

**О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭФФЕКТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ТЕПЛОМАССООБМЕНОМ НА ПРОНИЦАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ
ГИПЕРЗВУКОВЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ**

Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко

*Казанский национальный исследовательский технический университет
(КНИТУ-КАИ) им. А. Н. Туполева (г. Казань)*

Поступила в редакцию 17.04.2017 г.

Аннотация. Рассматриваются задачи математического моделирования эффективного управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. Проведён анализ конструкторских и газодинамических ограничений на управление (вдув) для случаев пористой и перфорированной поверхности. Предложены классы функций, позволяющие реализовывать управления, учитывающие возникающие типы ограничений. Приведены оценки вычислительной сложности в случае использования многочленов.

Ключевые слова: управление, тепломассообмен, ламинарный пограничный слой, гиперзвуковые течения, пористые поверхности, перфорированные поверхности, многочлены, схема Горнера.

Annotation. The hypersonic aircraft permeable surfaces heat and mass transfer effective control mathematical modeling problems are considered. The analysis of the control (the blowing) constructive and gasdynamical restrictions is carried out for the porous and perforated surfaces. The functions classes allowing to realize the controls taking into account the arising types of restrictions are suggested. The computation complexity estimations for the polynomials using are given.

Keywords: control, heat and mass transfer, laminar boundary layer, hypersonic flows, porous surfaces, perforated surfaces, polynomials, Horner scheme.

ВВЕДЕНИЕ

В практике создания гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА) применяют различные способы пассивной и активной тепловой защиты (ТЗ) их поверхностей, обусловленные разнообразием их конструкций и специфическими условиями полёта в плотных слоях атмосферы (диссоциацией и ионизацией) [1–3]. Одним из наиболее эффективных и распространённых способов активной ТЗ является тепломассообменный путём вдува газа-охлаждителя в пограничный слой с поверхности

ГЛА. Применение газовых завес, создаваемых локальным или распределённым вдувом газа (подаваемого по нормали или тангенциально) через щели [4], отверстия [5] или пористую поверхность [6], расположенных в зонах максимального аэротермохимического нагружения, позволяет при установившемся режиме существенно повысить надёжность работы конструкции при сохранении первоначальной геометрической формы ГЛА, и, как следствие, аэродинамических характеристик на протяжении всего полёта.

Наиболее важным представляется рассмотрение слабого вдува [7, 8], обеспечивающего равномерное, локально безотрывное вытека-

ние газа на охлаждаемую поверхность, при котором сам вдуваемый охладитель не оказывает значимого влияния на распределение скорости набегающего потока. По данным работы [6], в связи с наличием локализованного малого объёма с пульсационным движением, при слабом вдуве снижение интенсивности теплообмена в окрестности критической точки затруднено. Поэтому предложено закрыть некоторую окрестность критической точки непроницаемой вставкой из высокотеплопроводного материала, обладающей хорошим термическим контактом с расположенной ниже по течению проницаемой стенкой.

В данной работе рассматриваются два варианта организации вдува охладителя: через проницаемую пористую поверхность и через перфорированный участок поверхности ГЛА.

Следует отметить, что обеспечивающее равномерное вытекание газа на охлаждаемую поверхность пористое охлаждение обладает более низкой прочностью поверхности по сравнению с перфорационным. Основным недостатком вдува через отверстия по сравнению с пористым – турбулизация пограничного слоя. С газодинамической точки зрения очень важно не допустить (или хотя бы оттянуть) момент перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный, сопровождающегося увеличением интенсивности теплообмена за счёт диссипации механической энергии вихрей в тепловую.

При решении задач управления пограничным слоем [9], [10] при отсутствии дополнительных ограничений, в качестве решений (близких к оптимальным), могут быть взяты первые приближения (полученные в аналитической форме), которые являются гладкими. Однако, при введении ограничений вида [11], возникающих из конструкторских рекомендаций [3], а также при ограничениях, обусловленных проблемой недопущения перехода пограничного слоя в турбулентное состояние [12], получаемые (численным образом) решения стремятся к разрывным, не имеющим физической реализации.

В свою очередь, необходимость моделирования управлений, соответствующих вдуву через отверстия [13], приводит в качестве

одного из вариантов, к использованию «импульсов» («струй») прямоугольного вида, имеющих разрывный характер.

Исходя из перечисленных выше соображений, было принято решение [14] использовать функции, аналогичные склейкам, введенным в работах [15, 16].

Материал данной статьи был частично доложен 17 декабря 2015 года на Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы математики, информатики и механики», проводимой факультетом Прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета [11, 13], и 28 января 2016 года на Международной конференции «Воронежская Зимняя Математическая Школа С. Г. Крейна-2016» [17, 18], а также использован при постановке и решении обратных задач тепло-массообмена на проницаемых поверхностях ГЛА [19–21].

1. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ ВДУВА ДЛЯ ПРОНИЦАЕМЫХ ПОРИСТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В случае пористого участка для серии задач с законами вдува специального вида (в дальнейшем – специальные законы [14]), учитываемыми **конструкторские** ограничения в окрестности критической точки [11]:

$$m(x) = \begin{cases} m^* & \text{при } x \in [0; x^*]; \\ m_{opt}^c(x) & \text{при } x \in [x^*; 1], \end{cases} \quad (1)$$

где мощность системы, обеспечивающей вдув [9, 10, 22], удовлетворяет условию $N(m) \leq N_c$ для $N_c = N(m_{IV}^c)$, рассмотрены следующие варианты:

закон 1: $m(0) = m_1$, $m_1 \leq m_{opt}^{analyt}(0)$;

закон 2: $m(0) = 0$;

закон 3: учтена рекомендация работы [6]: $m^* = 0$, схематически представлены на рис. 1.

