

## МЕРА НЕСХОДСТВА НА МНОЖЕСТВЕ ГРАФОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

А. В. Кузнецов

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 30.03.2017 г.

**Аннотация.** В статье вводится мера несходства графов, основанная на биотопическом расстоянии множеств. Предлагается понятие «непрерывного вывода» графа из заданных графов. Описаны возможные приложения предлагаемых понятий к описанию деревьев доказательств, деревьев принятия решений, телекоммуникационных протоколов.

**Ключевые слова:** графы, биотопическое расстояние, нечеткое множество, деревья принятия решений, деревья доказательств, модель состояний и переходов, бисимуляция.

**Annotation.** We introduce a dissimilarity metric of graphs based on the biotopic distance of sets. It proposed the concept of the graph's "continuous inference" from the set of given graphs. Applications of proposed concepts to proof trees, decision trees, telecommunication protocols are described.

**Keywords:** graphs, biotopic distance, fuzzy set, decision trees, proof trees, transition system, bisimulation.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье предлагается мера несходства графов, являющаяся, при определенных условиях, метрикой на множестве графов. Эта метрика может использоваться для построения классов сходных в «какой-то степени» графов. Так как многие процессы (технологические, социальные и даже мыслительные) могут быть представлены в виде ориентированного графа, то классы сходных графов будут описывать процессы, не являющиеся хорошо определенными, не представимыми однозначно в виде какого-либо конечного автомата. Отметим, что нечеткий конечный автомат, определяемый классом сходных графов, конструктивно отличен от известных нечетких конечных автоматов с нечеткими функциями выходов и переходов (см., например, [1, 2]).

Основной идеей работы является введение такой метрики для графов с вершинами из некоторого метрического пространства, которая учитывала бы как близость указанных элементов, так и сходство структуры

сравниваемых графов. Введенная в статье метрика является, по сути, обобщением редакционного расстояния на графы, содержащие вершины из разных, возможно – непересекающихся, множеств. Таким образом, в статье ставится проблема поиска изоморфизма графов с учетом свойств его вершин и ребер, что является, в свою очередь, развитием известной проблемы поиска изоморфизма взвешенных графов. Теоретические и практические вопросы нахождения изоморфных фрагментов графов с вершинами из одного множества освещены, например, в работах [3, 4] и других.

Введенную в статье меру несходства можно применить для описания мобильной *ad hoc* сети. Такой вид сетей постоянно и непрогнозируемо меняет свою топологию стечением времени, сохраняя лишь связность между конечными пользователями, но не между устройствами. Следовательно, состоянию сети в конкретный момент времени соответствует граф, а сети в целом – класс сходных графов. Другими применениями является построение нечетких деревьев принятия решений, близких с заданному дереву и оценка степени близости формальных теорий, что

может быть полезно как для автоматического доказательства теорем, так и для автоматизированного получения новых теорем с деревом доказательств, близким к заданному.

## 1. МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

### 1.1. Графы, операции над ними и изоморфизмы графов

Если  $f : X \rightarrow Y$  – отображение, то будем обозначать  $D(f)$  область определения  $f$ ,  $E(f)$  – область значения  $f$ . В статье будем использовать следующее определение абстрактного графа (аналогично, например, [5])

**Определение 1.** Графом  $\Gamma$  называется упорядоченный набор  $(V, E, \varphi)$ , где  $\varphi : E \rightarrow V^2$  называется функцией инцидентности,  $V$  – множеством вершин,  $E$  – множеством ребер графа.

Пусть заданы метрические пространства  $(V, \mu_V), \mu_V : V^2 \rightarrow [0, 1]$  и  $(E, \mu_E), \mu_E : E^2 \rightarrow [0, 1]$ . Метрики здесь имеет смысл меры несходства элементов множеств  $V$  и  $E$ . Если  $v_1, v_2 \in V$  и  $\mu_V(v_1, v_2) = 0$ , то  $v_1$  и  $v_2$  идентичны, а когда  $\mu_V(v_1, v_2) = 1$ , то  $v_1$  и  $v_2$  максимально различны, аналогично и для  $e_1, e_2 \in E$ .

Обозначим через  $\mathcal{G}$  множество всех возможных графов с вершинами из  $V$  и ребрами из  $E$  (например, в простейшем случае ориентированных графов без петель  $E = \{-1, 1\}$ ), включая граф  $\mathbf{0}$ , не содержащий ни одной вершины.

Далее нам потребуется понятия суммы и дизъюнктивной суммы графов. Первое понятие определяется стандартно (см., например, [5, 6]), второе будет определено по аналогии с первым.

