УДК 519.112.71

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ФОРМИРОВАНИЯ ТРУДОВЫХ КОЛЛЕКТИВОВ

Г. Д. Чернышова, А. М. Якубина

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 15.02.2017 г.

Аннотация. Рассматриваются задачи, возникающие при необходимости создания трудовых коллективов (рабочих групп). Показана возможность их формализации в виде задач дискретного программирования. Предлагаются математические модели и алгоритмы решения поставленных задач.
Ключевые слова: дискретная оптимизация, задача о минимальном покрытии, многокритериальная задача, транспортная задача.
Annotation. Problems, came about from necessity of labor collective (working team) creature, are here to be studied. Also the way of linear programming problems formalization is described and mathematical models and algorithms for solving posed problems are developed.
Keywords: discrete optimization, minimal cover problem, multicriterion problem, transportation problem.

В работе рассматриваются задачи, возникающие при формировании рабочих групп с целью выполнения заданного объема работ. Такие задачи возникают, в частности, при формировании новых отделов, а также при формировании коллективов для выполнения дополнительно появившегося объема работ. При этом рассматриваются следующие проблемы:

– задача выбора минимального числа сотрудников для выполнения заданного объема работ;

– задача минимизации затрат при формировании рабочих коллективов;

– многокритериальная задача;

– задача с ограничениями на количество выполняемых работ каждым сотрудником.

1. ЗАДАЧА ВЫБОРА МИНИМАЛЬНОГО ЧИСЛА СОТРУДНИКОВ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАННОГО ОБЪЕМА РАБОТ

Такая проблема может возникнуть, например, при создании рабочей группы для выполнения дополнительно появившихся заказов.

С целью формализации данной задачи вводятся следующие обозначения:

– $I = \{1..m\}$ – множество видов работ, которые необходимо выполнить;

– $J = \{1..n\}$ – множество претендентов, которые могут быть выбраны в рабочую группу;

– $$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } j\text{-й претендент умеет} \\ \text{делать} \quad i\text{-ю работу}, \\ 0, \text{ в противном случае}, \end{cases}$$

$$i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Переменные x_j вводятся следующим образом

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{ если } j\text{-й претендент включается} \\ \text{в рабочую группу}, \\ 0, \text{ в противном случае}, \end{cases}$$

$$j = \overline{1,n}.$$

В результате математическая модель задачи может быть представлена в следующем виде

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge 1, \quad i = \overline{1,m},$$

$$x_j = 0 \vee 1, \quad j = \overline{1,n}.$$

Здесь ограничения обеспечивают выполнение всех работ, целевая функция минимизирует число выбранных сотрудников.

Таким образом, поставленная задача формализовалась в виде известной дискретной задачи о минимальном покрытии, для которой известны точные и приближенные алгоритмы решения (метод «ветвей и границ», «жадные» алгоритмы) [1].

Заметим, что решением такой задачи может оказаться коллектив из небольшого числа сотрудников (один, два). Это возможно, если в коллективе имеются высококвалифицированные сотрудники. Такой выбор может оказаться нерационален, так как в этом случае на выполнение заказа может уйти много времени и потребуются большие затраты (дополнительная оплата, обеспечение рабочих мест). В связи с этим в дальнейшем будут рассматриваться задачи, учитывающие эти факторы.

2. ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ ЗАТРАТ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ РАБОЧИХ ГРУПП

Пусть дополнительно известны затраты, связанные с выбором претендентов в рабочую группу. В этом случае можно поставить задачу формирования рабочей группы, выполняющей заданный объем работ с целью минимизации суммарных затрат.

Введем дополнительно следующую информацию. Обозначим через c_j затраты, связанные с включением в рабочую группу j-го претендента.

В результате задача минимизации затрат при создании рабочей группы может быть представлена математической моделью следующего вида

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge 1, \quad i = \overline{1,m},$$

$$x_j = 0 \vee 1, \quad j = \overline{1,n}.$$

Полученная задача носит название взвешенной задачи о минимальном покрытии. Для получения точного решения может быть использован метод «ветвей и границ». Для получения приближенного решения предложим два «жадных» алгоритма.

Алгоритм 1 (с фиксированным порядком выбора координат).

