УДК 004.94+514.74+517.55

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ БИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. В. Зюзгина

Воронежский государственный технический университет

Поступила в редакцию 11.02.2018 г.

Аннотация. Предлагается алгоритм нахождения нетривиальных решений однородных систем билинейных уравнений, сводящий их к линейным задачам. Рост размеров линейных систем по отношению к параметрам исходных задач пока позволяет решать их при небольшом количестве исходных уравнений. В статье изучена одна билинейная система, связанная с задачей об аффинной однородности. Алгоритм реализован в пакете символьной математики Maple.

Ключевые слова: системы билинейных уравнений, компьютерные алгоритмы, символьные вычисления, математическое моделирование.

Annotation. An algorithm for finding nontrivial solutions of homogeneous systems of bilinear equations that reduces them to linear objectives is proposed in this article. The growth of the sizes of linear systems for the parameters of the initial problems currently allows us to solve them for a small number of initial equations. In this paper, we investigate one bilinear system related to the problem of affine homogeneity. The algorithm is implemented in the symbolic mathematics package Maple.

Keywords: systems of bilinear equations, computer algorithms, symbolic calculations, mathematical simulation.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье изучается один тип систем билинейных уравнений. Отметим, что использование подобных систем является естественным, например, при моделировании задач экономики, где в качестве неизвестных могут выступать группы производителей и потребителей. Возможны также их приложения в биологии, химии и других естественных науках, в которых имеются группы «антагонистических» объектов типа «хищник-жертва» (см. [1], [2]).

Подобные системы появляются, например, в задаче описания аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства с помощью матричных алгебр Ли (см. [3]–[5]). Не обсуждая здесь детально, как именно возникают эти системы, конкретизируем постановку задачи.

Имеется система из нескольких уравнений, каждое из которых билинейно зависит от двух групп неизвестных и является однородным. Требуется найти все решения такой системы. Отметим, что число уравнений, а также количество неизвестных в каждой из двух групп могут быть произвольными. В задаче об аффинной однородности возникли системы, в которых количества неизвестных в двух группах одинаковы, а число уравнений на единицу меньше объединённого количества неизвестных. Мы будем обозначать далее такие системы как $(2n-1, n, n)$-системы, где n – количество неизвестных в каждой из двух групп, участвующих в рассматриваемых уравнениях. Обсуждения статьи связаны только с такими системами.

Отметим, что наиболее интересным в задаче об аффинной однородности является случай (15,8,8)-систем. Важным оказывается также случай (11,6,6)-систем. В настоящей работе предлагается алгоритм исследования общих $(2n-1, n, n)$-систем.

Оказалось, что уже при $n = 8$ реализация этого алгоритма требует чрезмерно больших затрат компьютерного времени и оперативной памяти. В то же время при $n = 6$ этот алгоритм успешно реализован. В статье приводится подробное обсуждение этого случая применительно к задаче об однородности.

Укажем ещё на простейшие варианты $(2n-1, n, n)$-систем.

Так, при $n = 1$ система обсуждаемого вида содержит единственное уравнение

$$B \cdot x_1 \cdot y_1 = 0, \tag{1}$$

где B – некоторый числовой коэффициент.

Ясно, что при $B \neq 0$ все решения такого уравнения допускают наглядную интерпретацию, т. к. описываются объединением пары осей $x_1 = 0$ и $y_1 = 0$ в плоскости x_1oy_1.

При $n = 2$ система обсуждаемого типа может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} &A_{11}x_1y_1 + A_{12}x_1y_2 + A_{22}x_2y_2 = 0,\\ &B_{11}x_1y_1 + B_{12}x_1y_2 + B_{22}x_2y_2 = 0,\\ &C_{11}x_1y_1 + C_{12}x_1y_2 + C_{22}x_2y_2 = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Вопросы о нетривиальной разрешимости таких относительно простых систем достаточно подробно исследованы в студенческой работе [4].

Тривиальным решением такой, а также общей системы изучаемого вида

$$\sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}^k x_i y_j = 0 \quad (k = 1, \dots, 2n-1) \tag{3}$$

естественно назвать такой набор $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, в котором либо первые n переменных (x-группа), либо последние (y-группа) равны нулю. Ясно, что у систем вида (3) интерес представляют нетривиальные решения, и именно их поиск является целью алгоритма, предлагаемого в статье.

§ 1. МММ-АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ $(2n-1, n, n)$-СИСТЕМЫ

Везде в данной статье рассматриваются системы уравнений следующего вида

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} r_i s_j = 0. \tag{4}$$

Здесь $n \geq 1$ – натуральное число, r_i, s_j – неизвестные величины, $a_{i,j}$ – постоянные (целочисленные) коэффициенты.

Определение 1. Решением системы такого вида (4) называются два набора чисел $r_1, \dots, r_n$ и $s_1, \dots, s_n$ такие, что при подстановке их в уравнения системы каждое из них превращается в верное равенство.

Замечание. Мы обсуждаем только системы с равными количествами переменных в каждом из двух наборов, хотя такое равенство не является обязательным при рассмотрении подобных систем.

Будем считать, что в обсуждаемой системе содержится ровно $(2n-1)$ уравнений $(n > 1)$. Причины интереса именно к таким системам поясним ниже.

Ставится задача поиска всех решений систем подобного вида.

Замечание. Очевидно, что тривиальный набор $r_1 = \dots = r_n = 0$ (или $s_1 = \dots = s_n = 0$) по одной из групп переменных, дополненный произвольным вторым набором, является решением системы. В рамках данной работы интерес представляют решения, не являющиеся тривиальными ни по одному из наборов.