**Определение 2.** Пусть  $\{A_i \mid i \in I\}$  – семейство множеств, перечисленных индексами из  $I$ . Тогда дизъюнктивное объединение этого семейства есть множество

$$\coprod_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \{(x, i) \mid x \in A_i\}.$$

**Определение 3.** Назовем суммой графов  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  граф  $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = (V_0 \cup V_1, E_0 \cup E_1, \varphi_3)$ ,  $E_0 \cap E_1 = \emptyset$ , где  $\varphi_3|_{E_0} = \varphi_0$ ,  $\varphi_3|_{E_1} = \varphi_1$ . Назовем дизъюнктивной суммой графов  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  граф

$\Gamma_0 \amalg \Gamma_1 = (V_0 \amalg V_1, E_0 \amalg E_1, \varphi_3)$ , где  $\varphi_3|_{E_0} = \varphi_0$ ,  $\varphi_3|_{E_1} = \varphi_1$ .

**Лемма 1.** Алгебраическая структура  $(\mathcal{G}, \amalg)$  является коммутативным моноидом. При этом  $\Gamma_0 \amalg \mathbf{0} = \Gamma_0$ .

Доказательство очевидно, в качестве нейтрального элемента выступает пустой граф  $\mathbf{0}$ .

Обозначим как  $|\Gamma|$  количество вершин графа  $\Gamma$ . Определим изоморфизм графов стандартным образом (по аналогии с [5, 6]).

**Определение 4.** Пусть  $V_0, V_1 \subseteq V$ . Изоморфизмом графов  $\Gamma_0 = (V_0, E_0, \varphi_0)$ ,  $\Gamma_1 = (V_1, E_1, \varphi_1)$ ,  $\varphi_i : E_i \rightarrow V_i^2$ , назовем биекцию  $iso : V_0 \rightarrow V_1$ , такую что если (и только если)  $\varphi_0(e_0) = (v_{01}, v_{02})$ , то

$$\exists (e_1 \in E_1) \varphi_1(e_1) = (iso(v_{01}), iso(v_{02}))$$

и количество ребер, инцидентных с вершинами  $v_{01}, v_{02}$  и вершинами  $iso(v_{01}), iso(v_{02})$  совпадает.

Будем обозначать множество ребер, инцидентных паре вершин  $(v_{01}, v_{02})$ , как  $E_0(v_{01}, v_{02})$ , а соответствующих им ребер, инцидентных паре вершин  $(iso(v_{01}), iso(v_{02}))$  – как  $E_1(iso(v_{01}), iso(v_{02}))$ . Также обозначим  $E^2(v_{01}, v_{02}) = E_0(v_{01}, v_{02}) \times E_1(iso(v_{01}), iso(v_{02}))$ .

**Определение 5.** Назовем весом отображения  $iso$  величину

$$W(iso; \Gamma_0, \Gamma_1) = \max_{v \in V_0} \mu_V(v, iso(v)) +$$

$$+ \max_{(v_{01}, v_{02}) \in V_0^2} \left( \max_{(e_0, e_1) \in E^2(v_{01}, v_{02})} \mu_E(e_0, e_1) \right) + m_1 + m_2,$$

где  $m_1$  и  $m_2$  – число пар смежных вершин в  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  не имеющих соответствующих им смежных вершин в  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_0$ .

Очевидно, что  $W(iso; \Gamma_0, \Gamma_1) = W(iso^{-1}; \Gamma_1, \Gamma_0)$ .

**Лемма 2.** Пусть для всех  $v_{01}, v_{02} \in V_0$  множества  $E_0(v_{01}, v_{02})$  вполне упорядочены. Если  $W(iso) = 0$ , то  $iso$  – тождественное отображение  $V_0 \rightarrow V_0$ . Если  $iso : V_0 \rightarrow V_0$  – тождественное и для каждой пары вершин  $iso$  сохраняет отношение порядка между ребрами, инцидентными данным вершинам, то  $W(iso) = 0$ .

*Доказательство.* Если  $\mu_V(v, iso(v)) = 0$ , то в силу того, что  $\mu_V$  – метрика,  $v = iso(v)$ , т. е.  $iso = id$ .