Ввести данные:

– вектор с координатами c_j, $j = \overline{1,n}$

– матрицу A с элементами $a_{ij} = 0 \vee 1$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$

шаг 1 вычислить мощности $\beta_j = \sum_i a_{ij}$

шаг 2 упорядочить отношения

$$\frac{c_{j1}}{\beta_{j1}} \le \frac{c_{j2}}{\beta_{j2}} \le \dots \le \frac{c_{jn}}{\beta_{jn}}$$

шаг 3 положить $k = 1$

шаг 4 если $\exists i : a_{ij_k} = 1$, тогда положить $x^*_{j_k} = 1$ и перейти к шагу 5 иначе положить $x^*_{j_k} = 0$ и перейти к шагу 7

шаг 5 преобразовать матрицу: вычеркнуть j_k-й столбец и строки с номерами i: $a_{ij_k} = 1$

шаг 6 проверить $A = \varnothing \Rightarrow$ да $\Rightarrow$ <u>останов</u>.

шаг 7 $k = k + 1 \Rightarrow$ шаг 4

<u>Останов</u>. Выписать ответ – вектор x^*.

Алгоритм 2 (с пошаговым пересчетом мощностей).

Ввести данные:

– вектор с координатами c_j, $j = \overline{1,n}$

– матрицу A с элементами $a_{ij} = 0 \vee 1$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$

шаг 1 вычислить мощности $\beta_j = \sum_i a_{ij}$

если $\exists \beta_j = 0$, то выбросить соответствующий столбец из рассмотрения

шаг 2 упорядочить отношения

$$\frac{c_{j1}}{\beta_{j1}} \le \frac{c_{j2}}{\beta_{j2}} \le \dots \le \frac{c_{jn}}{\beta_{jn}}$$

шаг 3 положить $k = 1$

шаг 4 положить $x_{j_k} = 1$

шаг 5 преобразовать матрицу: вычеркнуть j_k-й столбец и строки с номерами i: $a_{ij_k} = 1$

шаг 6 проверить $A = \varnothing \Rightarrow$ да $\Rightarrow$ <u>останов</u>.

шаг 7 перейти к шагу 1

<u>Останов</u>. Выписать ответ – вектор x^*.

3. МНОГОЦЕЛЕВАЯ ЗАДАЧА

Заметим, что, как правило, наиболее предпочтительным является компромисс между рассмотренными в предыдущих пунктах критериями. В этом случае можно поставить двухкритериальную задачу, математическая модель которой примет следующий вид.

$$L_1(x)=\sum_{j=1}^{n}x_j\to\min,$$

$$L_2(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\min,$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge 1,\ \ i=\overline{1,m},$$

$$x_j=0\vee 1,\ \ j=\overline{1,n}.$$

Для перехода к одноцелевой постановке чаще всего используется аддитивная свертка критериев вида

$$\lambda\sum_{j=1}^{n}x_j+(1-\lambda)\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\min,$$

где $\lambda\in[0,1]$ – некоторый коэффициент предпочтения одного из критериев. Тогда целевая функция выглядит следующим образом

$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda+(1-\lambda)c_j)x_j\to\min,$$

$$\lambda\in[0,1].$$

В этом случае задача сводится к взвешенной задаче о минимальном покрытии со специальными коэффициентами целевой функции. Для нее могут быть использованы приближенные алгоритмы, предложенные ранее для решения такого типа задач (Алгоритм 1, Алгоритм 2).

4. ЗАДАЧА С УЧЁТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ОБЪЕМ ВЫПОЛНЯЕМЫХ РАБОТ

Заметим, что в предыдущих моделях не учитывалось распределение работ между выбранными сотрудниками, а лишь гарантировался факт выполнения всех работ. С целью отыскания оптимального распределения работ строится следующая математическая модель. При этом будет учитываться дополнительное требование на максимальное количество работ выполняемых каждым сотрудником $(k_j,\ \ j=\overline{1,n})$.