Используя билинейные свойства системы, представим исходную систему как линейную по одному из наборов коэффициентов. В этом случае произвольную обсуждаемую систему можно представить в виде:

$$A(r_1, \dots, r_n) \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \cdots \\ s_n \end{pmatrix} = 0. \tag{5}$$

Здесь $A(r_1, \dots, r_n)$ – матрица размеров $((2n-1) \times n)$, элементы которой являются линейными функциями (формами) от переменных $r_1, \dots, r_n$.

Если вектор $(s_1, \dots, s_n)$ из (5) не тривиальный, то ранг матрицы $A(r_1, \dots, r_n)$ не является полным. Это означает, что равны нулю все миноры матрицы A максимально возможного порядка n. Ясно, что у матрицы размеров $(k\times n)$ при $k>n$ существует C_k^n таких миноров. В случае $k=2n-1$ получаем C_{2n-1}^n миноров, каждый из которых является многочленом (формой) порядка n от переменных $r_1,\dots,r_n$.

Обращение всех таких миноров в нуль даёт систему из C_{2n-1}^n полиномиальных уравнений относительно n неизвестных $r_1,\dots,r_n$.

Каждое из таких уравнений содержит не более N мономов n-ой степени, где N – максимально возможное количество разных мономов вида $r_1^{\alpha_1}\dots r_n^{\alpha_n}$. Причём, сумма степеней каждого из таких мономов равна n.

Лемма. Количество мономов вида $r_1^{\alpha_1}\dots r_n^{\alpha_n}$ при условии $\alpha_1+\dots+\alpha_n=k$ равно C_{n+k-1}^k.

Количество таких мономов можно посчитать по известной схеме размещения k кроликов в n клетках. Всякий моном требуемого вида соответствует размещению:

α_1 кроликов в первой клетке,

α_2 кроликов во второй клетке,

$\dots$

α_n кроликов в n-ой клетке.

Расставляя $(n-1)$ перегородку между группами кроликов (сидящих неподвижно в длинном общем вольере), мы получаем конкретное размещение требуемого вида. В суммарном количестве $(k+n-1)$ обсуждаемых позиций, содержащем k кроликов и $(n-1)$ перегородку, всякое такое размещение означает выбор $(n-1)$ позиции для перегородок. Следовательно, количество обсуждаемых размещений равно $C_{n+k-1}^{n-1}=C_{n+k-1}^k$.

Следствие. Количество мономов вида $r_1^{\alpha_1}\dots r_n^{\alpha_n}$ при условии $\alpha_1+\dots+\alpha_n=n$ (т. е. при $k=n$) равно C_{2n-1}^n.

Замечание. Это следствие из леммы оправдывает наш выбор числа уравнений в системе. При таком выборе число полиномиальных уравнений оказывается равным формальному числу всевозможных мономов $r_1^{\alpha_1}\dots r_n^{\alpha_n}$ в этих полиномиальных уравнениях.

Рассмотрим каждый такой моном как новую переменную Z_i $(1\le i\le N=C_{2n-1}^n)$. Тогда полученную систему полиномиальных уравнений можно рассматривать как квадратную линейную однородную систему порядка N относительно переменных $Z_1,\dots,Z_N$.

Замечание. Алгоритм, в котором делается переход от рассмотрения системы билинейных уравнений к рассмотрению миноров и мономов, мы называем «методом миноров и мономов» (МММ).

Отметим, что в качестве последних переменных в этом наборе удобно использовать мономы максимальных порядков $r_1^n\dots r_n^n$.

Если для решения такой системы хотя бы некоторые из новых переменных окажутся нулевыми, то соответствующие им мономы $r_1^{\alpha_1}\dots r_n^{\alpha_n}$ равны нулю. В свою очередь, это означает равенство нулю отдельных начальных переменных. За счёт таких выводов исходная билинейная система часто упрощается, и ситуация доводится до решений (тривиальных или нетривиальных) такой системы.

Замечание. Ситуация с квадратной линейной системой является скорее «приятным», а не обязательным моментом исследования исходных билинейных систем.

Если билинейная система имела достаточно большие количества уравнений и неизвестных в двух группах, то порядок N получаемой линейной системы оказывается весьма большим. Например, порядок системы (15,8,8), где 15 – это количество уравнений, 8 – число неизвестных в каждой группе, равен 6435. Ясно, что при исследовании таких систем естественно использовать пакеты символьных вычислений. В данной работе использовался пакет Maple [9].

При рассмотрении однородной линейной системы важно знать её ранг. Для этого в пакете Maple существует соответствующая операция. Стоит заметить, что при больших порядках данная операция выполняется достаточно долго.

Далее матрицу полученной линейной системы приведём к ступенчатому виду. При рассмотрении нижних ненулевых строк ступенчатой матрицы можно найти некоторые неизвестные или установить зависимости, которые в дальнейшем существенно упрощают основную билинейную систему.

Работа с подобными системами, возникающими в задаче об однородности, показывает, что, как правило, ранг линейной системы оказывается неполным, последние содержательные строки соответствующих ступенчатых матриц содержат незначительные количества ненулевых элементов.

§ 2. (15, 8, 8)-СИСТЕМА, ВОЗНИКАЮЩАЯ В ЗАДАЧЕ ОБ АФФИННОЙ ОДНОРОДНОСТИ

Задача решения билинейной системы уравнений появилась в рамках работы по исследованию аффинно-однородных поверхностей, поставленной в [6].