Если  $iso = id$ , то  $\mu_V(v, iso(v)) = \mu_V(v, v) = 0$  и  $E_1(iso(v_{01}), iso(v_{02})) = E_0(v_{01}, v_{02})$ . Поскольку

изоморфизм сохраняет порядок ребер, то любое ребро  $e_0 \in E_0(v_{01}, v_{02})$  перейдет в себя и  $\mu_E(e_0, e_1) = 0$ .  $\square$

Будем далее считать, что изоморфные графы  $\Gamma_0, \Gamma_1$ , изоморфизм которых имеет нулевой вес, эквивалентны:  $\Gamma_0 \sim \Gamma_1$ . Далее отождествим  $\mathcal{G}$  со своей факторизацией по такому отношению эквивалентности  $\mathcal{G}/\sim$ .

Введем следующее определение.

**Определение 6.** Обозначим как  $\mathcal{G}^*$  множество всех отображений  $f:V \rightarrow V$ , таких что существует граф из  $\mathcal{G}$ , для которого  $f$  является изоморфизмом, для каждой пары вершин графа сохраняющим отношение порядка между ребрами, инцидентными данным вершинам.

Из множества  $\mathcal{G}^*$  будем выделять подмножество допустимых изоморфизмов  $\mathcal{G}_a^* \subseteq \mathcal{G}^*$ . Оно должно содержать, как минимум, тождественное отображение  $\text{id}:V \rightarrow V$  и быть замкнутым относительно операции суперпозиции, т. е. если  $iso_1, iso_2 \in \mathcal{G}_a^*$  и  $iso_1 \circ iso_2$  существует ( $(iso_1 \circ iso_2)(x) = iso_1(iso_2(x)), x \in V$ ), то  $iso_1 \circ iso_2 \in \mathcal{G}_a^*$ .

## 1.2. Метрика

Пусть зафиксирован  $iso_a \in \mathcal{G}_a^*, \Gamma_0 = (V_0, E_0, \varphi_0), \Gamma_1 = (V_1, E_1, \varphi_1) \in \mathcal{G}$  и  $\Gamma_B \subseteq \Gamma_0$  – максимальный подграф  $\Gamma_0$ , такой что  $iso_a \in \mathcal{G}_a^*$ ,  $iso_a: \Gamma_B \rightarrow f\Gamma_B, f\Gamma_B \subseteq \Gamma_1$ . В данном разделе введем расстояние между графами, являющееся, в некотором роде, обобщением Graph edit distance и Tree Edit Distance [7] на абстрактные графы со счетным множеством вершин.

**Определение 7.** Определим структурное несходство (аналогичные меры были введены в работах [8, 9]) между  $\Gamma_0, \Gamma_1$  как биотопическое расстояние

$$\mu_S(iso_a; \Gamma_0, \Gamma_1) = \frac{|\Gamma_0 \setminus \Gamma_B| + |\Gamma_1 \setminus f\Gamma_B|}{|\Gamma_0| + |\Gamma_1| - |\Gamma_B|}.$$

Если изоморфизма  $iso_a: \Gamma_B \rightarrow f\Gamma_B$ , тако- го что  $D(iso_a) \neq \emptyset$ , не существует и  $V_0 \neq \emptyset$ , то положим  $\mu_S(iso; \Gamma_0, \Gamma_1) = 1$ .

Такое расстояние называется также расстоянием Штейнхауса. Определение 7 подходит для графов с конечным множеством вер-

шин. Обобщим его и для графов со счетным множеством вершин следующим образом:

1. Если  $|\Gamma_0 \setminus \Gamma_B| = \infty$  и  $|\Gamma_1 \setminus f\Gamma_B| = \infty$ , то несходство между графами совершенно бесконечно:  $\mu_S(iso_a; \Gamma_0, \Gamma_1) = 2$ .

2. Если  $|\Gamma_B| < \infty$ , и  $|\Gamma_0 \setminus \Gamma_B| = \infty, |\Gamma_1| < \infty$ , то  $\mu_S(iso_a; \Gamma_0, \Gamma_1) = 1 + \mu_S(iso_a; \Gamma_B, \Gamma_1)$ .

3. Если  $|\Gamma_B| = \infty$ , и  $|\Gamma_0 \setminus \Gamma_B| < \infty$  и  $|\Gamma_1 \setminus f\Gamma_B| < \infty$ , то

$$\mu_S(iso_a; \Gamma_0, \Gamma_1) = \mu_S(iso_a; \Gamma_0 \setminus \Gamma_B, \Gamma_1 \setminus f\Gamma_B).$$

Теперь можно ввести расстояние, которое учитывает как и сходство структуры данной пары графов, так и вес самого отождествления:

