УДК 519.112.71

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ (МОДЕЛИ, АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ)

Л. В. Лелякова, А. Г. Харитонова, Г. Д. Чернышова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 31.03.2017 г.

Аннотация. Рассматриваются задачи о назначениях, возникающие при формализации различных прикладных проблем. Такие задачи, как правило, отличаются от классической постановки. В работе предлагаются алгоритмы решения задач с дополнительными ограничениями общего вида, а также многокритериальных задач. Предлагается использование двойственных алгоритмов для получения приближенных решений.
Ключевые слова: задача оптимизации, задача о назначениях, венгерский метод, многокритериальные задачи, метод Удзавы.
Annotation. We consider the assignment tasks which arising in the formalization of various applied problems. These tasks, as a rule, differ from the classical formulation. In this article, we propose algorithms for solving problems with additional general constraints, as well as multicriteria problems. It is proposed to use dual algorithms to obtain approximate solutions.
Keywords: an optimization task, the assignment problem, the Hungarian method, a multicriteria problems, the Udzawa method.

ВВЕДЕНИЕ

На практике часто встречаются проблемы, которые могут быть формализованы в виде задач о назначениях с дополнительными требованиями (задача планирования авиарейсов, задача планирования работ на авиационном заводе, задача оптимального распределения заказов на строительство детских садов и другие).

Математическая модель стандартной задачи о назначениях (ЗОН) имеет следующий вид [1].

$$L(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \;\; j = \overline{1,n},$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \;\; i = \overline{1,n},$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \;\; i = \overline{1,n}, \;\; j = \overline{1,n}.$$

Такая постановка предполагает, что матрица **C** квадратная, все ее элементы c_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ неотрицательны и в ответе допустимы любые назначения. В этом случае для решения задачи может быть использован венгерский метод.

Однако задачи, встречающиеся на практике, не всегда удовлетворяют этим требованиям. Наиболее часто встречающимися отличиями являются следующие отклонения от стандарта:

– заданная матрица **C** не является квадратной ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, $m \neq n$);

– существуют запреты на некоторые назначения;

– требуется найти максимум целевой функции;

– матрица **C** содержит отрицательные элементы;

– существует дополнительные линейные ограничения общего вида;

– возможно наличие нескольких целевых функций (многокритериальная задача о назначениях).

Задачу, учитывающую первые четыре особенности, назовем задачей о назначениях общего вида. Можно показать, что для ее решения допустимо использование венгерского метода. С этой целью необходимо осуществить предварительные преобразования матрицы **C**.

1. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ ОБЩЕГО ВИДА («АЗНОВ»)

Учитывая выделенные первые четыре требования, математическую модель задачи можно записать следующим образом.

$$L(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to \min\,(\max)$$

$$\sum_{i=1}^{m}s_{ij}x_{ij}=(\le)1,\ \ j=\overline{1,n},$$

$$\sum_{j=1}^{n}s_{ij}x_{ij}\le(=)1,\ \ i=\overline{1,m},$$

$$x_{ij}\in\{0,1\},\ \ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}.$$

Здесь **C** – произвольная матрица (необязательно квадратная и возможно имеющая отрицательные элементы c_{ij}),

S – матрица запретов, где

$$s_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если назначение } x_{ij} \text{ разрешено},\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Возможность использования венгерского метода при наличии первых двух отклонений от стандарта (открытая задача о назначениях с запретами) показана в [2].

Если требуется максимизация целевой функции, то переход к эквивалентной матрице T осуществляется следующим образом:

– найти максимальный элемент матрицы **C**

$$\max_{ij}c_{ij}=B;$$

– перейти к матрице T с элементами $t_{ij}=B-c_{ij}$.

Заметим, что такой переход к матрице T обеспечит неотрицательность ее элементов.

Пусть далее матрица **C** имеет отрицательные элементы. Переход к неотрицательной матрице осуществляется с использованием следующих эквивалентных преобразований:

– найти минимальный элемент матрицы **C**

$$\min_{ij}c_{ij}=K;$$

– перейти к матрице T с элементами $t_{ij}=c_{ij}-K$.

В результате может быть предложена следующая схема алгоритма решения задачи о назначениях общего вида.

Алгоритм 1. («АЗНОВ»)

Шаг 0. Ввести данные m, n, $\mathbf{C}=(c_{ij})$, $\mathrm{S}=(s_{ij})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Шаг 1. Проверить направленность целевой функции.

– если целевая функция максимизируется, то перейти к 2;

– если целевая функция минимизируется, то перейти к 3.

Шаг 2. Перейти к матрице T с элементами $t_{ij}=B-c_{ij}$, где $B=\max\limits_{ij}c_{ij}$. Перейти к 5.