Поверхности при этом задаются уравнениями вида

$$\begin{gathered} v = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \\ + \varepsilon_1\left(z_1^2 + z_1^2\right) + \varepsilon_2\left(z_2^2 + z_2^2\right) + \qquad (6) \\ + \sum_{k+l+2m\geq 3} F_{k\bar{l}m}(z,\bar{z})u^m. \end{gathered}$$

Группы переменных $\{r_1,\ldots,r_8,s_1,\ldots,s_8\}$, возникающие в этой задаче, являются тейлоровскими коэффициентами третьего порядка уравнения (6). Важную роль играют так же коэффициенты $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ уравнения (6).

В этой задаче (см. [8]) возникает система из 50 вещественных уравнений, квадратичных относительно переменных $\{r_1,\ldots,r_8,s_1,\ldots,s_8\}$, при этом 25 из них являются билинейными относительно двух групп по 8 неизвестных. Ранг такой системы из 25 уравнений оказывается равным 15.

Пример одного из самых простых таких уравнений, содержащего 221 слагаемое, приведён ниже.

$$\begin{gathered}
s_1\left(32r_1\varepsilon_1^2\varepsilon_2^4 + 32r_1\varepsilon_1\varepsilon_2^5 + 16r_1\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + 16r_1\varepsilon_1\varepsilon_2^4 -\right. \\
\left. -8r_1\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 - 8r_1\varepsilon_2^3\varepsilon_1 - 4r_1\varepsilon_1^2\varepsilon_2 - 4r_1\varepsilon_1\varepsilon_2^2\right) + \\
+s_2\left(-160r_2\varepsilon_1^4\varepsilon_2^3 - 160r_2\varepsilon_1^3\varepsilon_2^4 - 96r_2\varepsilon_1^4\varepsilon_2^2 -\right. \\
-96r_2\varepsilon_1^3\varepsilon_2^3 - 8r_2\varepsilon_1^4\varepsilon_2 - 8r_2\varepsilon_1^3\varepsilon_2^2 + \\
+40r_2\varepsilon_1^2\varepsilon_2^3 + 40r_2\varepsilon_1\varepsilon_2^4 + 24r_2\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + \\
\left. +24r_2\varepsilon_1\varepsilon_2^3 + 2r_2\varepsilon_1^2\varepsilon_2 + 2r_2\varepsilon_2^2\varepsilon_1\right) + \\
+s_3\left(16\varepsilon_1^2\varepsilon_2^4 r^2 + 16\varepsilon_1\varepsilon_2^5 r_2 + 8r_2\varepsilon_1^2\varepsilon_2^3 + 8r_2\varepsilon_1\varepsilon_2^4 -\right. \\
\left. -4r_2\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 - 4r_2\varepsilon_1\varepsilon_2^3 - 2r_2\varepsilon_1^2\varepsilon_2 - 2r_2\varepsilon_2^2\varepsilon_1\right) + \\
+s_4\left(-64\varepsilon_1^3\varepsilon_2^4 r_1 - 64\varepsilon_1^2\varepsilon_2^5 r_1 - 64\varepsilon_1^3\varepsilon_2^3 r_3 - 64r_1\varepsilon_1^2\varepsilon_2^4 +\right. \\
+64\varepsilon_1^2\varepsilon_2^4 r_3 - 32r_1\varepsilon_1\varepsilon_2^5 + 16\varepsilon_1^3\varepsilon_2^2 r_1 + 16r_1\varepsilon_1^2\varepsilon_2^3 - \\
-32\varepsilon_1^2\varepsilon_2^3 r_3 + 32\varepsilon_1\varepsilon_2^4 r_3 + 16\varepsilon_1^3\varepsilon_2 r_3 + 16r_1\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 - \\
-16\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 r_3 + 8r_1\varepsilon_2^3\varepsilon_1 + 8\varepsilon_2^4 r_1 + \\
\left. +8\varepsilon_1^2\varepsilon_2 r_3 - 8\varepsilon_1\varepsilon_2^2 r_3 - 2\varepsilon_2^2 r_1\right) + \\
+s_5\left(-64\varepsilon_1^4\varepsilon_2^3 r_1 + 128\varepsilon_1^4\varepsilon_2^3 r_3 - 64\varepsilon_1^3\varepsilon_2^4 r_1 +\right. \\
+128\varepsilon_1^3\varepsilon_2^4 r_3 - 32\varepsilon_1^4\varepsilon_2^2 r_1 + 64\varepsilon_1^4\varepsilon_2^2 r_3 - 80\varepsilon_1^3\varepsilon_2^3 r_1 + \\
+192\varepsilon_1^3\varepsilon_2^3 r_3 - 16r_1\varepsilon_1^2\varepsilon_2^4 + 64\varepsilon_1^2\varepsilon_2^4 r_3 + 32\varepsilon_1^4\varepsilon_2 r_5 - \\
-32\varepsilon_1^3\varepsilon_2^2 r_5 + 64\varepsilon_1^2\varepsilon_2^3 r_3 + 12\varepsilon_1^3\varepsilon_2 r_1 - 32\varepsilon_1^3\varepsilon_2 r_3 + \\
+32\varepsilon_1^3\varepsilon_2 r_5 + 12r_1\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 - 32\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 r_3 - 32\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 r_5 + \\
+12r_1\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 - 32\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 r_3 - 32\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 r_5 + 12r_1\varepsilon_2^3\varepsilon_1 - \\
