УДК 510.22

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ С НЕЧЕТКИМИ ТРЕУГОЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГЕБРЫ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

А. О. Шевляков

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 21.02.2017 г.

Аннотация. Нечеткие числа хорошо подходят для представления неопределенной информации. Однако стандартные подходы к выполнению операций над нечеткими числами имеют ряд серьёзных недостатков, которые ограничивают их практическое применение. В данной статье предлагается алгебра двухкомпонентных чисел, которая лишена этих недостатков.
Ключевые слова: нечеткая алгебраическая структура, алгебра двухкомпонентных чисел, треугольное нечеткое число.
Annotation. Fuzzy numbers are good at describing uncertain information. But classical approaches for handling fuzzy numbers have serious flaws that limit their practical applications. In this paper, we propose the algebra of double component numbers which avoids these deficiencies.
Keywords: fuzzy algebraic structure, algebra of double component numbers, triangular fuzzy number.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих областях, таких как задачи управления и принятия решений, системный анализ, исследование операций, экспертные системы, встречаются данные, которые известны лишь приближенно. Предложенная Л. А. Заде в 1965 году теория нечетких множеств позволяет обрабатывать подобные данные. Также Л. А. Заде ввел понятие нечеткого числа как выпуклого и нормального нечеткого множества, определенного на оси действительных чисел R [1]. С тех пор множество исследователей внесли свой вклад в теорию нечетких чисел и её приложения. Одной из проблем, которая до сих пор не была окончательно решена и которой посвящено множество работ, является определение различных операций над нечеткими числами [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9].

Стандартные подходы к выполнению операций основываются на предложенном Л. А. Заде принципе расширения [1, 3, 10]. Однако они имеют ряд недостатков, которые не позволяют применять их во множестве задач управления, оптимизации и т. п. Одной из таких проблем является проблема зависимости. Она заключается в том, что каждое новое вхождение одной и той же нечеткой переменной в уравнение рассматривается как независимое. Одним из последствий является невыполнение естественных для «четких» чисел тождеств: $A - A = 0,\ \ A / A = 1,$ которые желательны во многих задачах. Другая проблема заключается в том, что в подходах, основанных на принципе расширения, вычитание и деление не являются операциями, обратными сложению и умножению. В результате подстановка полученных корней в исходное уравнение не обращает уравнение в тождество. Это не позволяет использовать данные подходы при решении различных обратных задач.

В данной статье представлена алгебра двухкомпонентных чисел, направленная на преодоление указанных недостатков. Дальнейшая часть статьи организована следующим образом. В первом разделе будут рассмотрены базовые понятия и определения, связанные с нечеткими числами. Во втором разделе описывается алгебра однокомпонентных треугольных чисел, на основании которой затем и будет построена предлагаемая алгебра двухкомпонентных нечетких чисел. Описание алгебры двухкомпонентных чисел вместе с некоторыми свойствами и рядом примеров приводится в третьем разделе. Завершает работу заключение, в котором сформулированы основные выводы.

1. НЕЧЕТКИЕ ЧИСЛА

Нечеткое множество – это расширение классического множества, в котором характеристическая функция множества (для нечеткого множества она называется функцией принадлежности) может принимать любые значения в интервале $\left[0,1\right]$, а не только значения 0 и 1.

Определение 1. Пусть $X=\{x\}$ – множество (конечное или бесконечное), которое будем называть универсальным множеством. Тогда нечеткое множество A в X есть совокупность упорядоченных пар $A=\{x,\mu_A(x)\}$, где $\mu_A(x)$ – функция, представляющая собой степень принадлежности x к A, $\mu_A(x):X\to[0,1]$ [11].

Определение 2. Носителем $supp(A)$ нечеткого множества A называется четкое множество элементов $x\in X$, для которых степень принадлежности больше нуля: $supp(A)=$ $=\{x\in X,\mu_A(x)>0\}$.

Определение 3. Множеством r-уровня нечеткого множества A A_r называется четкое множество элементов $x\in X$, для которых степень принадлежности не меньше данного значения r: $A_r=\{x\in X,\mu_A(x)\geq r\}$.

