q} \vee \delta^{i:f}, \qquad (16)$$

$$\delta^a = \delta^{a:q} \vee \delta^{a:f}, \qquad (17)$$

и АОЗ ($\delta^i = 0$ и $\delta^a = 1$) приведены в табл. 2.

Отметим, что в табл. 1

$$\delta^q = \delta^{i:q} \vee \delta^{a:q}, \qquad (18)$$

$$\delta^f = \delta^{i:f} \vee \delta^{a:f}. \qquad (19)$$

В (16)–(19) символ “$\vee$” означает логическую дизъюнкцию, логическому значению “истина” сопоставлено целое значение “1”, логическому значению “ложь” – целое значение “0”.

Таблица 2

	m	τ	q		f	
иоз$_m^q$	0	1	1	0	0	0
иоз$_\tau^q$	1	0	1	0	0	0
иоз$_m^f$	0	1	0	0	1	0
иоз$_\tau^f$	1	0	0	0	1	0
аоз$_m^q$	0	1	0	1	0	0
аоз$_\tau^q$	1	0	0	1	0	0
аоз$_m^f$	0	1	0	0	0	1
аоз$_\tau^f$	1	0	0	0	0	1
	δ^m	δ^τ	$\delta^{i:q}$	$\delta^{a:q}$	$\delta^{i:f}$	$\delta^{a:f}$

1.4. Двумерная ОЗ (далее – ДОЗ) (6) имеет интерполяционную, аппроксимационную и две смешанные постановки.

В интерполяционной ОЗ$_{(m,\tau)}^{(i:q,i:f)}$ [4] (далее – ИОЗ$_{(m,\tau)}^{(q,f)}$) для заданных $p \in [1;+\infty]$ и $\varepsilon > 0$ требуется в условиях (10) и (11) отыскать управления $c = (m^{\sim}, \tau^{\sim})$ так, чтобы выполнялось условие близости

$$R_p\left((q^{\sim}; f^{\sim}); (q^{\vee}; f^{\vee})\right) \le \varepsilon, \qquad (20)$$

где (с учётом обезразмеренности q и f) при $p = +\infty$:

$$R_\infty\left((q^{\sim}; f^{\sim}); (q^{\vee}; f^{\vee})\right) =$$
$$= \max\left\{R_\infty(q^{\sim}; q^{\vee}); R_\infty(f^{\sim}; f^{\vee})\right\}, \qquad (21)$$

при $p \in [1;+\infty)$:

$$R_p\left((q^{\sim}; f^{\sim}); (q^{\vee}; f^{\vee})\right) =$$
$$= \left(R_p^p(q^{\sim}; q^{\vee}) + R_p^p(f^{\sim}; f^{\vee})\right)^{1/p}, \qquad (22)$$

где в правых частях (21) и (22) используются (13) и (14).

В аппроксимационной ОЗ$_{(m,\tau)}^{(a:q,a:f)}$ [4] (далее – АОЗ$_{(m,\tau)}^{(q,f)}$) для заданного $p \in [1;+\infty]$ в условиях (10) и (11) требуется отыскать управления $c = (m^{\sim}, \tau^{\sim})$, как приближённое решение задачи

$$\inf_c R_p\left((q^{\sim}; f^{\sim}); (q^{\vee}; f^{\vee})\right). \qquad (23)$$

В смешанной ОЗ$_{(m,\tau)}^{(i:q,a:f)}$ (далее – СОЗ) для заданных $p \in [1;+\infty]$ и $\varepsilon > 0$ требуется в условиях (10) и (11) отыскать управления $c = (m^{\sim}, \tau^{\sim})$, как приближённое решение задачи (15) так, чтобы для q выполнялось условие близости (12).

Постановка СОЗ$_{(m,\tau)}^{(a:q,i:f)}$ – аналогична: условие близости (12) должно выполняться для f.

Варианты постановок приведены в табл. 3.