Для формализации данной задачи введем переменные следующим образом

$$y_j=\begin{cases}1,\ \text{если } j\text{-й претендент включается}\\ \text{в рабочую группу},\\ 0,\ \text{в противном случае},\end{cases}$$

$j=\overline{1,n},$

$$x_{ij}=\begin{cases}1,\ \text{если } j\text{-й претендент назначается}\\ \text{на выполнение } \ i\text{-й работы},\\ 0,\ \text{в противном случае},\end{cases}$$

$i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}.$

Математическая модель данной задачи в этом случае может быть представлена в виде

$$\sum_{j=1}^{n}y_j\to\min, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_{ij}=1,\ \ i=\overline{1,m}, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\le k_j,\ \ j=\overline{1,n}, \tag{3}$$

$$y_j=\begin{cases}1, & \text{если } \sum_{i=1}^{m}x_{ij}>0\\ 0, & \text{если } \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=0\end{cases},\ \ j=\overline{1,n}, \tag{4}$$

$$x_{ij}=0\vee 1,\ \ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}. \tag{5}$$

Здесь целевая функция минимизирует число выбираемых сотрудников. Первая группа ограничений означает, что каждый вид работы выполняется одним сотрудником. Вторая – что количество работ, выполняемых j-м сотрудником, не превосходит заданного числа k_j.

Заметим, что данная задача может быть эквивалентно переписана в виде

$$\sum_{j=1}^{n}\operatorname{sgn}\left(\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\right)\to\min,$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_{ij}=1,\ \ i=\overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\le k_j,\ \ j=\overline{1,n},$$

$$x_{ij}=0\vee 1,\ \ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}.$$

Такая модель может быть отнесена к классу задач транспортного типа (открытая с запретами) с разрывной целевой функцией [2].

Для её алгоритмизации предлагается перейти к стандартной транспортной задаче (открытой с запретами), для решения которой могут быть использованы известные методы.

С этой целью предлагается формирование специальной целевой функции вида

$$c_{ij} = \begin{cases} \max\limits_{j=1..n} k_j - k_j, & \text{если } a_{ij} = 1, \\ M, & \text{если } a_{ij} = 0. \end{cases}$$

Здесь M играет роль штрафа $(M > m^2)$.

Далее рассматривается транспортная задача вида

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min, \qquad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,m}, \qquad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le k_j, \quad j = \overline{1,n}, \qquad (8)$$

$$x_{ij} \ge 0, \; i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (9)$$

Очевидно, для разрешимости задачи необходимо потребовать выполнения следующего условия

$$m \le \sum_{j=1}^{n} k_j.$$

Заметим что, так как все правые части первой группы ограничений равны единице, то любой метод решения такой транспортной задачи (как точный, так и приближенный) получит в ответе матрицу X, элементы которой $x_{ij} = 0 \vee 1$. В связи этим для получения приближенного решения поставленной задачи (1)–(5) можно использовать любые приближенные методы (метод северо-западного угла, метод минимального элемента) либо метод получения точного решения (метод потенциалов) транспортной задачи (6)–(9).

Использование приближенных методов может дать в ответе недопустимую точку (из-за большого количества запретов), что вообще говоря, не означает, что данная задача несовместна. В связи с этим наиболее рациональным является использование метода потенциалов, который найдет допустимую оптимальную точку задачи (6)–(9), если такая существует [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев О. Г.* Комплексное применение методов дискретной оптимизации. – М. : Наука. Гл. ред. Физ-мат. лит., 1987. – 248 с.

2. Чернышова Г. Д. Задачи транспортного типа с разрывными целевыми функциями / Г. Д. Чернышова, А. С. Чигодаева // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 2. – С. 65–69.

3. *Гольштейн Е. Г.* Задачи линейного программирования транспортного типа / Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин. – М. : Наука, 1969. – 382 с.

Чернышова Галина Дмитриевна – канд. техн. наук, доцент кафедры математических методов исследования операций факультета ПММ, Воронежский государственный университет.
Тел.: 8-903-854-70-78
E-mail: chern@vsau.ru

Chernyshova G. D. – Candidate of Technical Sciences, docent of the department of Mathematical Methods of Operations Research; The Faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics; Voronezh State University.

Якубина Анастасия Михайловна – магистрант кафедры математических методов исследования операций факультета ПММ, Воронежский государственный университет.
Тел.: 8-920-212-83-78
E-mail: nastya.jakubina@yandex.ru

Yakubina A. M. – postgraduate of the department of Mathematical Methods of Operations Research; The Faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics; Voronezh State University.