# ВЫБОР АНАЛИЗИРУЮЩЕЙ ВЕЙВЛЕТ-ФУНКЦИИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ПОИСКА ЭКСТРЕМУМОВ БИОМЕДИЦИНСКИХ СИГНАЛОВ

Б. З. Гармаев, В. В. Бороноев

Институт физического материаловедения СО РАН

### Поступила в редакцию 25.05.2017 г.

**Аннотация.** В работе рассматривается методика выбора вейвлет-функции для создания базиса непрерывного вейвлет-преобразования. В предложенной методике показывается алгоритм анализа непрерывных вейвлет-спектров с разными вейвлет-функциями с целью оценки их пригодности для поиска экстремумов. В результате показано, что в задаче поиска экстремумов сигнала с помощью непрерывного вейвлет-анализа наиболее точным является вейвлет Хаара.

Ключевые слова: вейвлет-анализ, вейвлет-функция, выбор базиса, поиск экстремумов. Annotation. The paper shows the method of selecting the wavelet functions for creating the basis of continuous wavelet transform. The proposed method shows the algorithm for the analysis of continuous wavelet spectra with different wavelet functions in order to estimate their usefulness for the search of extrema. The result shows that Haar wavelet is the most accurate for finding extrema of the signal using continuous wavelet analysis.

Keywords: wavelet analysis, wavelet-function, basis selection, extrema definition.

### **ВВЕДЕНИЕ**

В последнее время широкое распространение для анализа нестационарных сигналов получили частотно-временные методы, например, вейвлет-анализ, дающие заметные преимущества по сравнению с классическим спектральным анализом и позволяющие получить временные локализации спектральных компонент сигнала. Все преимущество вейвлет-анализа заключается в возможности выбора базиса среди большого количества вейвлетов.

Выбор анализирующего вейвлета, как правило, определяется тем, какую информацию необходимо извлечь из исследуемого сигнала. Каждый вейвлет имеет характерные особенности, как во временном, так и в частотном пространстве. Поэтому с помощью разных вейвлетов можно полнее выявить и подчеркнуть те или иные свойства анализируемого сигнала. Выбор анализирующей вейвлет-функции для создания базиса вей-

влет-преобразования является одним из вопросов, успешность решения которой влияет на успешность использования вейвлет-анализа в решаемой задаче. Обход этого вопроса отталкивает начинающих в этой области исследователей от использования вейвлет-анализа или значительно ссужает область его применения. Неудачный выбор конкретной формы вейвлета может привести к невозможности решения задачи [1]. Универсальное ранжирование базисов и свойств вейвлет-преобразования по предпочтительности предположительно невозможно [2]. При этом в большинстве связанных с вейвлет-анализом публикаций базис либо априорно задан или критерии и обоснования выбора базиса остаются неописанными.

Выбор вейвлет-функции особенно важен при непрерывном вейвлет-преобразовании, где результат преобразования трехмерный непрерывный вейвлет-спектр. Это затрудняет его анализ, который зачастую ограничивается визуальным анализом проекции вейвлет-спектра на оси масштаб-время. Это также усложняет выбор вейвлет-функ-

<sup>©</sup> Гармаев Б. З., Бороноев В. В., 2017

ции, так как при смене вейвлета в проекции вейвлет-спектра иногда происходят многочисленные изменения неподдающиеся анализу. Основным свойством непрерывного вейвлет-преобразования является локальность и избыточность представления сигнала [5], что позволит более детально анализировать локальные особенности сигналов, что перспективно в задаче нахождения экстремумов в сигнале и экстремумов их производной при наличии шума. Особенно важна эта задача в анализе биомедицинских сигналов [6-8], где требуется идентификация физиологических событий на основе нахождения экстремумов сигнала. Так для корректного анализа временных параметров сигнала требуется выбрать вейвлет-функцию, акцентируя внимание на корректности передачи временной структуры сигнала и простоту ее интерпретации. Поэтому целесообразно найти вейвлет-функцию, которая максимально адекватно передает положения точек экстремумов сигнала и ее производной. Применение непрерывного вейвлет-спектра для поиска точек экстремума является нетипичной задачей, хотя является задачей локального частотно-временного анализа сигнала как и большинство решаемых вейвлет-анализом задач. Данное обоснование выбора анализирующего вейвлета может быть полезно для подобных задач в смежных областях применения [9].

Цель данной работы показать методику обоснования выбора анализирующей вейвлет-функции для использования ее в задаче локализации точек экстремумов цифрового сигнала.