Определение 4. Нечетким числом A, заданным в параметрической форме, называется пара $(\underline{a},\overline{a})$ функций $\underline{a}(r)$, $\overline{a}(r)$, $0\leq r\leq 1$, которые удовлетворяют следующим условиям:

- $\underline{a}(r)$ – это ограниченная непрерывная слева монотонно возрастающая на отрезке $[0,1]$ функция.
- $\overline{a}(r)$ – это ограниченная непрерывная слева монотонно убывающая на отрезке $[0,1]$ функция.
- $\underline{a}(r)\leq\overline{a}(r)$, $0\leq r\leq 1$ [12].

На практике часто применяются треугольные нечеткие числа, когда в системе недостаточно информации для того, чтобы задать параметры нелинейных функций принадлежности. Кроме того, над такими числами намного проще проводить вычисления, и во многих задачах они позволяют достичь достаточной точности решения.

Определение 5. Треугольным нечетким числом A, заданным в параметрической форме, называется нечеткое число $A=(\underline{a}(r),\overline{a}(r))=$ $=(\underline{a}+b_1r,\overline{a}-b_2r)$, $r\in[0,1]$, где $\underline{a}$, $\overline{a}$ – левая и правая границы треугольного числа (значения $\underline{a}(r)$ и $\overline{a}(r)$ при $r=0$), b_1 и b_2 – неотрицательные коэффициенты нечеткости.

Стандартным способом выполнения арифметических операций с нечеткими числами является принцип расширения Л. Заде и его r-уровневый аналог.

Определение 6. Если задана функция от нечетких аргументов $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$, в которой нечеткие числа представлены в виде разложения по r-уровневым множествам: $y=\bigcup\limits_{r\in[0,1]}(\underline{y}_r,\overline{y}_r)$, $x_i=\bigcup\limits_{r\in[0,1]}(\underline{x}_{ir},\overline{x}_{ir})$, $i=\overline{1,n}$, то для любого r-уровня значение функции вычисляется по формулам: $\underline{y}_r=\inf(f(x_{1r}^*,x_{2r}^*,...,x_{nr}^*))$, $\overline{y}_r=\sup(f(x_{1r}^*,x_{2r}^*,...,x_{nr}^*))$, где $x_{ir}^*\in\left[\underline{x}_{ir},\overline{x}_{ir}\right]$, $i=\overline{1,n}$ [13].

Принцип расширения Л. Заде обуславливает приведенные в начале статьи негативные особенности использующих его арифметик нечетких чисел. На преодоление этих особенностей направлена предложенная в данной статье алгебра двухкомпонентных чисел.

2. АЛГЕБРА ОДНОКОМПОНЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

Для начала определим понятие однокомпонентного числа.

Определение 7. Треугольным однокомпонентным числом X (далее X-число) будем называть конструкцию, представленную в виде $X=x(r)=(a+br)$, где a, b, r – вещественные параметры, $r\in[0,1]$, $r\in\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$.

Однокомпонентное число $(3+2r)$ показано на рис. 1.

Алгебраическая структура состоит из несущего множества K; совокупности опера-

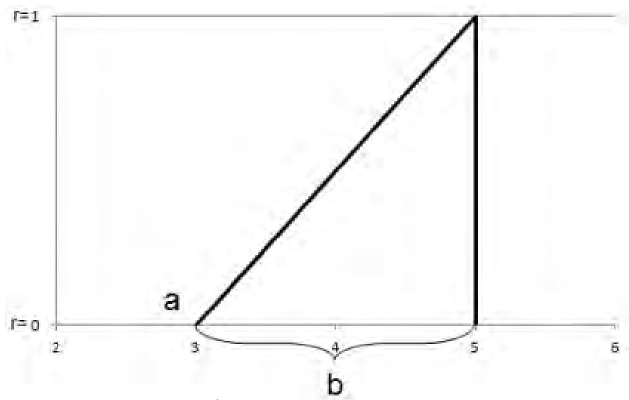

Рис. 1. Однокомпонентное число

ций (сигнатуры) S над элементами этого множества, и совокупности отношений R на множестве $K.$ Множеством K в нашем случае является множество треугольных однокомпонентных чисел: $K=\{x(r)\}$, $x(r)=(a+br)$, $r\in[0;1]$. Определим следующие требования к алгебре $P=\langle K;+,*\rangle$ на множестве X -чисел:

1. алгебра должна ограничивать неоправданное расширение неопределенности результата вычислений (операции вычитания и деления должны уменьшать носитель результата этой операции);

2. должны сохранятся естественные свойства и отношения классических моделей при работе с нечеткими параметрами, например, тождественность уравнения после подстановки его решения (операции вычитания и деления должны быть обратными операциям сложения и умножения).