-4\varepsilon_2^4 r_1 + 4r_1\varepsilon_1^2\varepsilon_2 - 24\varepsilon_1^2\varepsilon_2 r_3 + 8\varepsilon_1^2\varepsilon_2 r_5 + 4r_1\varepsilon_1\varepsilon_2^2\varepsilon_1 + \\
\left. +\varepsilon_2^2 r_3 - 8\varepsilon_1\varepsilon_2^2 r_5 - \varepsilon_1\varepsilon_2 r_1 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2 r_3 + \varepsilon_2^2 r_1\right) + \quad (7) \\
+s_6\left(-32\varepsilon_1^4\varepsilon_2^3 r_5 + 32\varepsilon_1^3\varepsilon_2^4 r_1 + 32\varepsilon_1^3\varepsilon_2^4 r_5 - 32\varepsilon_1^3\varepsilon_2^4 r_6 +\right. \\
+32\varepsilon_1^2\varepsilon_2^5 r_1 - 64\varepsilon_1^2\varepsilon_2^5 r_3 + 32\varepsilon_1^2\varepsilon_2^5 r_6 + 16\varepsilon_1^3\varepsilon_2^3 r_1 - \\
-32\varepsilon_1^3\varepsilon_2^3 r_5 - 16\varepsilon_1^3\varepsilon_2^3 r_6 + 16r_1\varepsilon_1^2\varepsilon_2^4 + 32\varepsilon_1^2\varepsilon_2^4 r_5 - \\
-16\varepsilon_1^2\varepsilon_2^4 r_6 - 32\varepsilon_1\varepsilon_2^5 r_3 + 32\varepsilon_1\varepsilon_2^5 r_6 + 8\varepsilon_1^4\varepsilon_2 r_5 - \\
-8\varepsilon_1^3\varepsilon_2^2 r_1 - 8\varepsilon_1^3\varepsilon_2^2 r_5 + 8\varepsilon_1^3\varepsilon_2^2 r_6 - 8r_1\varepsilon_1^2\varepsilon_2^3 + 32\varepsilon_1^2\varepsilon_2^3 r_3 - \\
-8\varepsilon_1^2\varepsilon_2^3 r_5 - 24\varepsilon_1^2\varepsilon_2^3 r_6 - 8r_1\varepsilon_1\varepsilon_2^4 + 8\varepsilon_1\varepsilon_2^4 r_5 + 8\varepsilon_1\varepsilon_2^4 r_6 - \\
-8\varepsilon_2^5 r_1 + 8\varepsilon_2^5 r_6 - 4\varepsilon_1^3\varepsilon_2 r_1 + 8\varepsilon_1^3\varepsilon_2 r_5 + 4\varepsilon_1^3\varepsilon_2 r_6 - \\
-4r_1\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 - 8\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 r_5 + 4\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 r_6 - 4r_1\varepsilon_2^3\varepsilon_1 + 16\varepsilon_1\varepsilon_2^3 r_3 - \\
-12\varepsilon_1\varepsilon_2^3 r_6 - 4\varepsilon_2^4 r_1 + 4\varepsilon_2^4 r_6 - 4\varepsilon_1^2\varepsilon_2 r_3 + 2\varepsilon_1^2\varepsilon_2 r_5 + \\
+4\varepsilon_1^2\varepsilon_2 r_6 + 2r_1\varepsilon_1\varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2^2 r_5 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2^2 r_6 + 2\varepsilon_2^3 r_1 - \\
\left. -2\varepsilon_2^3 r_6 + \varepsilon_1\varepsilon_2 r_1 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2 r_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 r_6 + \varepsilon_2^2 r_1 - \varepsilon_2^2 r_6\right) + \\
+s_7\left(-80r_2\varepsilon_1^4\varepsilon_2^3 - 48\varepsilon_1^4\varepsilon_2^3 r_4 - 96r_2\varepsilon_1^3\varepsilon_2^4 - 32\varepsilon_1^3 r_4 -\right. \\
-16\varepsilon_1^2 r_2 + 16\varepsilon_1^2 r_4 - 8r_2\varepsilon_1^4\varepsilon_2^2 + 8\varepsilon_1^4 r_4 - 8r_2\varepsilon_1^3\varepsilon_2^3 - \\
-40\varepsilon_1^3 r_4 - 16\varepsilon_1^3\varepsilon_2^3 r_3 - 8\varepsilon_1^2 r_2 - 40\varepsilon_1^2 r_4 - 16\varepsilon_1^2 r_7 - \\
-8\varepsilon_1\varepsilon_2^2 r_5 + 8\varepsilon_1\varepsilon_2^5 r_4 + 20r_2\varepsilon_1^4\varepsilon_2 + 12\varepsilon_1^4\varepsilon_2 r_4 + \\
+28r_2\varepsilon_1^3\varepsilon_2^2 + 12\varepsilon_1^3 8\varepsilon_1^3\varepsilon_1^2\varepsilon_2 r_4 + 4\varepsilon_1^2\varepsilon_2 r_7 - 5r_2\varepsilon_2^2\varepsilon_1 + \\
\left. +3\varepsilon_1\varepsilon_2^2 r_4 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2^2 r_7 - \varepsilon_1^2 r_2 + \varepsilon_1^2 r_7 - \varepsilon_1\varepsilon_2 r_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 r_7\right) + \\
+s_8\left(32r_2\varepsilon_1^4\varepsilon_2^3 + 32\varepsilon_1^4\varepsilon_2^3 r_4 + 32r_2\varepsilon_1^3\varepsilon_2^4 + 32\varepsilon_1^3\varepsilon_2^4 r_4 +\right. \\
+8r_2\varepsilon_1^4\, ?_2^2 - 8\varepsilon_1^4\varepsilon_2^2 r_4 + 32\varepsilon_1^3\varepsilon_2^3 r_4 + 16\varepsilon_1^3\varepsilon_2^3 r_7 - \\
-8\varepsilon_1^2\varepsilon_2^4 r_2 + 40\varepsilon_1^2\varepsilon_2^4 r_4 + 16\varepsilon_1^2\varepsilon_2^4 r_7 - 8r_2\varepsilon_1^4\varepsilon_2 -
\end{gathered}$$