Учитывая необходимость обеспечить определённый «уровень» слабого вдува, введём дополнительное **газодинамическое** ограничение в законы 1–3:

$$m(x) \leq m_{weak}^{lim} \quad (2)$$

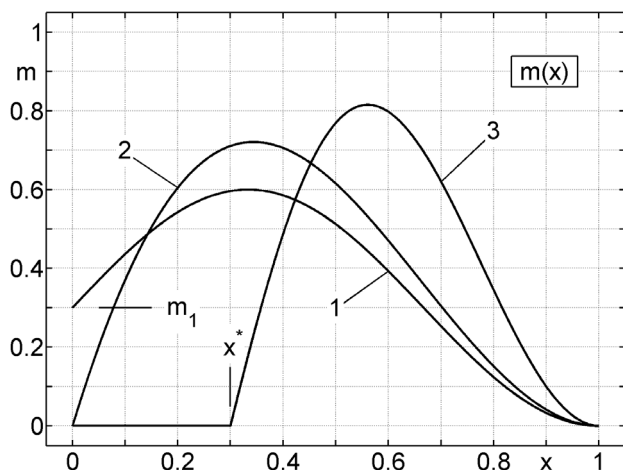


Рис. 1. Законы с ограничением на начальном участке

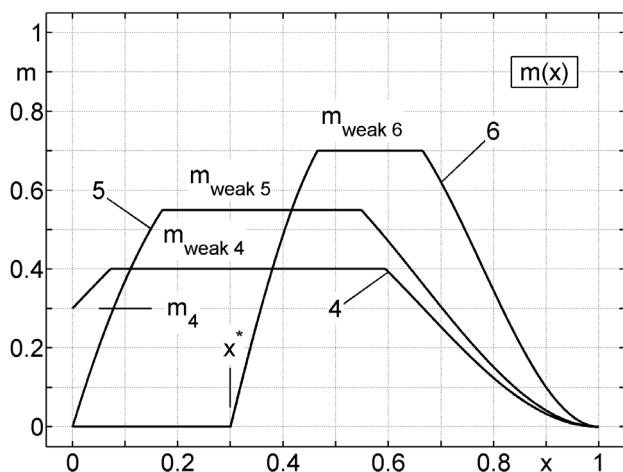


Рис. 2. Законы с условием слабого вдува

где

$$m_{IV}^c \leq m_{weak}^{lim},$$

и получим, соответственно, законы 4–6, схематически представленные на рис. 2.

Получаемые численно решения, при ужесточении условий

$m^* \rightarrow 0$ и/или $x^* \rightarrow 1$ и/или $m_{weak}^{lim} \rightarrow m_{IV}^c$, стремятся к разрывным, не имеющим физической реализации.

2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ ВДУВА ДЛЯ ПРОНИЦАЕМЫХ ПЕРФОРИРОВАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Рассматривается серия задач с законами вдува специального вида [13], моделирующими вдув через отверстия.

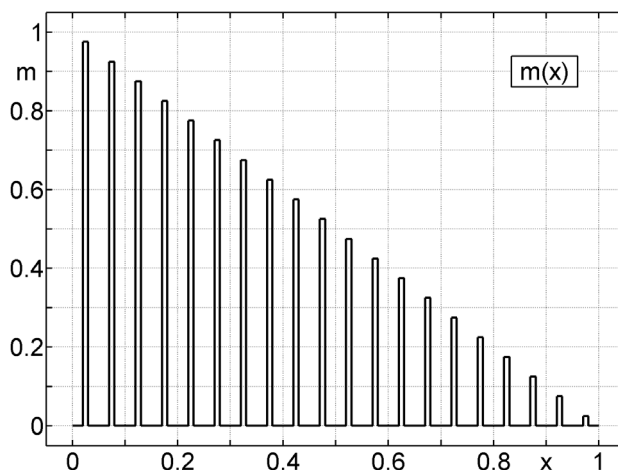


Рис. 3. Закон «убывающий треугольник» для перфорированной с отношением «1/5» поверхности

В качестве примера на рис. 3 приводится вариант закона вдува «убывающий треугольник», аналогичного «простому» закону I из [22], реализованного в случае перфорированной с отношением $d/h = 1/5$ поверхности, где d – диаметр отверстий, h – расстояние между центрами отверстий, $1/5$ – соотношение, рекомендованное в [23].

Необходимость моделирования управлений, соответствующих вдуву через отверстия [13], приводит в качестве одного из вариантов, к использованию «импульсов» прямоугольного вида («струй»):

$$m(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in [x_0; x_1); \\ m_k & \text{при } x \in (x_{2k-1}; x_{2k}); \\ 0 & \text{при } x \in (x_{2k}; x_{2k+1}), \end{cases} \quad (3)$$

имеющих при $m_k > 0$ разрывный характер в точках стыка x_{2k-1} , x_{2k} .

3. КЛАССЫ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ЭФФЕКТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ НА ПРОНИЦАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ГИПЕРЗВУКОВЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Опишем функции, аналогичные склейкам, введённым в работах [15, 16].

Пусть для $X = [0; 1]$ фиксировано разбиение

$$x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1. \quad (4)$$

На каждом отрезке $[x_{j-1}; x_j]$, $j=1, \dots, n$ рассматривается свой «элемент» $m_j(x)$ функции $m(x)$:

$$m(x) = m_j(x) \text{ для } x \in [x_{j-1}; x_j]. \quad (5)$$

В алгоритмическую схему вычислительного эксперимента для фиксированного целого $\nu \geq 0$ были добавлены следующие возможности.