### ПРИМЕРЫ НЕУДАЧНОГО ВЫБОРА ВЕЙВЛЕТА

Для выбора вейвлетов были сравнены в действии разные вейвлеты на модельных сигналах. Уменьшая количество подходящих нам анализирующих вейвлетов, в результате анализа получим анализирующую вейвлет-функцию, которая наилучшим образом передает локальную структуру сигнала. Для этого исследовались вейвлет-спектры мо-

дельных сигналов и определялись погрешности нахождения расположения точек экстремумов и диапазон масштабов, где данные точки находятся с малой погрешностью.

Первый сигнал, представленный на рис. 1, представляет собой простую синусоиду  $s = 100\sin(2\pi t - \varphi).$ 

По оси абсцисс – время в секундах, по оси ординат – амплитуда в милливольтах. Примеры выбора вейвлета неудачного для анализа локальных особенностей в сигнале представлены на рис. 1 ниже исходного сигнала. В заголовке графиков название вейвлета, по оси абсцисс – время в секундах, по оси ординат – масштаб в секундах. Обозначение 'sym', взятое из [3], значит симлеты, ортогональные вейвлеты с компактным носителем не имеющие аналитического вида, цифрой обозначается порядок этого вейвлета.

Видно, что для sym2, sym3, sym6, sym7 можно подобрать масштаб, на котором находятся экстремумы синусоиды, но так как структура вейвлет-спектра имеет наклон, то по мере изменении масштаба ошибка нахождения экстремумов будет увеличиваться. При использовании sym8, sym9 и sym16 вейвлет-спектры имеют нечеткие структуры ниже масштаба 0.1 сек., что затруднит нахождение экстремумов. Данный вывод был сделан при разборе вейвлет-коэффициентов на конкретных масштабах, в дальнейшем мы разберем этот разбор на примере более подходящего выбора.

## ПРИМЕРЫ ВЫБОРА ВЕЙВЛЕТА, ПОДХОДЯЩЕГО ДЛЯ ПОИСКА ЭКСТРЕМУМОВ

Проанализировав наборы вейвлет-спектров синусоиды, построенных на основе разных вейвлет-функций, были выбраны следующие вейвлет-функции для дальнейшего рассмотрения их в качестве основного для анализа особенностей сигнала:

- 'Нааг' вейвлет Хаара
- 'bior1.3', 'bior1.5' биортогональные сплайн вейвлеты, представляющий собой пару вейвлетов, по одной из которых ведется анализ сигнала, по другой восстановление,

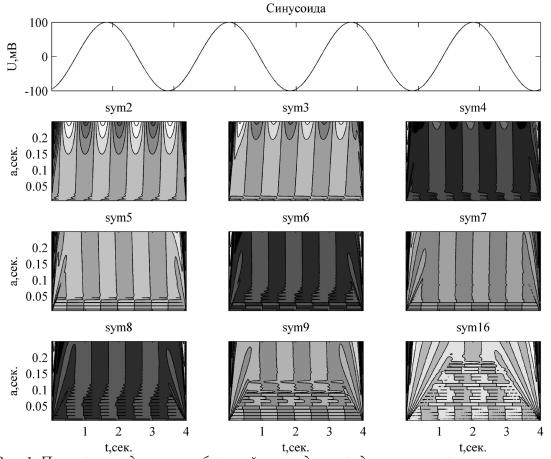


Рис. 1. Примеры неудачного выбора вейвлета для определения экстремумов синусоиды

цифрами обозначают порядки вейвлетов, задаются фильтрами;

- 'rbio3.1' обратные биортогональные сплайн вейвлеты;
- 'gaus1', 'gaus2', 'gaus3', 'gaus4'- вейвлеты, основанные на дифференциале функции Гаусса, цифрой и m обозначен порядок
- 'cgau1', 'cgau2', 'cgau3' комплексные вейвлеты Гаусса
  - 'mexh' вейвлет «мексиканская шляпа».

Их вейвлет-спектры имеют четкие вертикальные структуры, что позволит определить экстремумы синусоиды без ошибок на масштабах  $0.005 \div 0.1$  секунд или  $0.005 \div 0.15$  секунд в зависимости от вейвлет-функции.