3. должна обеспечиваться замкнутость несущего множества K относительно операций алгебры.

Бинарная операция сложения определяется следующим образом:

$$x(r)=x_1(r)+x_2(r)=a_1+a_2+(b_1+b_2)r\in K. \quad (1)$$

Единственный нулевой элемент $\mathrm{O}=(0+0r)\in K$ выбран таким, что $\forall x(r)\in K$ $x(r)+\mathrm{O}=a+br+0+0r=x(r)$.

Бинарная операция умножения определяется таким образом, чтобы она обеспечивала сохранение результата в форме X -числа:

$$\begin{gathered}x(r)=x_1(r)\cdot x_2(r)=\\=a_1a_2+(a_1b_2+a_2b_1+b_1b_2)r;\;\; r_2(r)\in K\end{gathered} \quad (2)$$

Единственное единичное число $I=1+0r\in K$ выбрано таким, что $\forall x(r)\in K$: $I\cdot x(r)=(1+0r)(a+br)=x(r)$.

Для каждого элемента $x(r)=a+br\in K$ единственный противоположный элемент задан как $-x(r)=-a-br$, благодаря чему $x(r)+(-x(r))=a+br-a-br=\mathrm{O}$.

Тогда операция вычитания представляется в следующем виде:

$$x_1(r)-x_2(r)=x_1(r)+(-x(r)). \quad (3)$$

Обратный элемент $x^{-1}(r)\in K$, удовлетворяющий условию $x(r)\cdot x^{-1}(r)=1$, задается следующим образом:

$$x^{-1}(r)=\frac{1}{a}-\frac{b}{a(a+b)}r,\quad a\neq 0,\; a+b\neq 0 \quad (4)$$

Тогда операция деления представляется в следующем виде:

$$x_1(r)\,/\,x_2(r)=x_1(r)\cdot x_2^{-1}(r). \quad (5)$$

Операции вычитания и деления X -чисел задаются как операции сложения и умножения с соответствующими противоположными и обратными числами.

Если задавать нечеткие однокомпонентные числа двумя действительными числами $x(0)$ и $x(1)$ (значения $x(r)$ при $r=0$ и $r=1$), то операции выполняются следующим образом:

$$x_1(r)*x_2(r)=x(0)+(x(1)-x(0))r, \quad (6)$$

где $x(0)=x_1(0)*x_2(0)$, $x(1)=x_1(1)*x_2(1)$, $*\in\{+,-,\cdot,/\}$ и все операции выполняются по правилам работы с действительными числами [14].

3. АЛГЕБРА ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

Определение 8. Двухкомпонентным треугольным числом W (далее W -число) будем называть конструкцию, представленную вектором $(v^L(r);v^R(r))$, $v^L(r)\in X$, $v^R(r)\in X$, для которой выполняется условие $v^L(1)=v^R(1)$ (совпадают значения при $r=1$).

Треугольные нечеткие числа можно представить в виде W -чисел, когда $v^L(r)=a^L+b^Lr$, $b^L\geq 0$ и $v^R(r)=a^R+b^Rr$, $b^R\leq 0$.

Алгебра W -чисел (далее W -алгебра) предполагает автономное выполнение арифметических операций над левыми компонентами операндов с записью результата в левую компоненту итогового числа и над правыми компонентами с соответствующей записью в правую компоненту итогового числа.