**Определение 8.** Назовем весовым расстоянием между графами  $\Gamma_0, \Gamma_1$  величину

$$\rho(\Gamma_0, \Gamma_1) = \min_{iso_a \in \mathcal{G}_a^*} (\alpha_1 \mu_S(iso_a; \Gamma_0, \Gamma_1) + \alpha_2 W(iso_a; \Gamma_0, \Gamma_1)), \alpha_1 > 0, \alpha_2 \geq 0.$$

**Теорема 1.** Введенное в определении 8 расстояние для конечных графов удовлетворяет аксиомам метрики.

*Доказательство.* Пусть  $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{G}, \Gamma_i = (V_i, E_i, \varphi_i)$ . Покажем выполнение аксиомы тождества:  $\rho(\Gamma_0, \Gamma_1) = 0$  тогда и только тогда, когда  $\Gamma_0 = \Gamma_1$  в силу леммы 2 и в силу того, что  $\mu_S(iso_a; \Gamma_0, \Gamma_1) = 0$  тогда и только тогда, когда  $\Gamma_1 = \Gamma_2$ .

Симметричность  $\rho(\Gamma_0, \Gamma_1) = \rho(\Gamma_1, \Gamma_0)$  очевидно следует из симметричности  $\mu_S(\Gamma_0, \Gamma_1)$  и того факта, что  $W(iso_a; \Gamma_0, \Gamma_1) = W(iso_a^{-1}; \Gamma_1, \Gamma_0)$ .

Покажем выполнение неравенства треугольника

$$\rho(\Gamma_0, \Gamma_1) \leq \rho(\Gamma_0, \Gamma_2) + \rho(\Gamma_2, \Gamma_1). \quad (1)$$

Неравенство треугольника  $\mu_S(iso_a; \Gamma_0, \Gamma_2) + \mu_S(iso_a; \Gamma_2, \Gamma_1) \geq \mu_S(iso_a; \Gamma_0, \Gamma_1)$  доказано в статье [10]. Поэтому

$$\alpha_1 \mu_S(iso_a; \Gamma_0, \Gamma_1) + \alpha_2 W(iso_a; \Gamma_0, \Gamma_1) \leq \alpha_1 \mu_S(iso_a; \Gamma_0, \Gamma_2) + \alpha_2 W(iso_a; \Gamma_0, \Gamma_1) + \alpha_1 \mu_S(iso_a; \Gamma_2, \Gamma_1) + \alpha_2 W(iso_a; \Gamma_0, \Gamma_1), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \min_{iso_a \in \mathcal{G}_a^*} (\alpha_1 \mu_S(iso_a; \Gamma_0, \Gamma_1) + \alpha_2 W(iso_a; \Gamma_0, \Gamma_1)) \leq \\ & \leq \min_{iso_a \in \mathcal{G}_a^*} (\alpha_1 \mu_S(iso_a; \Gamma_0, \Gamma_2) + \alpha_2 W(iso_a; \Gamma_0, \Gamma_2) + \alpha_1 \mu_S(iso_a; \Gamma_2, \Gamma_1) + \alpha_2 W(iso_a; \Gamma_2, \Gamma_1)). \end{aligned} \quad (3)$$

Из (2), (3) и следует (1).  $\square$

Очевидна (в силу равенства  $c = 2^{\mathbb{N}}$ ) следующая лемма:

**Лемма 3.** Если  $V$  – счетное множество,  $E$  – конечное множество, то мощность  $\mathcal{G}$  будет равна мощности континуума – множества всех подмножеств счетного множества вершин графов.

Для графов с несчетным количеством вершин  $\rho$ , заданное с помощью пп. 1–3, будет лишь псевдометрикой.

Очевидно, что если  $V$  – счетное, то любое одноточечное множество  $\mathcal{G}$  вида  $\{\Gamma_F\}$ , где  $\Gamma_F$  – граф с конечным множеством вершин, открыто, т. е. на подмножестве всех конечных графов метрика  $\rho$  порождает дискретную топологию. То же верно и для счетных графов, если приять свойство (3) из определения метрики. Однако, если считать, что для любых двух счетных графов  $\Gamma_0, \Gamma_1$  вместо (3) верно

3'. Если  $|\Gamma_B| = \infty$ , и  $|\Gamma_0 \setminus \Gamma_B| < \infty$  и  $|\Gamma_1 \setminus f\Gamma_B| < \infty$ , то

$$\mu_S(iso_a; \Gamma_0, \Gamma_1) = 0,$$

что также не лишено смысла, то одноточечное множество  $\mathcal{G}$  вида  $\{\Gamma_C\}$ , где  $\Gamma_C$  – граф со счетным множеством вершин, не будет являться открытым и в целом топология на  $\mathcal{G}$  не совпадет с дискретной.