Таблица 3

	m	τ	q		f	
иоз$_{m,\tau}^{q,f}$	0	0	1	0	1	0
аоз$_{m,\tau}^{q,f}$	0	0	0	1	0	1
соз$_{m,\tau}^{i:q,a:f}$	0	0	1	0	0	1
соз$_{m,\tau}^{a:q,i:f}$	0	0	0	1	1	0
	δ^m	δ^τ	$\delta^{i:q}$	$\delta^{a:q}$	$\delta^{i:f}$	$\delta^{a:f}$

1.5. Замечание. Как в [3] будем предполагать, что (10), (11) и условия (10)–(16) из [17] обеспечивают непустые множества допустимых управлений $m^{\sim}$ и $\tau^{\sim}$.

Если ограничения (10), (11) для свободных управлений $m^{\sim}$ и/или $\tau^{\sim}$ таковы, что

$$b_{j,0}^m = t_{j,0}^m \qquad (24)$$

и/или

$$b_{j,0}^{\tau} = t_{j,0}^{\tau} \tag{25}$$

для всех $j = 1, \ldots, n^{\wedge}$, то ДОЗ вырождается в ПЗ или в ООЗ, а ООЗ – в ПЗ с

$$m_j = b_{j,0}^{m} \text{ и/или } \tau_j = b_{j,0}^{\tau}. \tag{26}$$

В случае вырождения в ПЗ исходные ОЗ будут иметь решения (26), только если

$$q^{\vee} \approx q \tag{27}$$

и/или

$$f^{\vee} \approx f \tag{28}$$

для q и/или f из (1).

2. ПРЯМЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

2.1. ПЗ (1) является частным случаем (при (24) или при (25) для $j = 1, \ldots, n^{\wedge}$) *прямой экстремальной задачи* (ПЭЗ), рассмотренной в [10–12, 18]. В базовых $\underline{\text{ПЭЗ}}_m^Q$, $\overline{\text{ПЭЗ}}_m^Q$ для заданных управлений τ и s требуется в условиях (10) найти управления $m_{\underline{Q}}^{\sim}$, $m_{\overline{Q}}^{\sim}$ и значения

$$\underline{Q}^{\sim} = Q\left(X; m_{\underline{Q}}^{\sim}, \tau, s\right), \tag{29}$$

$$\overline{Q}^{\sim} = Q\left(X; m_{\overline{Q}}^{\sim}, \tau, s\right), \tag{30}$$

как приближённые решения задач

$$\inf_{m^{\sim}} Q\left(X; m^{\sim}, \tau, s\right), \tag{31}$$

$$\sup_{m^{\sim}} Q\left(X; m^{\sim}, \tau, s\right), \tag{32}$$

соответственно. Базовые $\underline{\text{ПЭЗ}}_m^F$, $\underline{\text{ПЭЗ}}_\tau^Q$, $\underline{\text{ПЭЗ}}_\tau^F$, $\overline{\text{ПЭЗ}}_m^F$, $\overline{\text{ПЭЗ}}_\tau^Q$, $\overline{\text{ПЭЗ}}_\tau^F$ формулируются аналогично – с помощью замен Q на F или/и τ на m, а $m^{\sim}$ на $\tau^{\sim}$ и условий (10) на (11).

Для перечисленных ПЭЗ характерно **отсутствие** наблюдаемых параметров (как q, так и f), наличие **одного** (m или τ) заданного ("1" в табл. 4) и **одного** свободного ("0" в табл. 4) управляющего параметра, а также **одного** (Q или F) минимизируемого или максимизируемого функционала ("-1" или "$+1$" в табл. 4).