Определение 9. Пусть компоненты (левые или правые) двух W-чисел представлены в виде $x(r)=x(0)+(x(1)-x(0))r$, где $x(0)$, $x(1)$ – действительные числа. Тогда, в результате выполнения операции, компонента (левая или правая) результирующего W-числа примет вид $x_1(r)*x_2(r)=x(0)+(x(1)-x(0))r$, где $x(0)=x_1(0)*x_2(0)$, $x(1)=x_1(1)*x_2(1)$, $*\in\{+,-,\cdot,/\}$ и все операции выполняются по правилам работы с действительными числами.

Операции линейны по переменной r, множество всех X-чисел является замкнутым по всем операциям, то есть если $x_i(r)\in X$, $x_j(r)\in X$, то $x(r)=x_i(r)*x_j(r)\in X$, $*\in\{+,-,\cdot,/\}$.

Определение 10. Пусть W_1 и W_2 – два W-числа. Тогда операции между этими числами будут производиться в соответствии со следующим правилом: $(v_1^L,v_1^R)*(v_2^L,v_2^R)=$ $=([v_1^L*v_2^L],[v_1^R*v_2^R])=(v^L,v^R)$, где $*\in\{+,-,\cdot,/\}$.

W-число также можно представлять в виде трех чисел $W=(a,b,c)$, которое в параметрической форме имеет вид $v^L(r)=a+(b-a)r$ и $v^R(r)=c+(b-c)r$.

Определение 11. Пусть два W-числа представлены в виде $W_1=(a_1,b_1,c_1)$, $W_2=(a_2,b_2,c_2)$. Тогда результат выполнения операции примет вид $W=(a_1*a_2,b_1*b_2,c_1*c_2)$, $*\in\{+,-,\cdot,/\}$ и все операции выполняются по правилам работы с действительными числами.

Теорема 1. *Результат выполнения операций над W-числами всегда будет W-числом, т. е. всегда будут выполняться условие замкнутости.*

Доказательство. Рассмотрим два W-числа $W_1=(a_1+b_1r,a_2+b_2r)$ и $W_2=(c_1+d_1r,c_2+d_2r)$.

Из равенства значений левой и правой компонент при $r=1$ (далее будем значение $x(r)$ при $r=1$ называть модой, по аналогии с нечеткими числами) имеем:

$$\begin{cases}a_1+b_1=a_2+b_2\\c_1+d_1=c_2+d_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=a_2-b_1+b_2\\c_1=c_2-d_1+d_2\end{cases}\qquad(7)$$

Докажем совпадение мод для каждой из операций (сложение, вычитание, умножение, деление).

Сложение.

$$\begin{cases}v^L=a_1+b_1r+c_1+d_1r\\v^R=a_2+b_2r+c_2+d_2r\end{cases}\qquad(8)$$

Подставим a_1 и c_1 из уравнения 1 при $r=1$:

$$\begin{cases}v^L=a_2+b_2+c_2+d_2\\v^R=a_2+b_2+c_2+d_2\end{cases}\qquad(9)$$

Для оставшихся операций доказательство аналогично.

Применение W-алгебры обеспечивает полное преодоление всех указанных негативных особенностей, характерных для нечетких арифметик, основывающихся на принципе расширения Л. Заде. При этом нечеткие треугольные числа являются W-числами, что позволяет решать нечеткие задачи с использованием предложенной алгебры.

Рассмотрим использование предложенной алгебры на ряде примеров, с которыми не справляются алгебры, основанные на принципе расширения Заде.

Пример 1. Вычитание треугольного нечеткого числа $A=(a,b,c)$ из самого себя: $W=(a,b,c)-(a,b,c)=(0,0,0)$. Результатом является четкий ноль.

Пример 2. Деление треугольного нечеткого числа $A=(a,b,c)$ на себя: $W=(a,b,c)/(a,b,c)=(1,1,1)$. Результатом является четкая единица.