Шаг 3. Проверить матрицу **C** на наличие отрицательных элементов

– если $\exists c_{lk}<0$, то перейти к 4;

– если $c_{ij}\ge 0$, $\forall i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, то перейти к шагу 5.

Шаг 4. Перейти к матрице T с элементами $t_{ij}=c_{ij}-K$, где

$$K=\min_{ij}c_{ij};$$

Шаг 5. Зафиксировать запреты.

$$t_{ij}=\begin{cases}c_{ij}, & \text{если } s_{ij}=0,\\ \mathrm{M}, & \text{если } s_{ij}=1,\end{cases}$$

где M играет роль штрафа ($\mathrm{M}>\max\limits_{ij}c_{ij}m$).

Шаг 6. Проверить:

– если $m<n$, то перейти к 7;

– если $m>n$, то перейти к 8;

– если $m=n$, то перейти к 9.

Шаг 7. Добавить $(n-m)$ нулевых строк в матрицу T. Перейти к 9.

Шаг 8. Добавить $(m-n)$ нулевых столбцов в матрицу T.

Шаг 9. Использовать венгерский метод для решения задачи о назначениях с квадратной матрицей T.

Шаг 10. Выписать в качестве ответа полученные на шаге 9 значения переменных x_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

2. ЗОН С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ОБЩЕГО ВИДА

На практике часто встречаются задачи о назначениях с дополнительными требованиями общего вида. Например, если требуется найти такое назначение, которое обеспечивает максимальную прибыль при ограничениях на время, а также на качество выполнения всех работ. В этом случае математическая модель может быть представлена в виде.

$$L(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min(\max) \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m}s_{ij}x_{ij}=(\le)1,\;\; j=\overline{1,n}, \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n}s_{ij}x_{ij}\le(=)1,\;\; i=\overline{1,m}, \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}^{k}x_{ij}-b^{k}\le(\ge)\,0,\;\; k=\overline{1,K} \qquad (4)$$

$$x_{ij}\in\{0,1\},\;\; i=\overline{1,m},\;\; j=\overline{1,n}. \qquad (5)$$

Ранее показано, что задача (1, 2, 3, 5) может быть эквивалентно переписана в виде.

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}t_{ij}x_{ij}\to\min$$

$$\sum_{i=1}^{l}x_{ij}=1,\;\; j=\overline{1,l},$$

$$\sum_{j=1}^{l}x_{ij}=1,\;\; i=\overline{1,l},$$

$$x_{ij}\in\{0,1\},\;\; i=\overline{1,l},\;\; j=\overline{1,l},$$

где $l=\max\{m,n\}$,

T – матрица, полученная в результате эквивалентных преобразований (см. **1**).

В результате без ограничения общности можно рассматривать задачу вида.

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}t_{ij}x_{ij}\to\min$$

$$\sum_{i=1}^{l}x_{ij}=1,\;\; j=\overline{1,l},$$

$$\sum_{j=1}^{l}x_{ij}=1,\;\; i=\overline{1,l},$$

$$x_{ij}\in\{0,1\},\;\; i=\overline{1,l},\;\; j=\overline{1,l},$$

$$f_k(x)=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}d_{ij}^{k}x_{ij}-b^{k}\le 0,\;\; k=\overline{1,K},$$

где $l=\max\{m,n\}$, новые элементы матрицы D равны нулю:

– при $m<n$, $d_{ij}=0$, $i=\overline{m+1,\ldots,n};$

– при $m>n$, $d_{ij}=0$, $j=\overline{n+1,\ldots,m}.$

Для получения приближенного решения таких задач может быть использован двойственный алгоритм Удзавы.

С этой целью запишем функцию Лагранжа в виде.

$$\Phi(X,y)=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}c_{ij}x_{ij}+\sum_{k=1}^{K}y_k\left(\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}d_{ij}^{k}x_{ij}-b_k\right),$$

$$x\in Q,\;\; y_k\ge 0,$$

где через Q обозначено множество X, удовлетворяющее основным ограничениям задачи о назначениях.

$$Q=\left\{x:\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{l}x_{ij}=1,\; j=\overline{1,l}\\ \sum_{j=1}^{l}x_{ij}=1,\; i=\overline{1,l}\\ x_{ij}\in\{0,1\},\; i=\overline{1,l},\; j=\overline{1,l}.\end{array}\right\}$$

После преобразования функция Лагранжа примет вид.

$$\Phi(X,y)=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}x_{ij}\left[c_{ij}+\sum_{k=1}^{K}y_k d_{ij}^{k}\right]-\sum_{k=1}^{K}y_k b_k.$$

Исходная задача теперь может быть переписана в виде

$$\min_{X\in Q}\max_{y\ge 0}\Phi(X,y).$$

Задачей двойственной к исходной называется задача вида

$$\max_{y\ge 0}\min_{X\in Q}\Phi(X,y)=\max_{y\ge 0}W(y),$$

где $W(y)=\min_{X\in Q}\Phi(X,y)$ – двойственная функция.