$$-8\varepsilon_1^4\varepsilon_2 r_4 - 12r_2\varepsilon_1^3\varepsilon_2^2 - 12\varepsilon_1^3\varepsilon_2^2 r_4 + 8\varepsilon_1^3\varepsilon_2^2 r_7 -$$
$$-16r_2\varepsilon_1^2\varepsilon_2^3 + 8\varepsilon_1^2\varepsilon_2^3 r_4 + 16\varepsilon_1^2\varepsilon_2^3 r_7 - 12r_2\varepsilon_1\varepsilon_2^4 +$$
$$+12\varepsilon_1\varepsilon_2^4 r_4 + 8\varepsilon_1\varepsilon_2^4 r_7 - 2\varepsilon_1^4 r_2 + 2\varepsilon_1^4 r_4 - 8\varepsilon_1^3\varepsilon_2 r_4 -$$
$$-4\varepsilon_1^3\varepsilon_2 r_7 - 2r_2\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 - 10\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 r_4 - 4r_2\varepsilon_1\varepsilon_2^3 + 4\varepsilon_1\varepsilon_2^3 r_7 +$$
$$+\varepsilon_1^3 r_2 + \varepsilon_1^3 r_4 - 2\varepsilon_1^3 r_7 + 4r_2\varepsilon_1^2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_1^2\varepsilon_2 r_4 -$$
$$-4\varepsilon_1^2\varepsilon_2 r_7 + 3r_2\varepsilon_2^2\varepsilon_1 - 3\varepsilon_1\varepsilon_2^2 r_4 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2^2 r_7 +$$
$$+\varepsilon_1^2 r_2 - \varepsilon_1^2 r_7 + \varepsilon_1\varepsilon_2 r_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 r_7 \Big) = 0.$$

Ставится задача решения такой (15,8,8) системы.

Отметим, что в [8] полностью рассмотрены тривиальные случаи $r_1 = \cdots = r_8 = 0$ или $s_1 = \cdots = s_8 = 0$, получены выводы относительно поверхностей. Основной интерес представляют нетривиальные случаи.

Каждое уравнение типа (7) представляется в виде (4). Линейная система из схемы § 1 имеет в этом случае большие размеры 6435×6435. Обработка матриц таких размеров требует больших затрат времени. Например, время формирования линейной системы размером 6435×6435 составляет 45 минут, время на приведение системы к ступенчатому виду – около суток. Кроме того, сильно усложняет исследование такой системы наличие параметров ε_1, ε_2 из канонического уравнения изучаемых однородных поверхностей (6).

Полученную (6435×6435) – систему в соответствии с алгоритмом, описанным в параграфе 1, необходимо привести ступенчатому виду. В связи с громоздкими коэффициентами, стоящими перед каждым мономом, а также из-за большого количества мономов, среднестатистический ПК не справляется с реализацией алгоритма (перегружается оперативная память).

Однако, алгоритм, вообще говоря, является рабочим, что показывается в следующем разделе.

§ 3. ПРИМЕР ПОЛНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ (11, 6, 6)-СИСТЕМЫ

В полной формулировке задачи об однородности, сводящейся к (15,8,8)-системе, имеется несколько важных частных случаев. Эти случаи связаны с тейлоровскими коэффициентами веса 3 уравнения (6) (см. [5]).

Один из неизученных случаев заключается в недопустимости одновременного обращения в нуль коэффициентов r_2, s_2 и обнулении коэффициентов r_7, r_8, s_7, s_8.

В этом случае вместо (15,8,8)-системы мы переходим к рассматриваемой в данной статье (11,6,6)-системе (за счёт удаления четырёх самих громоздких уравнений). Кроме того, мы полагаем элементы аффинно-инвариантной пары ε_1, ε_2 из уравнения (6) равными 1 и 2, соответственно (именно вблизи таких значений проводятся все обсуждения работы [5]).

Ставится задача исследования (11,6,6) – системы при заданных ограничениях на параметры r_2, s_2:

$$r_2^2 + s_2^2 \neq 0. \qquad (8)$$

Напомним, что интерес для нас представляют лишь нетривиальные решения системы.

Воспользуемся описанным выше алгоритмом МММ и обсудим возможность существования у этой системы решений, не тривиальных относительно группы $s_1, \ldots, s_6$. Для этого рассмотрим эту систему уравнений как линейную относительно $s_1, \ldots, s_6$.

В обсуждаемом (11,6,6)-случае матрица A из формулы (5) получается объединением (по горизонтали) двух матриц $A = (A_1, A_2)$, где A_1, A_2 представлены на рис. 1.

Теорема 1. Всякое решение (11,6,6)-системы (5) с матрицей (9) является тривиальным относительно одного из наборов $s_1, \ldots, s_6$ или $r_1, \ldots, r_6$.

Для доказательства повторим, что равенство (5) при $n = 6$ и нетривиальном векторе $s_1, \ldots, s_6$ выполняется тогда и только тогда, когда ранг матрицы $A(r_1 \ldots r_6)$ не является полным. У обсуждаемой матрицы (9) существует $C_{11}^6 = 462$ минора шестого порядка, и все они должны быть равны нулю.

Совместное обращение всех таких миноров в нуль даёт систему из 462 полиномиальных уравнений относительно шести неизвестных $r_1, \ldots, r_6$. При этом каждое из таких уравнений содержит не более чем 462 монома шестой степени $r_1^{\alpha_1} \cdot r_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot r_6^{\alpha_6}$ (при условии $\alpha_1 + \cdots \alpha_6 = 6$).