## 2. ВЫВОДИМЫЕ ГРАФЫ И СХОДСТВО ГРАФОВ

**Определение 9.** Назовем «непрерывным выводом» графа  $\Gamma_1$  из графа  $\Gamma_0$  с глубиной  $(\varepsilon, N)$ ,  $\varepsilon \geq 0$ ,  $N \geq 0$  гомотопию  $\gamma$ , соединяющую графы  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$ :

$$\gamma: [0, 1] \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G},$$

такую что

$$\forall (t \in [0, 1]) \rho(\gamma(t, \Gamma_0), \Gamma_0) < \varepsilon, \quad (4)$$

$$\forall (\Gamma', \Gamma'' \in \gamma([0, 1], \Gamma_0)) \rho(\Gamma', \Gamma'') < N. \quad (5)$$

Условие (4) необходимо, чтобы запретить всем графам в гомотопии отклоняться от начального больше, чем на  $\varepsilon$ , условие (5) – чтобы ограничить общее количество графов в гомотопии. И то, и другое необходимо для ситуации, когда в случае конечного множества вершин  $V$  и дискретности  $\rho_V$  мы можем за определенное (пусть и довольно большое) количество шагов сделать из одного графа любой другой граф. В результате применения «непре-

рывного вывода» получается цепочка графов  $\Gamma_0 \Rightarrow \Gamma_0^1 \Rightarrow \Gamma_0^2 \cdots \Rightarrow \Gamma_0^k \Rightarrow \Gamma_1$ , в которой соседние графы мало отличаются друг от друга.

**Определение 10.** Назовем «непрерывным выводом» графа  $\Gamma_n$  из графов  $\Gamma_0, \dots, \Gamma_{n-1}$  с глубиной  $(\varepsilon, N)$ ,  $\varepsilon \geq 0$ ,  $N \geq 0$ , если граф  $\Gamma_n$  является непрерывным выводом с глубиной  $(\varepsilon, N)$  из каждого из графов  $\Gamma_0, \dots, \Gamma_{n-1}$ . Будем писать  $\Gamma_1 \wedge \dots \wedge \Gamma_{n-1} \xrightarrow{\varepsilon, N} \Gamma_n$ .

Очевидно, что  $\varepsilon$  соответствует минимально возможной степени аналогии между графами, а  $N$  – пропорционально, в некотором смысле, предельному количеству применений аналогии в цепочки рассуждений.

Вместо явно заданного графа можно рассматривать множество всех графов, являющихся  $(\varepsilon, N)$ -выводом из данных. По своей сути это будет эквивалентно конструктивному заданию нечеткого множества графов с функцией принадлежности, порождаемой метрикой  $\rho$ . Также можно рассматривать и графы с подграфами, являющимися нечеткими множествами в вышеуказанном смысле.

## 3. ПРИМЕР

Положим  $E = \{-1, 1\}$  (т. е. рассматриваются обычные ориентированные графы),  $\mu_E(e_1, e_2) = \frac{1}{2} |e_1 - e_2|$ ,  $\mu_V(v_1, v_2) = \frac{1}{2}$ , для любых круглых вершин  $(v_1), (v_2) \in V$ , таких что  $v_1 \neq v_2$  и  $\mu_V(v_1, v_2) = 1$ , если одна из вершин, например  $(v_1)$  – круглая, а вторая, например  $\diamond v_2$  – квадратная.

На рис. 1 показаны два графа  $\Gamma_0$  (а) и  $\Gamma_1$  (б). Пусть отображение  $iso: a_i \mapsto b_i$ ,  $i = 1, 5$ , содержится в  $\mathcal{G}_a$ . Также пусть  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 1/2$ . Согласно определению,

$$1. \mu_S(iso_a; \Gamma_0, \Gamma_1) = 0.$$

$$2. W(iso_a; \Gamma_0, \Gamma_1) = |-1 - 1|/2 + 1 = 2.$$

$$3. \text{Таким образом, } \rho(\Gamma_0, \Gamma_1) = 0 + 1 = 1.$$

## 4. ОБОБЩЕНИЕ

Для введения расстояния между графами, подобного описанному в статье, возможно заменить изоморфизмы из  $\mathcal{G}^*$  более широким классом отображений. Например, можно