Таблица 4

	m	τ	Q	F
пэз$_m^Q$	0	1	± 1	0
пэз$_m^F$	0	1	0	± 1
пэз$_\tau^Q$	1	0	± 1	0
пэз$_\tau^F$	1	0	0	± 1
	δ^m	δ^τ	Δ^Q	Δ^F

2.2. В [10–12,18] базовые ПЭЗ$_m^Q$, ПЭЗ$_m^F$, ПЭЗ$_\tau^Q$, ПЭЗ$_\tau^F$ для заданного отрезка

$$I^N = [\underline{N}; \overline{N}]$$

рассматривались в условиях *дополнительных ограничений*

$$N^{\sim} \in I^N, \tag{33}$$

где $N^{\sim} = N\left(X; m^{\sim}, \tau, s\right)$ для ПЭЗ$_m^Q$, ПЭЗ$_m^F$ и $N^{\sim} = N\left(X; m, \tau^{\sim}, s\right)$ для ПЭЗ$_\tau^Q$, ПЭЗ$_\tau^F$.

Кроме (33) ПЭЗ$_m^Q, \ldots,$ ПЭЗ$_\tau^F$ для заданных отрезков

$$I^Q = [\underline{Q}; \overline{Q}],$$

$$I^F = [\underline{F}; \overline{F}]$$

могут быть дополнены ограничениями

$$Q^{\sim} \in I^Q, \tag{34}$$

$$F^{\sim} \in I^F, \tag{35}$$

где $Q^{\sim}$ и $F^{\sim}$ в соответствующих задачах вычисляются аналогично $N^{\sim}$.

Ограничения могут быть наложены на вычисляемые локальные параметры q, f, η аналогично (10) и (11): для $x \in [x_{j-1}^{\vee}; x_j^{\vee}]$, $j = 1, \ldots, n^{\vee}$ они имеют вид

$$(q)^{(k)}(x) \in I_{j,k}^q \text{ для } k = 0, \ldots, \nu^q; \tag{36}$$

$$(f)^{(k)}(x) \in I_{j,k}^f \text{ для } k = 0, \ldots, \nu^f; \tag{37}$$

$$(\eta)^{(k)}(x) \in I_{j,k}^\eta \text{ для } k = 0, \ldots, \nu^\eta \tag{38}$$

для некоторых

$$I_{j,k}^q = [b_{j,k}^q; t_{j,k}^q], \quad \nu^q \geq 0,$$

$$I_{j,k}^f = [b_{j,k}^f; t_{j,k}^f], \quad \nu^f \geq 0,$$

$$I_{j,k}^\eta = [b_{j,k}^\eta; t_{j,k}^\eta], \quad \nu^\eta \geq 0.$$

2.3. Замечание. Некорректный выбор I^Q, I^F, I^N, I^q, I^f, I^η может привести к опустошению множества допустимых управлений.

2.4. В [18] с учётом обезразмеренности Q и F рассмотрена *гибридная* ПЭЗ$_m^{(Q,F)}$ (далее – ГПЭЗ) *с постоянной* φ: для заданных τ, s, I^N и $\varphi \in [0; 2\pi]$ требуется в условиях (10) и (33) найти управление $m^{\sim}$ и значение

$$\Psi^{\sim} = \Psi\left(X; m^{\sim}, \tau, s; \varphi\right), \tag{39}$$

как приближённое решение задачи

$$\inf_{m^{\sim}} \Psi\left(X; m^{\sim}, \tau, s; \varphi\right) \tag{40}$$

минимизации функционала

$$\Psi\left(X; m, \tau, s; \varphi\right) = \cos(\varphi) \cdot Q + \sin(\varphi) \cdot F. \tag{41}$$

Постановка ГПЭЗ$_\tau^{(Q,F)}$ *с постоянной* φ – аналогична: в условиях (11) и (33) требуется найти управление $\tau^{\sim}$.

Частные случаи ГПЭЗ$_c^{(Q,F)}$, где $c = m$ или $c = \tau$, для $\varphi \in \{0; \pi/2; \pi; 3\pi/2\}$ приведены в табл. 5.