Пример 3. Решение уравнения $Ax+B=C$ с нечеткими треугольными параметрами $A=(4,5,7)$, $B=(1,2,3)$, $C=(4,6,9)$. Найдём $x=(C-B)/A$: $x=((4-1)/4,(6-2)/5,(9-3)/7)=$ $=(3/4,4/5,6/7)$. Подставим полученный x в исходное уравнение: $Ax+B=$ $=(4,5,7)(3/4,4/5,6/7)+(1,2,3)=(4,6,9)=C$. Подстановка обращает уравнение в тождество.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нечеткие числа удобны для представления встречаемых в реальной жизни параметров моделей, но отсутствие адекватного способа выполнения над ними арифметических операций (отсутствие алгебраической структуры с необходимыми свойствами) серьёзно ограничивает их применимость. Предложенная W-алгебра позволяет решать задачи с параметрами, представленными в виде треугольных нечетких чисел, и лишена перечисленных во введении недостатков:

• Операции вычитания и деления являются обратными операциям сложения и умножения, потому с помощью W-алгебры возможно решать обратные задачи.

• Вычитание и деление приводят к уменьшению носителя результирующего числа, таким образом отсутствует свойственный классическим подходам интенсивный рост ширины итоговых нечетких интервалов. Благодаря этому возможно решать и анализировать результаты задач с большим числом нечетких параметров.

• Для решения задач можно использовать стандартные программные средства, так как вычисления проводятся по правилам работы с действительными числами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zadeh L. A.* Fuzzy sets / L. A. Zadeh // Fuzzy sets Information and Control. – 1965. – № 8(3). – pp. 338–353.

2. *Воронцов Я. А.* Алгебраические операции с нечеткими LR-числами с использованием преобразования L / Я. А. Воронцов, М. Г. Матвеев // Программная инженерия. – 2014. – № 8. – С. 23–29.

3. *Dubois D.* Operations of Fuzzy Number's / D. Dubois, H. Prade // International Journal of Systems Science. – 1978. – №9(6). – pp. 613–626.

4. *Kaufmann A.* Introduction to Fuzzy Arithmetic / A. Kaufmann, M.M. Gupta. – Van Nostrand Reinhold, 1985. – 384 p.

5. *Mizumoto M.* The four Operations of Arithmetic on Fuzzy Number's / M. Mizumoto, K. Tanaka // Systems, computers, controls. – 1977. – №7(5). – pp. 73–81.

6. *Chalco-Cano Y.* Single level constraint interval arithmetic / Y. Chalco-Cano, W. Lodwick, B. Bede // Fuzzy Sets and Systems. – 2014. – № 257. – pp. 146–168.

7. *Goetschel Jr. R.* Elementary fuzzy calculus / R. Goetschel Jr., W. Voxman // Fuzzy Sets and Systems. – 1986. – № 18. – pp. 31–43.

8. *Klir G.* Fuzzy arithmetic with requisite constraints / G. Klir // Fuzzy Sets and Systems. – 1997. – № 91. – pp. 165–175.

9. *Матвеев М. Г.* Арифметические операции над двухкомпонентными нечеткими числами / М. Г. Матвеев, Я. А. Воронцов, О. И. Канищева // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2014. – № 2. – С. 75–82.

10. *Zadeh L. A.* Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility / L. A. Zadeh // Fuzzy sets and systems. – 1978. – № 1. – pp. 3–28.

11. *Дилигенский Н. В.* Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Н. В. Дилигенский, Л. Г. Дымова, П. В. Севастьянов. – М. : Издательство Машиностроение-1, 2004. – 397 с.

12. Kaleva O. Fuzzy differential equations / O. Kaleva // Fuzzy Sets and Systems. – 1987. – № 24. – pp. 301–317.

13. *Zadeh L. A.* The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, Parts 1, 2, 3 / L. A. Zadeh // Information Sciences. – 1975. – № 8. – pp. 43–80, 199–249, 301–357.

14. *Матвеев М. Г.* Анализ и решение задач выбора с параметрической нечеткостью / М. Г. Матвеев // Вестник Южно-Уральского государственного университета, серия «Математическое моделирование и программирование». – 2015. – № 8(4). – С. 14–29.

Шевляков А. О. – аспирант, кафедра информационных технологий управления, факультет компьютерных наук, Воронежский государственный университет.
E-mail: shevlyakov.a.o@mail.ru

Shevlyakov A. O. – post-graduate student, dept. of Information Technologies of Management, Computer Science Faculty, Voronezh State University.
E-mail: shevlyakov.a.o@mail.ru