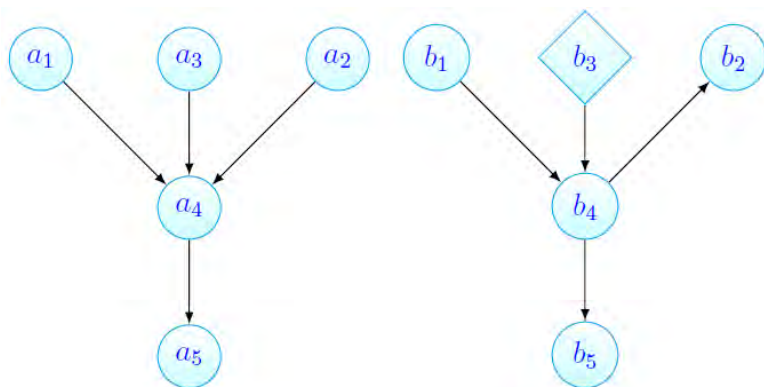


Рис. 1. Поиск расстояния между графами

ослабить требование, что отображение  $f \in \mathcal{G}^*$  переводит смежные вершины в смежные и заменить такое свойство на то, что  $f$  должно переводить смежные вершины в вершины, соединяемые непрерывным путем, и что  $f^{-1}$  должно переводить смежные вершины в вершины, соединяемые непрерывным путем.

Чтобы сделать это разумным образом, необходимо ввести некоторые ограничения на объекты из  $\mathcal{G}$ , чтобы графы  $\Gamma \in \mathcal{G}$  могли интерпретироваться как модели состояний и переходов, а отображения из  $\mathcal{G}^*$  – как отношения бисимуляции. Для этой цели множество  $E$  можно снабдить функцией направленности  $d: E \rightarrow \Lambda$  и считать, что ребро  $e$  направлено в направлении  $\lambda \in \Lambda$ , если  $d(e) = \lambda$ .

Напомним, что в соответствии с [11], отношение симуляции определяется следующим образом

**Определение 11.** Пусть  $(S, \Lambda, \rightarrow)$  – модель состояний и переходов,  $\rightarrow \subseteq S^2$ . Бинарное отношение  $R \subseteq S^2$  называется отношением симуляции, если для любых  $(p, q) \in R$ ,  $\alpha \in \Lambda$ ,  $p' \in S$  существует  $q' \in S$ , такое что если  $p \rightarrow q$ , то  $p' \rightarrow q'$ .

Если  $(S_1, \Lambda_1, \rightarrow_1)$  и  $(S_2, \Lambda_2, \rightarrow_2)$  – модели состояний и переходов, то отношение симуляции между ними вводится как отношение симуляции на  $(S_1 \amalg S_2, \Lambda_1 \cup \Lambda_2, \rightarrow_1 \cup \rightarrow_2)$ . Если  $R$  и  $R^{-1}$  – отношения симуляции, то  $R$  называется отношением бисимуляции.

Введем следующие определения:

**Определение 12.** Пусть  $\Gamma_0 = (E_0, V_0, \varphi_0) \in \mathcal{G}$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . Назовем  $v_1 \in V_0$   $\lambda$ -достижимой из вершины  $v_0 \in V_0$ , если существует конечный путь из  $\lambda$ -направленных ребер из  $v_0$  в  $v_1$ .

**Определение 13.** Назовем отображение  $f: \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_1$  простой симуляцией, если оно переводит любую пару  $\lambda$ -достижимых вершин  $\Gamma_0$  в пару  $\lambda$ -достижимых вершин  $\Gamma_1$ .

**Определение 14.** Назовем отображение  $f: \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_1$  простой бисимуляцией, если  $f$  и  $f^{-1}$  – простые симуляции.

Очевидна следующая лемма

**Лемма 4.** Введенные так отношения простой симуляции и бисимуляции графов действительно порождают отношения симуляции и бисимуляции на  $\Gamma_0 \amalg \Gamma_1$ .

Введем обозначение

$$\mu_p(f; \Gamma_0, \Gamma_1) = \frac{|\Gamma_0 \setminus \Gamma_B| + |\Gamma_1 \setminus f(\Gamma_B)|}{|\Gamma_0| + |\Gamma_1| - |\Gamma_B|},$$

где  $\Gamma_B \subseteq \Gamma_0$  – максимальный подграф, для которого существует простая бисимуляция  $f: \Gamma_B \rightarrow \Gamma_1$ .

В качестве меры несходства графов  $\Gamma_0, \Gamma_1$  можно взять любую функцию вида  $s(\mu_p(f; \Gamma_0, \Gamma_1), \mu_p(f^{-1}; \Gamma_0, \Gamma_1))$ , где  $s: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  – неотрицательная симметричная монотонно возрастающая по обоим переменным функция. Например, можно взять  $s(x, y) = \min\{x, y\}$ .