Таблица 5

φ	$\cos(\varphi)$	$\sin(\varphi)$	ГПЭЗ$_c^{(Q,F)}$
0	$+1$	0	$\underline{\text{ПЭЗ}}_c^Q$
$\pi/2$	0	$+1$	$\underline{\text{ПЭЗ}}_c^F$
π	-1	0	$\overline{\text{ПЭЗ}}_c^Q$
$3\pi/2$	0	-1	$\overline{\text{ПЭЗ}}_c^F$
	$-\Delta^Q$	$-\Delta^F$	

Величины $\cos(\varphi)$ и $\sin(\varphi)$ в (41) являются обобщением чисел $(-\Delta^Q)$ и $(-\Delta^F)$ из табл. 4, 5.

ГПЭЗ со вхождением N (с учётом её обезразмеренности) в функционал, подобный (41), рассматривалась в [18].

2.5. В ГПЭЗ$_m^{(Q,F)}$ и ГПЭЗ$_\tau^{(Q,F)}$ вместо (41) можно применить целевую функцию

$$\Psi(X; m, \tau, s; \varphi) = \\ = \int_X \left(\cos(\varphi(x)) \cdot \frac{dQ}{dx} + \right. \\ \left. + \sin(\varphi(x)) \cdot \frac{dF}{dx} \right) \cdot dx, \qquad (42)$$

где $\varphi(x)$ – кусочно-непрерывная (с возможными разрывами в точках $X^{\wedge}$) ограниченная на X функция, а

$$Q(x) = Q([0;x]; m, \tau, s),$$
$$F(x) = F([0;x]; m, \tau, s).$$

3. ОБРАТНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

3.1. В (базовых) *обратных экстремальных задачах в интерполяционной постановке* $\underline{\text{ОЭЗ}}_{(m,\tau)}^{(q,F)}$, $\overline{\text{ОЭЗ}}_{(m,\tau)}^{(q,F)}$ **свободны** два управляющих параметра (как m, так и τ), а из наблюдаемых локальных параметров q – **задан**, а f – **свободен**. Требуется при заданных s, $\varepsilon > 0$, $p \in [1; +\infty]$, в условиях (10), (11) найти управления $\left(m_{\underline{F}}^{\sim}, \tau_{\underline{F}}^{\sim}\right)$, $\left(m_{\overline{F}}^{\sim}, \tau_{\overline{F}}^{\sim}\right)$ и значения

$$\underline{F}^{\sim} = F\left(X; m_{\underline{F}}^{\sim}, \tau_{\underline{F}}^{\sim}, s\right), \qquad (43)$$

$$\overline{F}^{\sim} = F\left(X; m_{\overline{F}}^{\sim}, \tau_{\overline{F}}^{\sim}, s\right), \qquad (44)$$

как приближённые решения задач

$$\inf_{m^{\sim}, \tau^{\sim}} F\left(X; m^{\sim}, \tau^{\sim}, s\right), \qquad (45)$$

$$\sup_{m^{\sim}, \tau^{\sim}} F\left(X; m^{\sim}, \tau^{\sim}, s\right), \qquad (46)$$

соответственно, при выполнении условия (12) для $q^{\vee}$.

Постановки (базовых) $\underline{\text{ОЭЗ}}_{(m,\tau)}^{(Q,f)}$, $\overline{\text{ОЭЗ}}_{(m,\tau)}^{(Q,f)}$ – аналогичны. Указанные случаи представлены в табл. 6.

Таблица 6

	q	f	Q	F
ОЭЗ$_{(m,\tau)}^{(q,F)}$	1	0	0	± 1
ОЭЗ$_{(m,\tau)}^{(Q,f)}$	0	1	± 1	0
	$\delta^{i:q}$	$\delta^{i:f}$	Δ^Q	Δ^F

В ОЭЗ$_{(m,\tau)}^{(q,F)}$ или ОЭЗ$_{(m,\tau)}^{(Q,f)}$ вместо целевой функции

$$\Psi = \left(-\Delta^Q\right) \cdot Q + \left(-\Delta^F\right) \cdot F \qquad (47)$$

с Δ^Q и Δ^F из табл. 6 можно использовать (42). Отметим, что в отличие от ГПЭЗ

в случае ОЭЗ$_{(m,\tau)}^{(q,F)}$ множество решений

$$\sin(\varphi(x)) = 0 \qquad (48)$$

(на X) должно быть **конечно**,

в случае ОЭЗ$_{(m,\tau)}^{(Q,f)}$ множество решений

$$\cos(\varphi(x)) = 0 \qquad (49)$$

(на X) должно быть **конечно**.