Для выбора оптимальной вейвлет-функции рассмотрим на рис. 2 второй модельный сигнал, состоящей из суммы синусоид с частотами 1 и 2 Гц с амплитудами 100 и нормального шума по формуле

 $s = 100\sin(2\pi t - \varphi) + 100\sin(4\pi t - \varphi) + \xi \ ,$  где  $\xi$  – шум с нормальным распределением и дисперсией  $\sigma^2 = 1$ .

На масштабах меньше 0.05 секунд вейвлет-спектров, построенных с помощью гауссовых вейвлетов больше первого порядка (gaus2 – gaus4 и cgau2 – cgau3), видны множества особенностей, говорящих о том, что они чувствительны к шумам с таким уровнем. И это делает их не подходящими для использования при анализе малоамплитудных сегментов сигнала, где отношение шум/сигнал будет больше.

Было предложено для дальнейшего исследования выбрать из остальных три простейших вейвлет-функции: вейвлет Хаара и два гауссовых вейвлета первого порядка, так как остальные вейвлет-функции не имеют явных преимуществ, но имеют более сложные аналитические виды и созданы для других целей [4].

Выбранные три вейвлет-функций были использованы для анализа вейвлет-спектров пульсограммы практически здорового человека (рис. 3). Видно, что вейвлет-спектр с вейвлетом Хаара имеет вертикальную структуру, позволяющую определять структуру пуль-

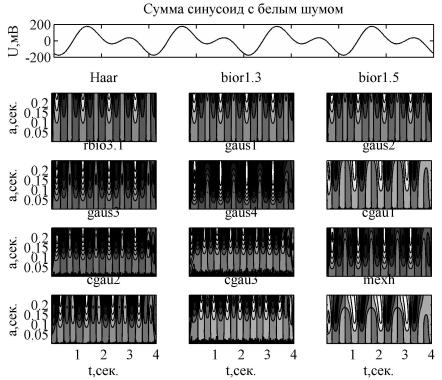


Рис. 2. Вейвлет-спектры суммы синусоид с шумом

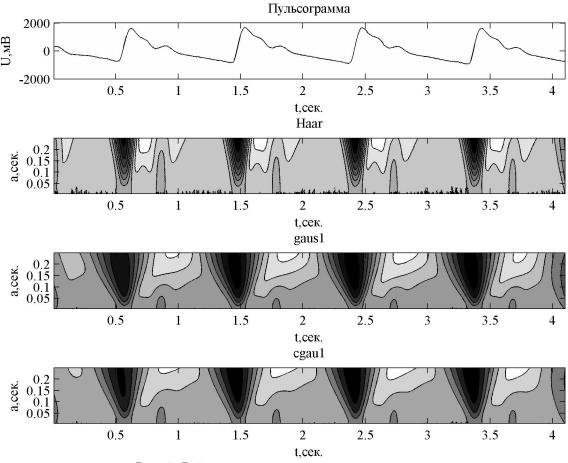


Рис. 3. Вейвлет-спектры пульсового сигнала

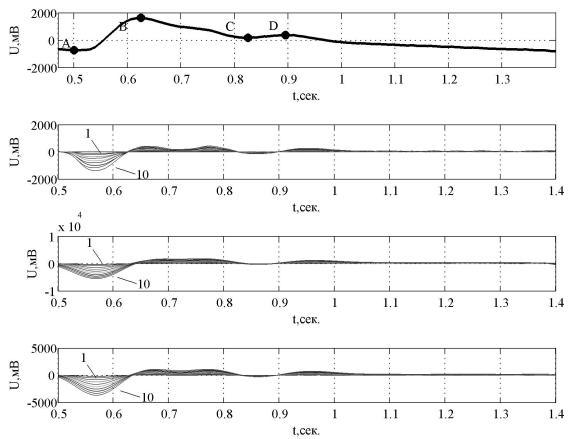


Рис. 4. Вейвлет-коэффициенты единичной волны пульсового сигнала на масштабах от 0.005(линия 1) до 0.05 секунд (линия 10) для вейвлета Хаара, вейвлета Гаусса и комплексного вейвлета Гаусса (сверху вниз)

сового сигнала на большем количестве масштабов. В то же время, на вейвлет-спектрах с вейвлетами gaus1 и cgau1 структуры визуально очень похожи и имеют нулевые значения непараллельные оси масштаба.

### АНАЛИЗ ВЕЙВЛЕТ-КОЭФФИЦИЕНТОВ НА ОТДЕЛЬНЫХ МАСШТАБАХ

На вейвлет-спектрах невозможно оценить точность нахождения и количество масштабов, на которых эти точки находятся с минимальной погрешностью, поэтому были проанализированы вейвлет-коэффициенты на отдельных масштабах.