3.1. Пусть для интервалов $[x_{j-1}; x_j]$ непрерывности элементов m_j , где $j=1, \dots, n$, для $k=0, \dots, \nu$ заданы непрерывные функции $b_{j,k}(x)$ и $t_{j,k}(x)$ такие, что

$$b_{j,k}(x) \leq t_{j,k}(x) \text{ для } x \in [x_{j-1}; x_j]. \quad (6)$$

Потребуем, чтобы искомая склейка $m(x)$ удовлетворяла условиям:

$$m_j^{(k)}(x) \in I_{j,k}(x) \text{ для } x \in [x_{j-1}; x_j], \quad (7)$$

где $I_{j,k}(x) = [b_{j,k}(x); t_{j,k}(x)]$.

3.2. Для точек x_j стыка элементов m_j и m_{j+1} , где $j=1, \dots, n-1$, для $k=0, \dots, \nu$ определим скачки

$$\begin{aligned} \Delta m_{j,k} &= m_{j+1}^{(k)}(x_j) - m_j^{(k)}(x_j) = \\ &= m^{(k)}(x_j + 0) - m^{(k)}(x_j - 0). \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть заданы ограничения $\underline{\Delta m_{j,k}}$, $\overline{\Delta m_{j,k}}$ такие, что

$$\underline{\Delta m_{j,k}} \leq \overline{\Delta m_{j,k}}. \quad (9)$$

Потребуем, чтобы скачки искомой склейки удовлетворяли условиям:

$$\underline{\Delta m_{j,k}} \leq \Delta m_{j,k} \leq \overline{\Delta m_{j,k}}. \quad (10)$$

Это позволяет выбирать одну из следующих альтернатив.

«Фиксированный размер»:

$$\underline{\Delta m_{j,k}} = \overline{\Delta m_{j,k}} \neq 0; \quad (11)$$

«необходимость “+”»:

$$0 < \underline{\Delta m_{j,k}} < \overline{\Delta m_{j,k}}; \quad (12)$$

«необходимость “-”»:

$$\underline{\Delta m_{j,k}} < \overline{\Delta m_{j,k}} < 0; \quad (13)$$

«запрет»:

$$\underline{\Delta m_{j,k}} = 0 = \overline{\Delta m_{j,k}} \quad (14)$$

разрыва. При

$$0 < \overline{\Delta m_{j,k}} \quad (15)$$

и/или при

$$\underline{\Delta m_{j,k}} < 0 \quad (16)$$

разрыв **возможен**, но не является обязательным.

Замечания. 1. В случае, когда $m_j(x)$ являются полиномами, склейка является обобщением сплайна.

2. Желательно, чтобы функции $b_{j,k}(x)$ и $t_{j,k}(x)$ имели достаточно простой вид, например, это могут быть многочлены невысокой степени.

3. Значения $b_{j-1,k}(x_j - 0)$, $b_{j,k}(x_j + 0)$, $t_{j-1,k}(x_j - 0)$, $t_{j,k}(x_j + 0)$ обязаны удовлетворять только условиям (6).

4. **Интервальные условия** (7) и **стыковочные условия** (10) в общем случае могут потребовать взаимного согласования.

5. Если на некотором подынтервале $[x_*; x^*] \subset [x_{j-1}; x_j]$ для некоторого k^* , $0 \leq k^* \leq \nu$ совпали ограничения:

$$b_{j,k^*}(x) = t_{j,k^*}(x) \text{ для } x \in [x_*; x^*], \quad (17)$$

причём значения x_* , x^* – точные, т. е. существует такое значение $\delta > 0$, что из $x \in [x_* - \delta; x^* + \delta] \cap ([x_{j-1}; x_j] \setminus [x_*; x^*])$ следует $b_{j,k^*}(x) < t_{j,k^*}(x)$, то такие x_* , x^* следует включить в систему узлов (4). Процедуру включения узлов такого типа следует повторять до тех пор, пока либо такие подынтервалы не закончатся, либо размер $x^* - x_*$ любого из оставшихся не станет меньше заданного порогового значения $\delta_{\min} > 0$. При $k^* = 0$ искомая функция $m(x)$ является заданной на $[x_*; x^*]$ с помощью (7) и (17), а при $k^* > 0$ функция $m(x)$ задана с точностью до k^* констант интегрирования.

6. Если в некоторой внутренней точке x^* интервала $[x_{j-1}; x_j]$ для некоторого k^* , $0 \leq k^* \leq \nu$ совпали ограничения:

$$b_{j,k^*}(x^*) = t_{j,k^*}(x^*), \quad (18)$$

причём x^* – изолированная точка такого типа, т. е. существует такое значение $\delta > 0$, что из $x \in [x^* - \delta; x^* + \delta] \cap [x_{j-1}; x_j]$ при $x \neq x^*$ следует $b_{j,k^*}(x) < t_{j,k^*}(x)$, то такую точку следует включить в систему узлов (4). Процедуру включения узлов такого типа следует повторять до тех пор, пока либо они не закончатся, либо включение любого из таких оставшихся узлов в систему (4) будет давать интервал длины меньше заданного порогового значе-

ния $\delta_{\min} > 0$. Искомая функция $m(x)$, должна удовлетворять **точечному** условию (7), (18). После включения в систему узлов для этой точки устанавливается запрет разрыва (13) с порядком k^* .

4. АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МНОГОЧЛЕНОВ

Среди представимых на ЭВМ функций, одним из наиболее простых вариантов, позволяющих удовлетворить условиям (7), являются *многочлены*. Учитывая необходимость контроля условий (7) на концах интервалов:

$$m_j^{(k)}(x_{j-1}+0) \in [b_{j,k}(x_{j-1}+0); t_{j,k}(x_{j-1}+0)], \quad (19)$$

$$m_j^{(k)}(x_j-0) \in [b_{j,k}(x_j-0); t_{j,k}(x_j-0)], \quad (20)$$

а также условий (10), удобно, в качестве точек, в которых задаются параметры многочленов, использовать границы x_{j-1} , x_j интервалов (4). Поскольку количества условий: $(\nu+1)$ на левом и $(\nu+1)$ на правом конце интервала, то в качестве многочлена может быть использован специальный случай интерполяционного многочлена Эрмита (по двум узлам) степени $2\mu-1 \geq 2\nu+1$.

4.1. Пусть для $a < b$ и $\mu \geq 1$ на интервале $[a; b]$ в качестве начального приближения $f(x)$ управления заданы значения $(f^{(p-1)}(a))_{p=1, \dots, \mu}$, $(f^{(p-1)}(b))_{p=1, \dots, \mu}$ производных порядков от 0 до $\mu-1$ в точках a и b . Для получения интерполяционного многочлена составим (специального вида) таблицу разделённых разностей. В левом и верхнем её заголовках разместим указанные значения производных

$$f_{p,0} = f(\underbrace{a, \dots, a}_p) = \frac{f^{(p-1)}(a)}{(p-1)!},$$

$$f_{0,q} = f(\underbrace{b, \dots, b}_q) = \frac{f^{(q-1)}(b)}{(q-1)!} \quad (21)$$

и, обозначив $\Delta = b - a$, вычислим

$$f_{p,q} = f(\underbrace{a, \dots, a}_p, \underbrace{b, \dots, b}_q) = \frac{f_{p-1,q} - f_{p,q-1}}{\Delta}$$

для $p, q = 1, \dots, \mu$. (22)

В табл. 1 и далее стрелка вправо означает построение «по a , затем по b », а стрелка влево – «по b , затем по a ».

Интерполяционный многочлен Эрмита, построенный по узлам a и b , может быть записан в следующих формах:

$$P_{\mu,\mu}(x; a, b) = L_{\mu}^{\rightarrow}(x; a, b) + H_{\mu}^{\rightarrow}(x; a, b) = \quad (23)$$

$$= L_{\mu}^{\leftarrow}(x; a, b) + H_{\mu}^{\leftarrow}(x; a, b). \quad (24)$$

Здесь и далее L – «младшая», а H – «старшая» части:

$$L_{\mu}^{\rightarrow}(x; a, b) = \sum_{k=0}^{\mu-1} \lambda_k^{\rightarrow} \cdot (x-a)^k,$$

$$H_{\mu}^{\rightarrow}(x; a, b) = (x-a)^{\mu} \cdot \sum_{k=0}^{\mu-1} \eta_k^{\rightarrow} \cdot (x-b)^k, \quad (25)$$

$$L_{\mu}^{\leftarrow}(x; a, b) = \sum_{k=0}^{\mu-1} \lambda_k^{\leftarrow} \cdot (x-b)^k,$$

$$H_{\mu}^{\leftarrow}(x; a, b) = (x-b)^{\mu} \cdot \sum_{k=0}^{\mu-1} \eta_k^{\leftarrow} \cdot (x-a)^k, \quad (26)$$

$$\lambda_k^{\rightarrow} = f_{k+1,0}, \quad \eta_k^{\rightarrow} = f_{\mu,k+1}, \quad \lambda_k^{\leftarrow} = f_{0,k+1}, \quad \eta_k^{\leftarrow} = f_{k+1,\mu},$$

$$k = 0, \dots, \mu-1. \quad (27)$$

Таблица 1

	$\lambda_0^{\leftarrow} = f_{0,1} = f(b)$	$f_{0,2} = f'(b)$...	$f_{0,\mu} = \frac{f^{(\mu-1)}(b)}{(\mu-1)!}$
$\lambda_0^{\rightarrow} = f_{1,0} = f(a)$	$f_{1,1}$	$f_{1,2}$...	$\eta_0^{\leftarrow} = f_{1,\mu}$
$f_{2,0} = f'(a)$	$f_{2,1}$	$f_{2,2} = \frac{f_{1,2} - f_{2,1}}{\Delta}$...	$f_{2,\mu}$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
$f_{\mu,0} = \frac{f^{(\mu-1)}(a)}{(\mu-1)!}$	$\eta_0^{\rightarrow} = f_{\mu,1}$	$f_{\mu,2}$...	$f_{\mu,\mu}$

В частности, [24] при $\mu = 2$ многочлен (23), (24) может быть записан в следующих формах:

$$P_{2,2}(x; a, b) = [f_{1,0} + f_{2,0} \cdot (x-a)] + \tag{28}$$

$$+ (x-a)^2 \cdot [f_{2,1} + f_{2,2} \cdot (x-b)] = [f_{0,1} + f_{0,2} \cdot (x-b)] + (x-b)^2 \cdot [f_{1,2} + f_{2,2} \cdot (x-a)], \tag{29}$$

где разделённые разности:

$$f_{1,1} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad f_{1,2} = \frac{f'(b) - f_{1,1}}{b - a},$$

$$f_{2,1} = \frac{f_{1,1} - f'(a)}{b - a},$$

$$f_{2,2} = \frac{f_{1,2} - f_{2,1}}{b - a} = \frac{f'(b) + f'(a) - 2 \cdot f_{1,1}}{(b - a)^2}. \tag{30}$$

Для расчёта разностей (22) требуется μ^2 операций деления (далее в оценках сложности везде подразумеваются операции над вещественными числами) и 2μ делений (21) на факториалы. Для расчёта одной формы ((23) или (24)) требуется 2μ ячеек памяти, для двух нужно $(4\mu - 1)$.