3.2. Отметим, что заданной в ОЭЗ$_{(m,\tau)}^{(q,F)}$, ОЭЗ$_{(m,\tau)}^{(Q,f)}$ информации для решения как одномерной (не задано ни одно управление), так и двумерной (не задан второй наблюдаемый параметр) ОЗ недостаточно.

В ОЭЗ$_{(m,\tau)}^{(q,F)}$ по заданному $q^{\vee}$ приближённое значение Q^{Σ} может быть найдено с точностью, определяемой сеткой наблюдения (8) и выбором квадратурной формулы:

$$\left| Q - Q^{\Sigma} \right| < \varepsilon_{\Sigma}. \qquad (50)$$

В этих условиях налагать дополнительные условия вида (34) и/или (36) при малых ε_{Σ} в (50) и ε в (12) – недопустимо. В свою очередь, для оставшейся интегральной характеристики F в условиях решения задач (45) или (46) наложение дополнительных условий вида (35) может либо не повлиять на решение, либо экстремальное значение совпадёт с ограничением, либо область допустимых управлений опустошится. Ограничения в ОЭЗ$^{(q,F)}_{(m,\tau)}$ на N – допустимы, а на f (или η) – допустимы, но могут превратить её в ДОЗ. В ОЭЗ$^{(Q,f)}_{(m,\tau)}$ – аналогично.

3.3. В одномерной ИОЗ^q_m (или ИОЗ$^q_\tau$) по тем же соображениям наложение ограничений на Q недопустимо. В отличие от ОЭЗ вторая (как локальная, так и интегральная) характеристика (т. е. $f^{\sim}$ и $F^{\sim}$) после нахождения свободного управления ($m^{\sim}$ (или $\tau^{\sim}$) при заданном τ (или m)) определяется интегрированием системы ОДУ. Следовательно, наложение ограничений на F также является недопустимым. Аналогично и в ИОЗ^f_m, ИОЗ$^f_\tau$, ИОЗ$^{(q,f)}_{(m,\tau)}$.

В одномерных АОЗ^q_m, АОЗ$^q_\tau$ наложение ограничений на Q, F, N – допустимо, а ограничения на f (или на η) допустимы, но могут превратить их в аналог СОЗ с одним свободным управлением. Аналогично в АОЗ^f_m, АОЗ$^f_\tau$. В АОЗ$^{(q,f)}_{(m,\tau)}$ ограничения на Q, F, N – допустимы.

В СОЗ$^{(i:q,a:f)}_{(m,\tau)}$ по идентичным соображениям наложение дополнительных условий на Q – недопустимо, а на F и N – возможно. Аналогично в СОЗ$^{(a:q,i:f)}_{(m,\tau)}$: наложение дополнительных условий на Q – возможно, а на F – недопустимо.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ свойств математической модели позволил классифицировать задачи управления тепломассоообменом и трением в ламинарном пограничном слое на проницаемых цилиндрических и сферических поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов на **всём** участке управления. Полученная классификация даёт возможность систематизировать порядок проведения вычислительных экспериментов по синтезу эффективного управления с учётом конструкторских и газодинамических ограничений. Изучение результатов вычислительных экспериментов, соответствующих введённым в данной работе прямым и обратным задачам в обычной и экстремальной постановках, составляет предмет отдельного исследования и будет представлено в продолжении данной работы.

Работа выполнена:

а) при государственной поддержке научных исследований, проводимых под руководством ведущих учёных в российских вузах (ведущий учёный - С. А. Исаев, КНИТУ-КАИ, г. Казань) по гранту Правительства России № 14.Z50.31.0003;

б) в рамках Государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации № 9.3236.2017/4.6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. V. Смешанные задачи на фрагментах участка управления / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2018. – № 3. – С. 13–22.

2. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. I. О некоторых постановках и возможности восстановления управления / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 4. – С. 5–12.

3. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. II. О некоторых вычислительных экспериментах / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 4. – С. 13–19.

4. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. III. О постановке двумерных задач и областях допустимых значений «тепло – тре-

ние» / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2017. – № 1. – С. 18–25.

5. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Смешанные обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Международная конференция, посвящённая 100-летию со дня рождения С. Г. Крейна (Воронеж, 13–19 ноября 2017 г.): сборник материалов. – Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2017. – С. 52–55.

6. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Комбинированные обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Международная конференция, посвящённая 100-летию со дня рождения С. Г. Крейна (Воронеж, 13–19 ноября 2017 г.): сборник материалов. – Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2017. – С. 50–52.

7. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Обратные экстремальные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна-2018»: Материалы международной конференции (26–31 января 2018 г.). – Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2018. – С. 153–156.

8. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Экстремальные и неэкстремальные обратные задачи на фрагментах / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна-2018»: Материалы международной конференции (26–31 января 2018 г.). – Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2018. – С. 157–159.

9. *Бильченко Н. Г.* Метод А. А. Дородницына в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 1. – С. 5–14.

10. *Бильченко Н. Г.* Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 83–94.

11. *Бильченко Н. Г.* Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2015. – № 1. – С. 5–8.

12. *Бильченко Н. Г.* Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения «простых» законов вдува / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 95–102.

13. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Об одной обратной задаче тепломассообмена / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Герценовские чтения-2016. Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования» в электронном журнале «Дифференциальные уравнения и процессы управления». – 2016. – № 2. – Ч. 2. – С. 50–56.

14. *Бильченко Н. Г.* Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 3. – С. 5–11.

15. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Об одном специальном случае значения управления (температурного фактора) в точке торможения гиперзвукового потока / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2017. – № 4. – С. 5–12.

16. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Анализ влияния постоянных управляющих воздействий на область значений функционалов гиперзвуковой аэродинамики / Г. Г. Бильченко,

Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2018. – № 2. – С. 5–13.

17. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* О некоторых классах функций, применяемых для решения задач эффективного управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2017. – № 3. – С. 5–15.

18. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Построение области экстремальных значений функционалов / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Герценовские чтения-2016. Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования» в электронном журнале «Дифференциальные уравнения и процессы управления». – 2016. – № 2. – Ч. 2. – С. 56–61.

Бильченко Григорий Григорьевич – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник лаборатории моделирования физико-технических процессов (при кафедре теплотехники и энергетического машиностроения) Казанского национального исследовательского технического университета (КНИТУ-КАИ) им. А. Н. Туполева.
Тел.: +7-905-319-1843
E-mail: <ggbil2@gmail.com>

Bilchenko Grigorij Grigorievich – Candidate of Science in Physics and Mathematics, Researcher of Laboratory of Modeling of Physical and Technical Processes, Department of Heat Engineering and Power Engineering Machinery, Kazan National Research Technical University (KNRTU-KAI) named after A. N. Tupolev.
Tel.: +7-905-319-1843,
E-mail: <ggbil2@gmail.com>

Бильченко Наталья Григорьевна – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник лаборатории моделирования физико-технических процессов (при кафедре теплотехники и энергетического машиностроения) Казанского национального исследовательского технического университета (КНИТУ-КАИ) им. А. Н. Туполева.
Тел.: +7-905-319-1842
E-mail: <bilchnat@gmail.com>

Bilchenko Natalya Grigorievna – Candidate of Science in Physics and Mathematics, Researcher of Laboratory of Modeling of Physical and Technical Processes, Department of Heat Engineering and Power Engineering Machinery, Kazan National Research Technical University (KNRTU-KAI) named after A. N. Tupolev.
Tel.: +7-905-319-1842,
E-mail: <bilchnat@gmail.com>