Рассмотрим подробнее вейвлет-коэффициенты на единичной волне пульсового сигнала. На рис. 4 представлена единичная волна пульсового сигнала с графиками вейвлет-коэффициентов для вейвлета Хаара и двух вейвлетов Гаусса. Вейвлет-коэффициенты даны для десяти масштабов от 0.005 (линия 1) до

0.05 секунд (линия 10), и значения вейвлет-коэффициентов растут с их увеличением.

Видно, что точки экстремумов сигнала определяются нулевыми значениями вейвлет-коэффициентов, также как и на производной сигнала. Таким образом, можно определять точки экстремума на сигнале с помощью нулевых точек на разных масштабах вейвлет-спектра.

На рис. 5 показаны графики вейвлет-коэффициентов для трех функций возле точки  ${\bf A}$  – максимума пульсового сигнала t=0.625 сек. Графики даны с точностью в один шаг дискретизации равного 0,005 сек. Видно, что при использовании функции Хаара нулевые точки вейвлет-коэффициентов, которые определяют точку экстремума пульсового сигнала, на всех десяти масштабах расположены возле точки  ${\bf A}$  (t=0.625 сек) с точностью меньше одного шага дискретизации. В то время вейвлет-коэффициенты, найденные на основе функции Гаусса, имеют нулевые значения, от-

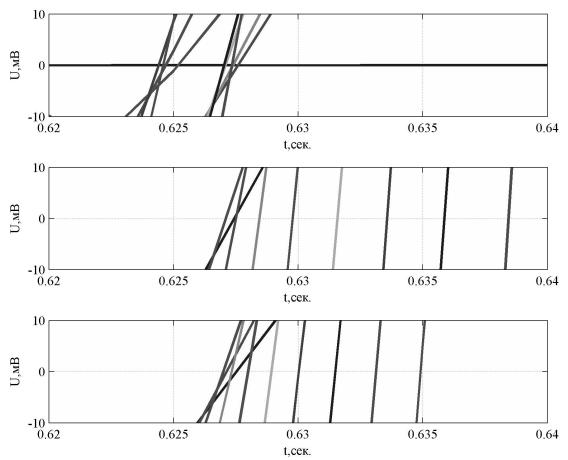


Рис. 5. Вейвлет-коэффициенты на масштабах от 0.005 до 0.05 секунд для вейвлета Хаара, вейвлета Гаусса и комплексного вейвлета Гаусса (сверху вниз) в районе точки максимума t=0.625 сек

клоняющиеся от точки  $\mathbf{A}$  (t = 0.625 сек) при увеличении масштаба, что будет приводить к увеличению погрешности определения точки экстремума исходного сигнала.

Определив подходящую функцию, оценим погрешность нахождения точек A, B, C, D для всех вейвлетов. Для них имеет смысл оценивать погрешность нахождения точки экстремума с помощью нулевых вейвлет-коэффициентов, начиная с масштаба больше 0.005 сек., так как вид функции не позволяет оценивать первый масштаб. Для остальных девяти масштабов вычислим погрешность по формуле:

$$\Delta = \frac{\sum_{m} (t - b_i)}{m} ,$$

где m – количество масштабов, t – истинное положение точек экстремумов,  $b_i$  – положение точек, найденных с помощью нулевых вейвлет-коэффициентов на масштабе i.

Таким образом, вычислим среднюю погрешность нахождения точек экстремумов на девяти масштабах по отдельности для каждой точки (A, B, C, D) и для каждого вейвлета, которые даны в табл. 1.

Как видно из таблицы средняя погрешность для вейвлет Хаара меньше 0.005 сек одного шага дискретизации по времени, что говорит о достаточной корректности передачи положений точек экстремума с помощью нулевых вейвлет-коэффициентов на всех девяти масштабах вейвлет-образа. Для вейвлета Гаусса погрешность для точек A, B, C больше шага дискретизации, а для комплексного вейвлета Гаусса погрешность в точках B, C чуть меньше шага дискретизации. Такие погрешности не позволяют корректно определять точки экстремума даже при отсутствии шумов.

Таким образом, данное исследование позволяет выбрать вейвлет Хаара для анализа

Точка экстремума погрешность $\Delta$ в сек	точка А	точка В	точка С	точка <b>D</b>
Вейвлет Хаара	0.001	0	0.001	0.002
Вейвлет Гаусса	0.007	0.008	0.008	0.001
Комплексный вейвлет Гаусса	0.001	0.004	0.004	0.002

локальных особенностей пульсового сигнала, и использовать данное вейвлет-преобразование для нахождения информативных точек (экстремумов) пульсовой волны.