4.2. Построение многочлена можно провести по-другому: предварительно подготовить «базовые» полиномы [25], т. е. для заданных a, b, μ построить систему $F = (F_{p,0}, F_{0,p})_{p=1, \dots, \mu}$ таких, что

$$F_{j,0}^{(k-1)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{k!} \cdot \delta_j^k & \text{при } x = a; \\ 0 & \text{при } x = b, \end{cases}$$

$$F_{0,j}^{(k-1)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = a; \\ \frac{1}{k!} \cdot \delta_j^k & \text{при } x = b \end{cases} \tag{31}$$

для $j, k = 1, \dots, \mu$, где дельта Кронекера

$$\delta_j^k = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq k; \\ 1 & \text{при } j = k. \end{cases}$$

В этом случае

$$P_{\mu,\mu}(x; a, b) = \sum_{k=0}^{\mu-1} F_{k,0}(x; a, b) \cdot f^{(k-1)}(a) + \sum_{k=0}^{\mu-1} F_{0,k}(x; a, b) \cdot f^{(k-1)}(b). \tag{32}$$

В частности, для $\mu = 2$:

$F_{1,0}$	0	0
1	$\frac{-1}{\Delta^1}$	$\frac{+1}{\Delta^2}$
0	$\frac{-1}{\Delta^2}$	$\frac{+2}{\Delta^3}$

$F_{2,0}$	0	0
0	0	0
1	$\frac{-1}{\Delta^1}$	$\frac{+1}{\Delta^2}$

$$F_{1,0}(x; a, b) = [1 + 0 \cdot (x-a)^1] + (x-a)^2 \cdot \left[\frac{-1}{\Delta^2} + \frac{+2}{\Delta^3} \cdot (x-b)^1 \right] =$$

$$= [0 + 0 \cdot (x-b)^1] +$$

$$+ (x-b)^2 \cdot \left[\frac{+1}{\Delta^2} + \frac{+2}{\Delta^3} \cdot (x-a)^1 \right] =$$

$$= 1 + 0 \cdot (x-a)^1 + \frac{-3}{\Delta^2} (x-a)^2 + \frac{+2}{\Delta^3} (x-a)^3 = \tag{33}$$

$$= 0 + 0 \cdot (x-b)^1 + \frac{+3}{\Delta^2} (x-b)^2 + \frac{+2}{\Delta^3} (x-b)^3, \tag{34}$$

$$F_{2,0}(x; a, b) = [0 + 1 \cdot (x-a)^1] + (x-a)^2 \cdot \left[\frac{-1}{\Delta^1} + \frac{+1}{\Delta^2} \cdot (x-b)^1 \right] =$$

$$= [0 + 0 \cdot (x-b)^1] +$$

$$+ (x-b)^2 \cdot \left[0 + \frac{+1}{\Delta^2} \cdot (x-a)^1 \right] =$$

$$= 0 + 1 \cdot (x-a)^1 + \frac{-2}{\Delta^1} (x-a)^2 + \frac{+1}{\Delta^2} (x-a)^3 = \tag{35}$$

$$= 0 + 0 \cdot (x-b)^1 + \frac{+1}{\Delta^1} (x-b)^2 + \frac{+1}{\Delta^2} (x-b)^3. \tag{36}$$

Формулы для $F_{0,1}(x; a, b)$ и $F_{0,2}(x; a, b)$ строятся по аналогии. Первые две формы: (33), (37) и (34), (38) – двухточечные, построенные с помощью таблиц разностей. Следующие две: (35), (39) и (36), (40) – одноточечные, полученные заменой $(x-a) = (x-b) + \Delta$.

В общем случае таблица разделённых разностей для $F_{1,0}$ представляет набор коэффициентов при мономах $a^p b^q$ в разложении $-\left(\frac{a-b}{\Delta}\right)^{p+q}$, т. е. два фрагмента треугольника Паскаля с чередованием знаков по столбцам и увеличивающейся степенью Δ в знаменателе (табл. 2).

Таблицы для $F_{p,0}$ могут быть получены из $F_{1,0}$ сдвигом вниз на $(p-1)$ строку (с запол-

Таблица 2

	$\lambda_0^{\leftarrow} = F_{1,0}^{(0)}(b) = 0$	$F_{1,0}^{(1)}(b) = 0$...	$F_{1,0}^{(\mu-1)}(b) = 0$
$\lambda_0^{\rightarrow} = F_{1,0}^{(0)}(a) = 1$	$\frac{-1}{\Delta^1}$	$\frac{+1}{\Delta^{1+2-1}}$...	$\eta_0^{\leftarrow} = \frac{(-1)^\mu}{\Delta^\mu} \cdot \binom{\mu-1}{\mu-1}$
$F_{1,0}^{(1)}(a) = 0$	$\frac{-1}{\Delta^{2+1-1}}$	$\frac{(-1)^2}{\Delta^{2+2-1}} \cdot \binom{2}{1}$...	$\frac{(-1)^\mu}{\Delta^{2+\mu-1}} \cdot \binom{\mu}{\mu-1}$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
$F_{1,0}^{(\mu-1)}(a) = 0$	$\eta_0^{\rightarrow} = \frac{-1}{\Delta^\mu} \cdot \binom{\mu-1}{0}$	$\frac{+1}{\Delta^{\mu+2-1}} \cdot \binom{\mu}{1}$...	$\frac{(-1)^\mu}{\Delta^{2\mu-1}} \cdot \binom{2\mu-2}{\mu-1}$

нением верхних освободившихся строк нулями) и делением полученного результата на $(p-1)!$.

Таблица для $F_{0,1}$ с точностью до замены знака и коррекции заголовков повторяет $F_{1,0}$. Таблицы для $F_{0,p}$ получаются из $F_{0,1}$ сдвигом вправо (с заполнением столбцов нулями) и делением на $(p-1)!$.