## 5. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТРИКИ ГРАФОВ

### 5.1. Деревья доказательств

В пространстве  $(\mathcal{G}, \rho)$  возьмем подпространство  $(\mathcal{T}, \rho)$ , состоящее из графов  $T$ , каждая компонента связности  $T_i$  которых является ориентированным деревом. Компоненту связности отождествим с доказательством некоторой теоремы, а весь граф – с набором теорем некоторой теории. Листья  $T_i$  будут соответствовать аксиомам или уже доказан-

ным теоремам. Глубина  $(\varepsilon, N)$  будет соответствовать тому, насколько широко мы понимаем аналогию теорий, насколько несходные теории мы просматриваем для конструкции аналогичной и сколько вообще может быть аналогий в цепочке рассуждений. Операция  $T_1 \wedge \dots \wedge T_{n-1} \xrightarrow{\varepsilon, N} T_n$  будет означать построение теории  $T_n$ , аналогичной со всеми данными теориями  $T_i$ ,  $i = 1, n-1$ .

На множестве теорем можно ввести порядок, например, установить, что теорема  $T_2$  следует из теоремы  $T_1$ , если корневая вершина  $T_1$  изоморфна одному из листьев теоремы  $T_2$ .

Если вершины из  $V$  соответствуют, например, формулам и длина всех формул ограничена сверху, то в качестве  $\mu_V$  возможно рассматривать нормированное редакционное расстояние. Отметим, что вся теория целиком может быть представлена двояко: в виде одного графа (не обязательно дерева), показывающего взаимосвязи между утверждениями теории и в виде набора деревьев теорем, связанных введенных выше отношением следования. Первая форма записи будет соответствовать  $\mathcal{T}$  с операцией  $\cup$ , вторая –  $\mathcal{T}$  с операцией  $\amalg$ .

### 5.2. Деревья принятия решений

**Определение 15.** Пусть  $f \in \mathcal{G}$ ,  $f: \Gamma_B \rightarrow f\Gamma_B$ ,  $\Gamma_B = (V_B, E_B, \varphi_B)$ . Назовем  $f$ -поглощающей суммой графов  $\Gamma_0, \Gamma_B \subseteq \Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  граф  $\Gamma_0 \cup_f \Gamma_1 = (V_0 \cup V_1 \setminus f(V_B), E_0 \cup E_1, \varphi_3)$ , где

$$\varphi_3(e) = \begin{cases} \varphi_0(e), \\ \varphi_1(e), \\ (v_1, f(v_2)) = (f(v_2), v_1), \end{cases}$$

$$e \in E_0,$$

$$\varphi_1(e) \in (V_1 \setminus f(V_B))^2 \wedge e \in E_1,$$

$$v_1 \in V_0, v_2 \in V_1 \setminus f(V_B), \varphi_1(e) = (f(v_1), f(v_2)).$$

В таком определении видно, что изоморфные вершины объединяемых графов отождествляются.

Пусть  $V$  состоит из предикатов над  $X$  и значений целевой функции,  $E$  – из пар  $(x, d)$ ,  $x \in X$ ,  $d \in \{-1, 1\}$  – направление ребра. Также пусть задан набор  $\mathcal{G}_B \subset \mathcal{G}$  базовых деревьев

решений. При обработке какого-либо набора входных данных деревом  $\Gamma_0 \in \mathcal{G}_B$ , может возникнуть ситуация, не предусмотренная этим деревом или же ситуация, когда дерево выдает очевидно непригодный результат. Однако, если существует дерево  $\Gamma_1 \in \mathcal{G}_B$ , которое достаточно близко к  $\Gamma_0$  в смысле ранее введенной метрики (и имеет изоморфное с изоморфизмом  $f$  некоторому поддереву  $\Gamma_0$  поддерево) и предусматривает возникшую ситуацию, то можно построить новое дерево  $\Gamma_2 = \Gamma_0 \cup_f \Gamma_1$  (при таком объединении изоморфные вершины отождествляются) и добавить его в  $\Gamma_B$ . Это операцию возможно повторять всякий раз при возникновении необрабатываемой или плохо обрабатываемой ситуации, пополняя  $\mathcal{G}_B$  новыми деревьями.