Известно, что функция $W(y)$ является выпуклой вверх (вогнутой) и имеет субградиент, координаты которого вычисляются в виде [2, 3].

В результате алгоритм, построенный на основе метода Удзавы, выглядит следующим образом.

Алгоритм 2.

Шаг 0. Ввести данные m, n, K, $\mathrm{C}=(c_{ij})$, $\mathrm{S}=(s_{ij})$, $\mathrm{D}=(d_{ij})$, $b^k, y^0\ge 0$, $N_{\max}$, положить $N=0$.

Шаг 1. Использовать «АЗНОВ» с матрицей $T = (t_{ij})$, где

$$t_{ij} = c_{ij} + \sum_{k=1}^{K} d_{ij}^k y_k^N, \ i = \overline{1,l}, \ j = \overline{1,l}.$$

Шаг 2. Вычислить субградиент двойственной функции $\widehat{\nabla} w(y^N)$ с координатами

$$f_k(x^N) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} d_{ij}^k x_{ij}^N - b_k, \ k = \overline{1,K}.$$

Шаг 3. Осуществить останов, если выполнены хотя бы один из двух критериев:

а) $\widehat{\nabla} w(y^N) = 0$ (ограничения (4) выполнены);

b) исчерпано число итераций $N_{\max}$.

Шаг 4. Вычислить y^{N+1} по формуле

$$y^{N+1} = \left[y^N + a\widehat{\nabla} w(y^N) \right]^+.$$

Знак «+» означает, что берется проекция на положительную ось. Увеличить N на единицу. Перейти к шагу 1.

3. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Нередко на практике встречаются задачи с несколькими критериями. В этом случае задача записывается следующим образом.

$$L_1(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^1 x_{ij} \to \min (\max)$$

$$\ldots$$

$$L_k(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^k x_{ij} \to \min (\max)$$

$$\sum_{i=1}^{m} s_{ij} x_{ij} = (\le) 1, \ j = \overline{1,n},$$

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ij} x_{ij} \le (=) 1, \ i = \overline{1,m},$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}.$$

Для решения таких задач, как правило, используется переход к одноцелевым задачам путем свертывания заданных критериев [4].

Среди используемых сверток чаще всего используется аддитивная свёртка, метод главного критерия и так называемый метод гарантированного результата.

Аддитивная свертка предполагает переход к целевой функции вида,

$$\sum_{k=1}^{K} \lambda_k L_k(x) \to \min (\max),$$

где $\lambda_k > 0, \ \sum_{k=1}^{K} \lambda_k = 1.$

Такой переход к одноцелевой задаче позволяет в дальнейшем использовать алгоритм 1 («АЗНОВ»).

Метод главного критерия предполагает выбор одного (главного) критерия и перевод оставшихся в разряд ограничений. В результате задача принимает вид ЗОН с дополнительными ограничениями общего вида.

$$L_p(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^p x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{m} s_{ij} x_{ij} = (\le) 1, \ j = \overline{1,n},$$

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ij} x_{ij} \le (=) 1, \ i = \overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^k x_{ij} - b^k \le 0, \ k = \overline{1,K}, \ k \ne p$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n},$$

где b^k – допустимые верхние границы для критериальной функции.

Для решения этой задачи может быть использован **Алгоритм 2**.

Рассмотрим возможности использования метода гарантированного результата.

Пусть для определенности все целевые функции необходимо минимизировать. В противном случае соответствующая матрица C^S может быть эквивалентно преобразована (см. **1**).

Метод гарантированного результата предполагает переход к задаче вида

$$\min_{x \in Q} \max \{L_1(x), \ldots, L_K(x)\},$$

которая может быть переписана следующим образом

$$\mu \to \min$$

при ограничениях

$$f_i(x) = L_i(x) - \mu \le 0, \ i = \overline{1,K};$$

$$x \in Q.$$

Для получения приближенного решения такой задачи, как и в случае применения метода главного критерия, может быть использован алгоритм Удзавы.

С этой целью запишем функцию Лагранжа в виде

$$\Phi(x,y,\mu)=$$
$$=\mu+\sum_{k=1}^{K}u_k f_k=\mu+\sum_{k=1}^{K}u_k(L_k(x)-\mu)=$$
$$=\mu+\sum_{k=1}^{K}u_k L_k(x)-\mu\sum_{k=1}^{K}u_k=$$
$$=\mu\left(1-\sum_{k=1}^{K}u_k\right)+\sum_{k=1}^{K}u_k\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}^k x_{ij}\right),$$
$$x\in Q,\quad u_k\ge 0.$$

Исходная задача принимает вид
$$\min_{x\in Q}\max_{u_k\ge 0}\left\{\mu\left(1-\sum_{k=1}^{K}u_k\right)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\left(\sum_{k=1}^{K}u_k c_{ij}^k\right)\right\}.$$

При фиксированных двойственных переменных u_k^N задача принимает вид
$$\min_{\substack{x\in Q\\ \mu\ge 0}}\left\{\mu\left(1-\sum_{k=1}^{K}u_k^N\right)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}v_{ij}^N x_{ij}\right\},$$
где $v_{ij}^N=\sum_{k=1}^{K}u_k^N c_i^k$.