Таким образом, для $p = 1, \dots, \mu$ форма «по a , затем по b » имеет вид:

$$F_{p,0}^{\rightarrow}(x; a, b) = \frac{(x-a)^{p-1}}{(p-1)!} + \frac{(x-a)^\mu}{(p-1)!} \cdot \left[\sum_{k=0}^{\mu-1} \frac{(-1)^{k+1}}{\Delta^{\mu+k-p+1}} \times \binom{\mu+k-p}{k} \cdot (x-b)^k \right], \quad (41)$$

$$F_{0,p}^{\rightarrow}(x; a, b) = \frac{(x-a)^\mu}{(p-1)!} \cdot \left[\sum_{k=p-1}^{\mu-1} \frac{(-1)^{k+p-1}}{\Delta^{\mu+k-p+1}} \times \binom{\mu+k-p}{k-p+1} \cdot (x-b)^k \right]. \quad (42)$$

Целесообразно однократно вычислить (целочисленное сложение) и сохранить $(\mu+1) \cdot \mu / 2$ биномиальных коэффициентов.

Суммирование всех 2μ базисных многочленов (согласованно, одной формы) с 2μ заданными коэффициентами формально требует $4\mu^2$ операций умножения. Однако, в двухточечной форме («по a , затем по b ») у младшей части $F_{p,0}^{\rightarrow}(x; a, b)$ отличен от 0 только один коэффициент, у $F_{0,p}^{\rightarrow}(x; a, b)$

младшая часть – вся нулевая, а в старшей части – нулевые коэффициенты при слагаемых $(x-a)^\mu \cdot (x-b)^k$ для $k < p-1$, т. е. в действительности требуется $(\mu^2 + \mu) \cdot 3/2$ операций умножения и подготовка μ (отрицательных) степеней Δ . Первая одноточечная форма («по a ») почти всегда имеет μ ненулевых коэффициентов в старших частях $F_{k,0}(x; a, b)$ за счёт разложения $(x-a)^k = \sum_{p=0}^k (x-b)^p \cdot \Delta^{k-p} \cdot \binom{k}{p}$.

В отличие от п. 4.1, данный способ хорош тем, что при наличии базовых многочленов и уже построенного $P_{\mu,\mu}(x; a, b)$ он позволяет заменить k значений в наборе $(f^{(p-1)}(a))_{p=1,\dots,\mu}$, $(f^{(p-1)}(b))_{p=1,\dots,\mu}$ (например, для вариации) за $O(2k\mu)$ операций. Если варьируются $k = 2\mu$ параметров, то способ п. 4.1 – предпочтительнее.

4.3. Для $c \in [a; b]$ вычисление значения $P_{\mu,\mu}(c; a, b)$ требует 2μ операций умножения.

4.4. Представление («одноточечное» – в точке a)

$$P_{\mu,\mu}(x; a, b) = T_{2\mu}(x; a),$$

$$T_{2\mu}(x; a) = \sum_{k=0}^{2\mu-1} t_k(a) \cdot (x-a)^k, \quad t_k(a) = \frac{T_{2\mu}^{(k)}(a; a)}{k!}, \quad k = 0, \dots, 2\mu-1 \quad (43)$$

может быть получено из (23) за $O(\mu)$ операций умножения и деления.

Действительно, коэффициенты $(\lambda_k^{\rightarrow})_{k=0,\dots,\mu-1}$ совпадают с $t_k(a)$ для $k = 0, \dots, \mu-1$. Далее, по коэффициентам $(\eta_k^{\rightarrow})_{k=0,\dots,\mu-1}$ следует найти коэффициенты $(A_{\mu+k}^{\rightarrow})_{k=0,\dots,\mu-1}$ в множителе

$$\sum_{k=0}^{\mu-1} \eta_k^{\rightarrow} \cdot (x-b)^k = \sum_{k=0}^{\mu-1} A_{\mu+k}^{\rightarrow} \cdot (x-a)^k \quad (44)$$

«старшей» части $H_{\mu}^{\rightarrow}(x; a, b)$ многочлена $P_{\mu, \mu}(x; a, b)$, что требует $O(\mu)$ операций умножения/деления. Наконец, $t_k(a) = A_k^{\rightarrow}$ для $k = \mu, \dots, 2\mu - 1$.

4.5. Если коэффициенты $T_{2\mu}(x; a)$ известны, то для $c \in (a; b]$ представление («одноточечное» – в точке c)

$$P_{\mu, \mu}(x; a, b) = T_{2\mu}(x; c),$$

$$T_{2\mu}(x; c) = \sum_{k=0}^{2\mu-1} t_k(c) \cdot (x-c)^k, \quad t_k(c) = \frac{T_{2\mu}^{(k)}(c; c)}{k!},$$

$$k = 0, \dots, 2\mu - 1 \quad (45)$$

может быть получено за $O(\mu)$ операций умножения/деления.

Действительно, по коэффициентам $(t_k(a))_{k=0, \dots, 2m-1}$ следует найти коэффициенты $(t_k(c))_{k=0, \dots, 2m-1}$ в представлении

$$\sum_{k=0}^{2\mu-1} t_k(a) \cdot (x-a)^k = \sum_{k=0}^{2\mu-1} t_k(c) \cdot (x-c)^k \quad (46)$$

многочлена $P_{\mu, \mu}(x; a, b)$, что требует $O(2\mu)$ операций умножения/деления.