Ниже приведён минор, получаемый из 2,4,5,6,9,11 строк матрицы (9). Этот минор содержит 81 слагаемое:

$$A_1=\begin{bmatrix}
-\frac{9}{2}r_5+\frac{23}{2}r_4-\frac{5}{2}r_2 & r_6-\frac{3}{2}r_1-\frac{15}{2}r_3 & r_2-\frac{47}{2}r_4+9r_5\\
-168r_3-58r_1-\frac{65}{2}r_6 & 15r_5-60r_2-90r_4 & 25r_6+120r_3+220r_1\\
-2r_5+\frac{49}{3}r_4-\frac{187}{12}r_2 & \frac{5}{2}r_6+\frac{69}{4}r_1+r_3 & \frac{65}{6}r_2-\frac{10}{3}r_4+5r_5\\
6r_3+r_6 & 6r_4-3r_5 & -4r_6-6r_1\\
-\frac{4}{3}r_1+\frac{46}{3}r_3 & \frac{86}{3}r_4-9r_5-\frac{32}{3}r_2 & -\frac{14}{3}r_1-\frac{64}{3}r_3\\
22r_3-6r_1+\frac{3}{2}r_6 & -27r_5-32r_2+14r_4 & -15r_6-16r_3-6r_1\\
\frac{3}{2}r_5+\frac{29}{2}r_4-4r_2 & -3r_6-\frac{5}{2}r_1-\frac{15}{2}r_3 & r_2-\frac{59}{2}r_4-15r_5\\
\frac{1}{3}r_2+\frac{5}{3}r_5-\frac{2}{3}r_4 & 10r_6+\frac{5}{2}r_1 & -\frac{5}{3}r_4-\frac{20}{3}r_5\\
24r_1+744r_3-165r_6 & -300r_2+660r_4+270r_5 & -600r_1-600r_3+300r_6\\
-35r_2+30r_5-310r_4 & -\frac{195}{2}r_6+330r_3+150r_1 & 80r_2+985r_4+105r_5\\
4r_1+304r_3-5r_6 & -140r_2+260r_4-150r_5 & -160r_1-280r_3-70r_6
\end{bmatrix}$$

$$A_2=\begin{bmatrix}
-\frac{1}{2}r_6+\frac{1}{2}r_1+\frac{37}{2}r_3 & -\frac{3}{2}r_1+r_3 & \frac{3}{2}r_4-\frac{3}{2}r_2\\
-10r_4-\frac{45}{2}r_5+130r_2 & -\frac{55}{2}r_4+5r_2 & -\frac{39}{2}r_1+3r_3\\
-15r_1-5r_3-5r_6 & 2r_1-3r_3 & -4r_2+4r_4\\
-11r_4+2r_2+\frac{9}{2}r_5 & \frac{5}{2}r_4-r_2 & 0\\
\frac{21}{2}r_5-\frac{97}{3}r_4+\frac{34}{3}r_2 & -\frac{1}{3}r_2+\frac{11}{6}r_4 & r_1-4r_3\\
-70r_4+\frac{57}{2}r_5+58r_2 & \frac{19}{2}r_4-5r_2 & -\frac{3}{2}r_1-9r_3\\
\frac{5}{2}r_6+\frac{1}{2}r_1+\frac{39}{2}r_3 & \frac{3}{2}r_1-3r_3 & -\frac{9}{2}r_4+\frac{9}{2}r_2\\
-3r_1+2r_3-10r_6 & -8r_3+2r_1 & -\frac{4}{3}r_2+\frac{13}{3}r_4\\
420r_2-1050r_4 & 50r_2-150r_4 & -9r_1+216r_3\\
-60r_1-885r_3+90r_6 & 105r_3 & -60r_4-\frac{15}{2}r_2\\
260r_2-470r_4+195r_5 & -30r_2+75r_4 & -9r_1-54r_3
\end{bmatrix}. \tag{9}$$