### 5.3. Моделирование телекоммуникационного протокола

Представление телекоммуникационных протоколов в виде конечного автомата или сети Петри довольно давно и широко известно (см., например, [12]). Ясно, что каждый автомат представим в виде графа состояний и переходов. Однако, когда возникает необходимость создавать протоколы для ad hoc мобильных радиосетей, классические конечные автоматы не всегда могут быть использованы, так как не существует какой-либо определенной последовательности в обмене сообщениями между отдельными радиостанциями. Это связано с тем, что каждое средство пытается организовать сеть самостоятельно, без общего координационного центра и с тем, что из-за движения радиостанций может изменяться их взаимная доступность. Поэтому обмен сообщениями в таких сетях может быть представлен в виде нечеткого графа, упомянутого в разделе 2.

Еще более интересной представляется ситуация [13], когда радиостанции в составе иерархической телекоммуникационной сети не обладают полной информацией обо всей сети, возможных видах других радиостанций, сетевой иерархии и т. п. и при получении сообщений строят граф, моделирующий сеть, анализируя сообщения от других станций. При

этом возникает необходимость сравнивать получающийся граф с некоторым базовым графом внутри самой станции и находить свое место в собранном исходя из сообщений графе сети, зная свое место в базовом графе сети. Здесь, опять же, нужно оценивать степень сходства графов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wee W. G., Fu K. S. A Formulation of Fuzzy Automata and Its Application as a Model of Learning Systems // IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics. – 1969. – July. – Vol. 5, no. 3. – P. 215–223.
2. Марценюк М. А., Селетков И. П. Приведение конечного нечеткого автомата к нечеткой комбинационной схеме с блоком памяти // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. – 2014. – № 6(210). – С. 67–80.
3. Bunke Horst. Graph Matching: Theoretical Foundations, Algorithms, and Applications // International Conference on Vision Interface. – 2000. – P. 82–84. – URL: <http://www.ai.rug.nl/ki2/literature/graphmatch-bunke.pdf>
4. Кохов В. А., Кохов В. В. Методы анализа изменений глобальных и локальных свойств темпоральных орграфов // Бизнес-информатика. – 2012. – № 3(21). – С. 42–51.
5. Busacker Robert G., Saaty Thomas L. Finite Graphs and Networks. – New York, St. Louis, San Francisco, Toronto, London, Sydney : McGraw-Hill Book Company, 1965. – 294 p.
6. Harary Frank. Graph Theory. Addison-Wesley Series in Mathematics. – Addison Wesley, 1969. – 274 p.
7. Bille Philip. A survey on tree edit distance and related problems // Theoretical Computer Science. – 2005. – Vol. 337, no. 1. – P. 217 – 239. – URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397505000174>
8. Петровский А. Б. Новые классы метрических пространств измеримых множеств и мультимножеств в кластерном анализе // Труды ИСА РАН. – 2005. – Т. 12. – С. 54–67.
9. Measuring Distance between Unordered Sets of Different Sizes / A. Gardner, J. Kanno, C. A. Duncan, R. Selmic // 2014 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. – 2014. – June. – P. 137–143.
10. Marczewski Edward, Steinhaus Hugo. On a certain distance of sets and the corresponding distance of functions // Colloquium Mathematicae. – 1958. – Vol. 6, no. 1. – P. 319–327. – URL: <http://eudml.org/doc/210378>.
11. Park David. Concurrency and Automata on Infinite Sequences // Proceedings of the 5th GI-Conference on Theoretical Computer Science. – London, UK, UK : Springer-Verlag, 1981. – P. 167–183. – URL: <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=647210.720030>.
12. Белоглазов Д. М., Машуков М. Ю., Непомнящий В. А. Верификация телекоммуникационных систем, специфицированных взаимодействующими конечными автоматами, с помощью раскрашенных сетей Петри // Моделирование и анализ информационных систем. – 2011. – Т. 18, № 4. – С. 144–156.
13. Кузнецов А. В. Распределение ограниченных ресурсов в системе с устойчивой иерархией (на примере перспективной системы военной связи) // Управление большими системами. – 2017. – № 66. – С. 68–93. – URL: [http://ubs.mtas.ru/archive/search\\_results\\_new.php?publication\\_id=21567](http://ubs.mtas.ru/archive/search_results_new.php?publication_id=21567)

**Кузнецов Александр Владимирович** – канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры математического и прикладного анализа, факультет прикладной математики, информатики и механики.  
E-mail: avkuz@bk.ru

**Kuznetsov Alexander Vladimirovich** – candidate of physico-mathematical sciences, associate professor, Mathematical and applied analysis, faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics, Voronezh State University.  
E-mail: avkuz@bk.ru