4.6. Для $[\tilde{a}; \tilde{b}] \subset [a; b]$ переход от $P_{\mu, \mu}(x; a, b)$ к представлению

$$P_{\mu, \mu}(x; \tilde{a}, \tilde{b}) = L_{\mu}^{\rightarrow}(x; \tilde{a}, \tilde{b}) + H_{\mu}^{\rightarrow}(x; \tilde{a}, \tilde{b}), \quad (47)$$

$$L_{\mu}^{\rightarrow}(x; \tilde{a}, \tilde{b}) = \sum_{k=0}^{\mu-1} \tilde{\lambda}_k^{\rightarrow} \cdot (x-\tilde{a})^k,$$

$$H_{\mu}^{\rightarrow}(x; \tilde{a}, \tilde{b}) = (x-\tilde{a})^{\mu} \cdot \sum_{k=0}^{\mu-1} \tilde{\eta}_k^{\rightarrow} \cdot (x-\tilde{b})^k \quad (48)$$

может быть выполнен за $O(3\mu)$ операций умножения/деления.

Действительно, за $O(2\mu)$ умножений/делений по п. 4.5 или 4.6 найдём

$$T_{2\mu}(x; \tilde{a}) = \sum_{k=0}^{2\mu-1} t_k(\tilde{a}) \cdot (x-\tilde{a})^k \quad (49)$$

и определим $L_{\mu}^{\rightarrow}(x; \tilde{a}, \tilde{b})$: $\tilde{\lambda}_k^{\rightarrow} = t_k(\tilde{a})$ для $k = 0, \dots, \mu - 1$. Далее

$$(x-\tilde{a})^{\mu} \cdot \sum_{k=0}^{\mu-1} t_{k+\mu}(\tilde{a}) \cdot (x-\tilde{a})^k =$$

$$= (x-\tilde{a})^{\mu} \cdot \sum_{k=0}^{\mu-1} \tilde{\eta}_k^{\rightarrow} \cdot (x-\tilde{b})^k = H_{\mu}^{\rightarrow}(x; \tilde{a}, \tilde{b}),$$

$$(50)$$

что также требует $O(\mu)$ операций умножения/деления.

Переход от $P_{\mu, \mu}(x; a, b)$ к $P_{\mu, \mu}(x; \tilde{a}, \tilde{b})$ может потребоваться при распространении заданных на интервалах непрерывности единичных начальных приближений на подынтервалы (в частности, при добавлении точек в (4)), на которых далее (при вариации управлений, например, для оптимизации функционалов) будут использоваться индивидуальные многочлены.

4.7. Для реализации алгоритмов в 4.3–4.6 использованы варианты схемы Горнера, в частности, в 4.4–4.6 – вариант М. Шо и Ж. Ф. Трауба [26], имеющий сложность $O(\mu)$ по умножениям/делениям. Следует отметить, что указанный вариант содержит двойной цикл, т.е. сложность по сложениям составляет $O(\mu^2)$.

4.8. Из приведённых оценок следует, что использование явных выражений в качестве алгоритмической основы для вычисления производных порядка $k = 0, \dots, \mu - 1$ многочлена $P_{\mu, \mu}(x; a, b)$:

$$P_{\mu, \mu}^{(k)}(x; a, b) = \sum_{p=k}^{\mu-1} f_{p+1,0} \cdot \frac{p! \cdot (x-a)^{p-k}}{(p-k)!} +$$

$$+ \left(\sum_{q=0}^k \sum_{s=0}^q + \sum_{q=k+1}^{\mu-1} \sum_{s=0}^k \right) f_{\mu, q+1} \times$$

$$\times \frac{k! \cdot \mu! \cdot q! \cdot (x-a)^{\mu-(k-s)} \cdot (x-b)^{q-s}}{s! \cdot (k-s)! \cdot (\mu-(k-s))! \cdot (q-s)!} \quad (51)$$

по сравнению с применением $T_{2\mu}(x; c)$, где $P_{\mu, \mu}^{(k)}(c; a, b) = k! \cdot t_k(c)$ для $c \in [a; b]$, при больших μ неоправданно. Следует отметить, что при $\mu = 2$ явные формулы имеют вид

$$P_{2,2}^{(1)}(x; a, b) = (f_{2,2} \cdot [(x-a) + 2 \cdot (x-b)] +$$

$$+ 2 \cdot f_{2,1}) \cdot (x-a) + f_{2,0}, \quad (52)$$

$$P_{2,2}^{(2)}(x; a, b) = f_{2,2} \cdot [4 \cdot (x-a) +$$

$$+ 2 \cdot (x-b)] + 2 \cdot f_{2,1}. \quad (53)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечисленные в п. 3 условия и их алгоритмический контроль позволили регулировать в ходе вычислительных экспериментов получение решений требуемого класса. В частности,

1) реализована возможность решать одно- и многоточечные задачи, т.е. когда решение в определённых точках заранее фиксируется;

2) реализована возможность решать задачи смешанного типа, т.е. когда часть решения на определённых отрезках заранее фиксируется;

3) реализована возможность (в заранее заданных точках) избирательно как задавать, так и запрещать разрывы функции и её производных;

4) задавая условия на производные, можно искать, в частности, кусочно-линейные или кусочно-постоянные решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (уникальный идентификатор соглашения - RFMEFI57715X0195)

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, госконтракт в рамках 220-го постановления №14.Z50.31.0023

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полежаев Ю. В., Фролов Г. А. Тепловое разрушение материалов. / Под ред. академика НАН Украины В. В. Скорохода. – Киев: Изд-во ИПМ НАНУ, 2005. – 288с.

2. Формалёв В. Ф. Теплопроводность анизотропных тел. Аналитические методы решения задач. – М.: Физматлит, 2014. – 312с.

3. Гришин А. М., Голованов А. Н., Зинченко В. И., Ефимов К. Н., Якимов А. С. Математическое и физическое моделирование тепловой защиты. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2011. – 358 с.