В результате на первом шаге алгоритма Удзавы решаются следующие задачи:

1) ЗОН с матрицей V с элементами v_{ij}^N;

2) Задача отыскания μ в виде
$$\mu\left(1-\sum_{k=1}^{K}u_k^N\right)\to\min_{\mu\ge 0}.$$

Заметим, что переменная μ удовлетворяет следующим ограничениям
$$0\le\mu=\max\{L_1(x),\dots,L_K(x)\}.$$

В результате задача отыскания μ решается следующим образом
$$\mu^N=\begin{cases}0,\ \text{если}\ 1-\sum_{k=1}^{K}u_k^N>0\\ \max\{L_1(x),\dots,L_K(x)\},\ \text{если}\ 1-\sum_{k=1}^{K}u_k^N<0\\ \text{любое значение, если}\ 1-\sum_{k=1}^{K}u_k^N=0.\end{cases}$$

Таким образом решение многокритериальной задачи осуществляется в соответствии со следующим алгоритмом.

Алгоритм 3.

Шаг 0. Ввести данные $m,\ n,\ K,\ \mathrm{C}^K=(c_{ij}^k)$, $\mathrm{S}=(s_{ij}),\ u_k^0\ge 0,\ N_{\max}$, положить $N=0$.

Шаг 1.

a) Решить ЗОН алгоритмом 1 с матрицей V с элементами
$$v_{ij}^N=\sum_{k=1}^{K}c_{ij}^k u_k^N;$$

b) Вычислить переменную μ^N.

Шаг 2. Вычислить координаты субградиента двойственной функции
$$f_k(x^N)=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}c_{ij}^k x_{ij}^N-\mu^N,\ k=\overline{1,K}$$

Шаг 3. Осуществить останов, если выполнены хотя бы один из двух критериев:

a) $f_k(x^N)=0$;

b) исчерпано число итераций $N_{\max}$.

Шаг 4. Пересчитать значение двойственных переменных
$$u_k^{N+1}=\left[u_k^N+af_k(x^N)\right]^+.$$

Увеличить N на единицу. Перейти к шагу 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корбут А. А.* Дискретное программирование / А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн; Под ред. Д. Б. Юдина. – М. : Наука, 1969. – 368 с.

2. *Малюгина О. А.* Использование задачи о назначениях при решении проблемы формирования штатов / О. А. Малюгина, Г. Д. Чернышова // Вестник факультета прикл. мат., информ. и мех. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т., 2010. – Вып. 8. – С. 141–148.

3. *Мину М.* Математическое программирование: теория и алгоритмы / М. Мину [Пер. с фр. А. И. Штерна]. – М. : Наука, 1990. – 488 с.

4. *Машунин Ю. К.* Теория управления. Математический аппарат управления в экономике / Ю. К. Машунин. – М. : Логос, 2013. – 448 с.

Лелякова Людмила Владимировна – магистрант кафедры математических методов исследования операций факультета ПММ, Воронежский Государственный Университет.
Тел.: 8-904-214-73-11
E-mail: lufka93@mail.ru

Харитонова Анастасия Геннадьевна – магистрант кафедры математических методов исследования операций факультета ПММ, Воронежский Государственный Университет.
Тел.: 8-951-541-00-73
E-mail: anastasiakharitonova@yahoo.com

Чернышова Галина Дмитриевна – канд. техн. наук, доцент кафедры математических методов исследования операций факультета ПММ, Воронежский Государственный Университет.
Тел.: 8-903-854-70-78
E-mail: chern@vsau.ru

Lelyakova L. V. – master of the department Mathematical Methods of Operation Research; the Faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics; Voronezh State University.
Tel.: 8-904-214-73-11
E-mail: lufka93@mail.ru

Kharitonova A. G. – master of the department Mathematical Methods of Operation Research; the Faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics; Voronezh State University.
Tel.: 8-951-541-00-73
E-mail: anastasiakharitonova@yahoo.com

Chernyshova G. D. – docent of the department Mathematical Methods of Operation Research; the Faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics; Candidate of Technical Sciences; Voronezh State University.
Tel.: 8-903-854-70-78
E-mail: chern@vsau.ru