### выводы

В предложенной методике показывается алгоритм анализа непрерывных вейвлет-спектров с разными вейвлет-функциями с целью оценки их пригодности для поиска экстремумов. Важным моментом в данной методики является переход с анализа трехмерных вейвлет-спектров к анализу двухмерных вейвлет-коэффициентов на разных масштабах. Такой переход показывает, как работает вейвлет-анализ внутри трехмерных вейвлет-спектров (анализируемые в основном визуально) и позволяет автоматизировать анализ сигналов. Это же позволяет уже числено оценить точность нахождения экстремумов при использовании конкретного вейвлета. В результате показано, что в задаче поиска экстремумов сигнала с помощью непрерывного вейвлет-анализа наиболее точным является вейвлет Хаара.

Данную методику выбора базиса можно использовать в задачах, где возможна приемлемая количественная оценка точности работы непрерывного вейвлет-преобразования. Это позволит анализировать трехмерные вейвлет-спектры не только качественно (визуально), но и количественно.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Воробьёв В. И.* Теория и практика вейвлет-преобразования / В. И. Воробьёв, В. Г. Грибунин СПб : ВУС, 1999. 145 с.
- 2. Меркушева А. В. Классы преобразований нестационарного сигнала в инфор-

мационно-измерительных системах. III. Время-масштабные (вейвлет-) преобразования для спектрально-временно́го анализа / А. В. Меркушева // Научное приборостроение. – 2002. – Т. 12, № 3. – С. 68–82.

- 3. Дьяконов В. П. Вейвлеты. От теории к практике / В. П. Дьяконов. М. : СОЛОН-Р, 2002.-448 с.
- 4. *Астафьева Н. М.* Вейвлет анализ: основы теории и примеры применения / Н. М. Астафьева // Успехи физических наук. 1996. Т. 166, № 11. С. 1115–1180.
- 5. Бороноев В. В. Особенности непрерывного вейвлет-преобразования пульсовых сигналов / В. В. Бороноев, Б. З. Гармаев, И. В. Лебединцева // Оптика атмосферы и океана. 2007. Т. 20, № 12. С. 1142–1146.
- 6. Бороноев В. В. Метод непрерывного вейвлет-преобразования в задаче выделения информативных точек пульсового сигнала / В. В. Бороноев, Б. З. Гармаев // Биомедицинские радиоэлектроника. 2009. № 3. С. 44–49.
- 7. Бороноев В. В. Особенности вейвлет-образов пульсовых сигналов при нарушении гемодинамики / В. В. Бороноев, Б. З. Гармаев // Изв. ВУЗов. Физика. 2010. Т. 53. Вып. 9/3. С. 192–193.
- 8. *Бороноев В. В.* Исследование статистической модели информативных точек пульсовой волны / В. В. Бороноев, Б. З. Гармаев // Вестник Бурятского государственного университета. 2012. № 3. С. 217–219.
- 9. *Гармаев Б. 3.* Численное дифференцирование биомедицинских сигналов с помощью вейвлет-преобразования / Б. 3. Гармаев, В. В. Бороноев // Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2017. № 2. URL: http://jre.cplire.ru/jre/feb17/9/text.pdf

Выбор анализирующей вейвлет-функции для задачи поиска экстремумов биомедицинских сигналов

Гармаев Б. 3. – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник, лаборатория волновой диагностики живых систем, Институт физического материаловедения СО РАН, Улан-Удэ.

E-mail: bair.garmaev@gmail.com

Бороноев В. В. – д-р техн. наук, профессор, заведующий лабораторией волновой диагностики живых систем, факультет компьютерных наук, Институт физического материаловедения СО РАН, Улан-Удэ.

E-mail: vboronojev2001@mail.ru

Garmaev B. Z. - Candidate of physico-mathematical Sciences, researcher, Laboratory of wave diagnostics of living systems, Institute of physical materials science SB RAS, Ulan-Ude. E-mail: bair.garmaev@gmail.com

Boronoev V. V. - Doctor of Technical Sciencies, Professor, Head of Laboratory of wave diagnostics of living systems, Institute of physical materials science SB RAS, Ulan-Ude.

E-mail: vboronojev2001@mail.ru