4. Василевский Э. Б., Степанов Э. А., Струминская И. В. Тангенциальный вдув газа в сверхзвуковой поток газа на лобовой поверхности затупленных тел // Труды Третьей Российской национальной конференции по теплообмену. В 8 томах. – М.: Изд-во МЭИ, 2002. – Т. 2. – С. 87–90.

5. Голованов А. Н. О физической модели течения газа и теплообмене в окрестности затупленного тела, обтекаемого высокотем-

пературным потоком при вдуве газа-охлаждителя через круглые отверстия // Известия СО АН СССР. Сер. техн. наук. – 1987. – Вып. 5, № 18. – С. 46–51.

6. Вараксин А. Ю., Поляков А. Ф., Ревизников Д. Л., Стратьев В. К., Третьяков А. Ф. Моделирование характера обтекания пористого затупления цилиндрического тела при слабых вдувах газа-охлаждителя // Труды Третьей Российской национальной конференции по теплообмену. В 8 томах. – М.: Изд-во МЭИ, 2002. – Т. 2. – С. 83–86.

7. Гараев К. Г., Овчинников В. А., Бильченко Н. Г. Инвариантные вариационные задачи ламинарного пограничного слоя при различных режимах течения: Монография. – Казань: Изд-во КГТУ, 2003. – 123 с.

8. Гараев К. Г., Мухаметзянов И. Р. Аэродинамический критерий «слабого» вдува в задачах оптимального управления ламинарным пограничным слоем в сверхзвуковых потоках на проницаемых поверхностях // Изв. ВУЗов. Авиационная техника. – 2014. – № 4. – С. 30–32.

9. Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж гос. ун-та. Сер. Физика и математика. – 2015. – № 1. – С. 83–94.

10. Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2015. – № 1. – С. 5–8.

11. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Сравнительный анализ применения некоторых специальных законов вдува в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых пористых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научно-технической конференции,

Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2015. – С. 137–139.

12. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М. : Наука, 1978. – 736 с.

13. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Сравнительный анализ применения некоторых специальных законов вдува в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых перфорированных поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2015. – С. 134–136.

14. Бильченко Н. Г. Применение специальных законов вдува в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов / Н. Г. Бильченко // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. VIII междунар. конф. «ПМТУКТ-2015» / под ред. И. Л. Батаронова, А. П. Жабко, В. В. Провоторова; Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2015. – С. 61–64.

15. Бильченко Г. Г. Листность обобщённых интегралов Чизотти / Г. Г. Бильченко // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ-2011): материалы IV Международной научной конференции, Воронеж, 12-17 сентября 2011г., Воронеж: Издательско-полиграф. центр Воронежского гос. ун-та, 2011. – С. 31–33.

16. Бильченко Г. Г. Звездообразное изменение строго почти-выпуклого интеграла Чизотти / Г. Г. Бильченко // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: Сборник трудов Международной конференции, Воронеж, 26–28 сентября 2011 г. – Воронеж : Издательско-полиграф. центр Воронежского гос. ун-та, 2011. – С. 69–71.

17. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Сравнительный анализ применения некоторых специальных законов вдува в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях гиперзвуко-

вых летательных аппаратов / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «ВЗМШ С. Г. Крейна-2016»: Материалы междунар. конф. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – С. 78–82.

18. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Классы решений задач оптимального управления пограничным слоем на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «ВЗМШ С. Г. Крейна-2016»: Материалы междунар. конф.- Воронеж : Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – С. 82–86.

19. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. I. О некоторых постановках и возможности восстановления управления / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 4. – С. 5–12.

20. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. II. О некоторых вычислительных экспериментах / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 4. – С. 13-19.

21. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. III. О постановке двумерных задач и областях допустимых значений «тепло-трение» / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2017. – № 1. – С. 18–25.

22. Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения «простых» законов вдува. / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 95–102.

23. Полежаев Ю. В., Юревич Ф. Б. Тепловая защита. – М : Энергия, 1976. – 392 с.

24. *Калиткин Н. Н.* Численные методы: учеб. пособие. – 2-е изд., исправленное. – СПб. : БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.

25. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – М. : Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. – 432 с.

Бильченко Григорий Григорьевич – канд. физ.-матем. наук, научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории №16 (при кафедре Теплотехники и энергетического машиностроения) Казанского национального исследовательского технического университета (КНИТУ-КАИ) им. А. Н. Туполева.
Тел.: +7-905-319-1843
E-mail: ggbil2@gmail.com

Бильченко Наталья Григорьевна – канд. физ.-матем. наук, научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории №16 (при кафедре Теплотехники и энергетического машиностроения) Казанского национального исследовательского технического университета (КНИТУ-КАИ) им. А. Н. Туполева.
Тел.: +7-905-319-1842
E-mail: bilchnat@gmail.com

26. *Кнут Д. Э.* Искусство программирования. Т. 2: Получисленные алгоритмы.- 3-е изд. М. : Вильямс, 2013. – 832 с.

Bilchenko Grigorij Grigorievich – Candidate of Science in Physics and Mathematics, Researcher of Research Laboratory #16, Department of Heat Engineering and Power Engineering Machinery, Kazan National Research Technical University (KNRTU-KAI) named after A. N. Tupolev.
Tel.: +7-905-319-1843
E-mail: ggbil2@gmail.com

Bilchenko Natalya Grigorievna – Candidate of Science in Physics and Mathematics, Researcher of Research Laboratory #16, Department of Heat Engineering and Power Engineering Machinery, Kazan National Research Technical University (KNRTU-KAI) named after A. N. Tupolev.
Tel.: +7-905-319-1842
E-mail: bilchnat@gmail.com