Рис. 1

$$
\begin{aligned}
&a_1r_1^3r_2^3+a_2r_1^3r_2^2r_4+a_3r_1^3r_2^2r_5-a_4r_1^3r_2r_4^2-a_5r_1^3r_2r_4r_5+\\
&+a_5r_1^3r_2r_5^2-a_6r_1^3r_4^3+a_7r_1^3r_4^2r_5-a_8r_1^3r_4r_5^2-a_9r_1^2r_2^3r_3-\\
&-a_{10}r_1^2r_2^3r_6+a_{11}r_1^2r_2^2r_3r_4-a_{12}r_1^2r_2^2r_3r_5+a_{13}r_1^2r_2^2r_4r_6+\\
&+a_{14}r_1^2r_2^2r_5r_6-a_{15}r_1^2r_2r_3r_4^2-a_{16}r_1^2r_2r_3r_4r_5+\\
&+a_{17}r_1^2r_2r_3r_5^2-a_{18}r_1^2r_2r_4^2r_6-a_{19}r_1^2r_2r_4r_5r_6+\\
&+a_{20}r_1^2r_2r_5^2r_6+a_{21}r_1^2r_3r_4^3+a_{22}r_1^2r_3r_4^2r_5-\\
&-a_{23}r_1^2r_3r_4r_5^2+a_{24}r_1^2r_4^3r_6+a_{25}r_1^2r_4^2r_5r_6-\\
&-a_{26}r_1^2r_4r_5^2r_6+a_{27}r_1r_2^3r_3^2+a_{28}r_1r_2^3r_3r_6-\\
&-a_{29}r_1r_2^3r_6^2-a_{30}r_1r_2^2r_3^2r_4-a_{31}r_1r_2^2r_3^2r_5-\\
&-a_{32}r_1r_2^2r_4^2r_5-a_{33}r_1r_2^2r_3r_4r_6-a_{34}r_1r_2^2r_3r_5r_6+\\
&+a_{35}r_1r_2^2r_4r_6^2+a_{36}r_1r_2^2r_5r_6^2+a_{37}r_1r_2r_3^2r_4^2+\\
&+a_{38}r_1r_2r_3^2r_4r_5-a_{39}r_1r_2r_3^2r_5^2+a_{40}r_1r_2r_3r_4^2r_6+\\
&+a_{41}r_1r_2r_3r_4r_5r_6-a_{42}r_1r_2r_3r_5^2r_6-a_{43}r_1r_2r_4^2r_6^2-\\
&-a_{44}r_1r_2r_4r_5r_6^2-a_{45}r_1r_2r_5^2r_6^2-a_{46}r_1r_3^2r_4^3-\\
&-a_{47}r_1r_3^2r_4^2r_5+a_{48}r_1r_3^2r_4r_5^2-a_{49}r_1r_3r_4^3r_6-\\
&-a_{50}r_1r_3r_4^2r_5r_6+a_{51}r_1r_3r_4r_5^2r_6+a_{52}r_1r_4^3r_6^2+\\
&+a_{53}r_1r_4^2r_5r_6^2+a_{54}r_1r_4r_5^2r_6^2+a_{55}r_2^3r_3^3-a_{56}r_2^3r_3^2r_6+\\
&+a_{57}r_2^3r_3r_6^2-a_{58}r_2^2r_3^3r_4-a_{59}r_2^2r_3^3r_5+a_{60}r_2^2r_3^2r_4r_6+\\
&+a_{61}r_2^2r_3^2r_5r_6-a_{62}r_2^2r_3r_4r_6^2-a_{63}r_2^2r_3r_5r_6^2+\\
&+a_{64}r_2r_3^3r_4^2-a_{65}r_2r_3^3r_4r_5-a_{66}r_2r_3^3r_5^2-\\
&-a_{67}r_2r_3^2r_4^2r_6-a_{68}r_2r_3^2r_4r_5r_6+a_{69}r_2r_3^2r_5^2r_6+\\
&+a_{70}r_2r_3r_4^2r_6^2+a_{71}r_2r_3r_4r_5r_6^2+a_{72}r_2r_3r_5^2r_6^2+\\
&+a_{73}r_3^3r_4^3+a_{74}r_3^3r_4^2r_5-a_{75}r_3^3r_4r_5^2+a_{76}r_3^2r_4^3r_6+\\
&+a_{77}r_3^2r_4^2r_5r_6-a_{78}r_3^2r_4r_5^2r_6-a_{79}r_3r_4^3r_6^2-\\
&-a_{80}r_3r_4^2r_5r_6^2-a_{81}r_3r_4r_5^2r_6^2=0,
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

где a_k некоторые числовые коэффициенты.

Рассмотрим далее квадратную линейную однородную систему порядка 462 относительно переменных $Z_1,\ldots,Z_{462}$. Как отмечалось выше, в качестве последних переменных $Z_{457},\ldots,Z_{462}$ в этом методе удобно использовать мономы максимальных порядков по отдельным переменным $r_1^6,\ldots,r_6^6$.

Командой Gausselim из пакета Maple (см. [9]) приведём (462×462)-матрицу к ступенчатому виду.

Замечание. Номером последней содержательной строки полученной ступенчатой матрицы является 431. Это число (ненулевых строк в преобразованной матрице) равно рангу преобразованной (и исходной) матрицы.

Ненулевые элементы ступенчатой матрицы представлены обыкновенными дробями с огромными (порядка 850–900 знаков) числителями и знаменателями. При этом, работа с целыми числами и их отношениями позволяет чётко отделять нулевые числа от ненулевых. Шесть последних столбцов матрицы соответствуют переменным $Z_{457}=r_1^6$, $Z_{458}=r_2^6,\ldots$, $Z_{462}=r_6^6$. Приведём здесь в схематическом виде 4 последних ненулевых строки ступенчатой матрицы,

$$
\begin{vmatrix}
N_{10} & N_9 & N_8 & N_7 & 0 & 0\\
0 & N_6 & N_5 & N_4 & 0 & 0\\
0 & 0 & N_3 & N_2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0
\end{vmatrix}. \qquad (11)
$$

Здесь N_1, $N_2,\ldots$ – ненулевые элементы матрицы, представляющие собой упомянутые выше дроби.

Отметим, что два последних столбца как в исходной, так и в преобразованной матрицах, являются нулевыми. Это означает, что мономов шестых степеней r_5^6, r_6^6 нет ни в одном из обсуждаемых миноров.

Шестые степени четырёх других переменных $r_1^6, r_2^6, r_3^6, r_4^6$ входят в последние уравнения ступенчатой системы с ненулевыми коэффициентами. Это означает, что каждая из «искусственных» переменных $Z_{457}=r_1^6$, $Z_{458}=r_2^6$, $Z_{459}=r_3^6$, $Z_{460}=r_4^6$ равна нулю. Тогда для любого нетривиального по $s_1,\ldots,s_6$ решения (11,6,6)-системы четвёрка исходных неизвестных $r_1,\ldots,r_4$ из такого решения удовлетворяет условиям

$$r_1=0,\ r_2=0,\ r_3=0,\ r_4=0. \qquad (12)$$

Из этого утверждения и неравенства (8), выполняющегося в обсуждаемом случае, следует, что $s_2\neq 0$ (для любого нетривиального по $s_1,\ldots s_6$ решения (11,6,6)-системы).

Подставляя нулевые значения из (12) в исходную систему 11 билинейных уравнений, получим их упрощённые варианты:

$$-\frac{3}{2}s_2r_6+\frac{3}{2}s_4r_6-\frac{3}{2}r_5s_1+r_5s_3=0;$$

$$-\frac{39}{2}s_1r_6+3s_3r_6+5r_5s_2-\frac{55}{2}r_5s_4=0;$$
$$s_1r_6-4s_3r_6-\frac{1}{3}r_5s_2+\frac{11}{6}r_5s_4=0;$$
$$-\frac{3}{2}s_1r_6-9s_3r_6-5r_5s_2+\frac{19}{2}r_5s_4=0;$$
$$\frac{9}{2}s_2r_6-\frac{9}{2}s_4r_6+\frac{3}{2}r_5s_1-3r_5s_3=0;$$
$$-\frac{4}{3}s_2r_6+\frac{13}{3}s_4r_6+2r_5s_1-8r_5s_3=0;$$
$$2r_5s_1-3r_5s_3-4s_2r_6+4s_4r_6=0;$$
$$-\frac{1}{2}r_5(2s_2-5s_4)=0; \qquad (13)$$
$$150r_5s_2-150r_5s_4-9s_1r_6+216s_3r_6=0;$$
$$-\frac{15}{2}s_2r_6-60s_4r_6+105r_5s_3=0;$$
$$-30r_5s_2+75r_5s_4-9s_1r_6-54s_3r_6=0.$$

Размеры и число переменных этой системы не велики, что позволяет эффективно применить процедуру построения базисов Гребнера. Эта процедура для выписанного набора 11 уравнений (с применением опции plex [9]) даёт 8 одночленных полиномов

$$r_is_j=0 \ \ (5\le i\le 6,\ 1\le j\le 4).$$

Одновременное обращение в нуль всех восьми этих многочленов означает, что выполняется одна из двух альтернатив:

1. $s_1=\dots=s_4=0$ или
2. $r_5=r_6=0$.

Первый случай является противоречивым в связи с полученным выше ограничением $s_2\ne 0$. Во втором случае получаем с учётом (12), что всякое нетривиальное по $s_1,\dots,s_6$ решение (11,6,6)-системы является тривиальным по r_i.

Теорема 1 доказана.

Предложение 1. При $\varepsilon_1=1,\ \ \varepsilon_2=2$ не существует аффинно-однородных гиперповерхностей из случая 3 предложения 2 работы [5].

Его справедливость объясняется тем, что в задаче об однородности помимо билинейной подсистемы возникает также другая система квадратичных уравнений, не являющихся билинейными (относительно тех же наборов переменных). Постановка в эту подсистему тривиального набора $[r_1=\dots=r_6=0]$ приводит к противоречию.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На примере одной задачи об аффинной однородности реализован новый алгоритм исследования общих однородных систем билинейных уравнений. Изучены условия применимости алгоритма, связанные с оценкой времени его работы, технических характеристик ПК. Решённая в статье задача описывает один из четырёх случаев аффинной однородности, связанных с ограничением на коэффициенты изучаемых поверхностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cohen S.* Systems of bilinear equations / S. Cohen C. Tomasi // Technical Report, Dept. of Computer Science, Stanford University, 1997. – http://i.stanford.edu/pub/cstr/reports/cs/tr/97/1588/CS-TR-97-1588.pdf.

2. *Mohler Ronald R.* Bilinear Control Processes: with Applications to Engineering, Ecology, and Medicine / Ronald R. Mohler // Mathematics in Science and Engineering. – 1974. – V. 106.

3. *Лобода А. В.* Об аффинно-однородных вещественных гиперповерхностях общего положения в $\mathbb{C}^3$ / А. В. Лобода, А. В. Шиповская // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2017. – Т. 20, № 3. – С. 111–135.

4. *Морозов Е. Ю.* Системы билинейных уравнений / Е. Ю. Морозов, А. В. Лобода // Сборник студенческих научных работ факультета компьютерных наук ВГУ. – 2016. – С. 106–111.

5. *Демин А. М.* Пример 2-параметрического семейства аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$ / А. М. Демин, А. В. Лобода // Матем. Заметки. – 2008. – 84:5. – С. 791–794.

6. *Лобода А. В.* О полном списке аффинно-однородных поверхностей $(\varepsilon,0)$-типов в пространстве $\mathbb{C}^3$ / А. В. Лобода, А. В. Шипо-

вская // Изв. вузов. Матем. – 2015. – № 6. – С. 75–81.

7. *Лобода А. В.* Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства / А. В. Лобода, А. В. Ходарев // Изв. вузов. Матем. – 2003. – № 10. – С 38–50.

8. *Eastwood M.* On affine normal forms and a classification of homogeneous surfaces in affine three-space / M. Eastwood, V.V. Ezhov // Geom Dedicata. – 1999. – V. 77. – P. 11–69.

9. *Дьяконов В. П.* Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании / В. П. Дьяконов. – М. : Солон-Пресс, 2006. – 720 с.

Зюзгина Александра Владимировна – аспирант кафедры высшей математики. Воронежский государственный технический университет.
E-mail: al_eksa2112@mail.ru

Zyuzgina Aleksandra Vladimirovna – postgraduate student, Chair of Higher Mathematics, Voronezh State Technical University.
E-mail: al_eksa2112@mail.ru