УДК 517.977

РАСЧЕТЫ РИСКОВ В ЗАДАЧЕ О ПОРТФЕЛЕ

В. Г. Задорожний

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 26.09.2016 г.

Аннотация. Рассматривается задача о распределении начального капитала в два вида ценных бумаг, стоимость которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, коэффициенты которых являются случайными процессами, с целью наибольшей выгоды в заданный момент времени. Получены формулы для первых двух моментных функций критерия качества и алгоритм расчета оптимального распределения начального капитала с учетом заданного риска.
Ключевые слова: задача о портфеле, расчет рисков, дифференциальные уравнения со случайными коэффициентами, моментные функции, характеристический функционал, вариационная производная.
Annotation. The problem of the distribution of initial capital of two types of securities the value of which is described by ordinary differential equations, whose coefficients are random processes with the greatest benefit at a given point in time. The formulas for the first two moment functions of the quality criterion and the algorithm for calculating the optimal allocation of the initial capital for a given risk.
Keywords: the problem of portfolio, risk estimation, differential equations with random coefficients, moment functions, characteristic functional, variational derivative.

ВВЕДЕНИЕ

Задача о портфеле ценных бумаг имеет различные варианты и пользуется большой популярностью у исследователей. За работы, связанные с расчетами рисков, Г. Марковиц [1] получил нобелевскую премию. Математические модели задачи о портфеле в виде стохастических дифференциальных уравнений рассмотрены, например, в [2, 3]. В статье рассматривается математическая модель в виде дифференциальных уравнений, коэффициенты которых являются случайными процессами. Задачи оптимального управления для таких моделей, рассмотрены в [4]. Методами теории дифференциальных уравнений с вариационными производными удается получить математическое ожидание и вторые моментные функции решений дифференциальных уравнений и рассчитать риски в задаче о портфеле.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть t – время, $x_1(t),\ x_2(t)$ – стоимости ценных бумаг в момент времени t, изменение которых описывается уравнениями

$$\frac{dx_1}{dt} = \varepsilon_1(t,\omega)x_1,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \varepsilon_2(t,\omega)x_2, \qquad (1)$$

где $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ – случайные процессы, ω – случайное событие (в дальнейшем зависимость от ω в записи не отражается). $x_1(0)+x_2(0)=1$ – начальный капитал.

Требуется выбрать $x_1(0),\ x_2(0)$ таким образом, чтобы математическое ожидание по функции распределения процессов $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$

$$I = M(x_1(1)+x_2(1))$$

было наибольшим при заданном уровне риска (по Марковицу) $r = D(x_1(1)+x_2(1)),$ где $D(x_1(1)+x_2(1))$ – дисперсия случайной величины $x_1(1)+x_2(1).$ Предполагается, что известен характеристический функционал [5, стр. 30] случайных процессов $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$

$$\psi(u_1,u_2)=$$
$$=M\left(\exp\left(i\int_0^1(\varepsilon_1(s)u_1(s)+\varepsilon_2(s)u_2(s)ds)\right)\right), \quad (2)$$

здесь u_1, u_2 – функции из пространства $L_1(0,1)$ суммируемых функций на отрезке $(0,1)$, $i=\sqrt{-1}$.

Введем обозначения $e(u_1,u_2)=$ $=\exp\left(i\int_0^1(\varepsilon_1(s)u_1(s)+\varepsilon_2(s)u_2(s))ds\right)$, $\chi(\tau)=\chi(t,s,\tau)$ – функция переменной τ, определяемая по правилу: $\chi(\tau)=\chi(t,s,\tau)=$ $=sign(\tau-t)$ при $\tau\in[\min(t,s),\max(t,s)]$ и равная нулю в противном случае.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ ЗАДАЧА

В дальнейшем используется понятие вариационной производной [5, стр.13]. Пусть y – отображение из пространства $L_1(0,1)$ со значениями во множестве комплексных чисел C, $h\in L_1(0,1)$.

Определение. Если приращение $\Delta y(u)=$ $=y(u+h)-y(u)$ записывается в виде

$$\Delta y(u)=\int_0^1\varphi(s,u)h(s)ds+o(h),$$

где интеграл понимается в смысле Лебега и является линейным ограниченным функционалом по переменной $h\in L_1(0,1)$, $o(h)$ – бесконечно малая высшего порядка относительно h, то отображение $\varphi: R\times L_1(0,1)\to C$ называется вариационной производной функционала y в точке u и обозначается $\dfrac{\delta y(u)}{\delta u(t)}$.

Техника вариационного дифференцирования изложена в [5].

Умножим уравнения системы (1) на $e(u_1,u_2)$ и вычислим математическое ожидание по функции распределения случайных процессов ε_1, ε_2 найденных выражений, получим

$$M\left(\frac{dx_j}{dt}e(u_1,u_2)\right)=M\left(\varepsilon_j x_j e(u_1,u_2)\right), \quad (3)$$
$$j=1,2.$$

Введем обозначения

$$y_j=M\left(x_j(t)e(u_1,u_2)\right),\ j=1,2.$$

Поскольку

$$\frac{\partial y_j}{\partial t}=M\left(\frac{dx_j}{dt}e(u_1,u_2)\right),$$
$$\frac{\delta y_j}{\delta u_j(t)}=M\left(i\varepsilon_j x_j e(u_1,u_2)\right),\quad j=1,2.$$

то (3) записывается в виде

$$\frac{\partial y_j}{\partial t}=-i\frac{\delta y_j}{\delta u_j(t)},\ \ j=1,2. \quad (4)$$

Начальные условия для системы (1) имеют вид

$$x_j(0)=x_{j0},\ \ j=1,2, \quad (5)$$

где $0\le x_{j0}\le 1$, $x_{10}+x_{20}=1$. Умножая (5) на $e(u_1,u_2)$ и вычисляя математическое ожидание, получаем начальные условия для системы уравнений (4)

$$y_j(0,u_1,u_2)=x_{j0}\psi(u_1,u_2),\ \ j=1,2. \quad (6)$$

Легко видеть, что $y_j(t,0,0)=M(x_j(t))$. Таким образом, для нахождения математических ожиданий $M(x_j(t))$ достаточно найти решение детерминированной задачи (4), (6).

Решение этой задачи имеет вид [5, стр. 166]

$$y_1(t,u_1,u_2)=x_{10}\psi(u_1-i\chi(0,t),u_2),$$
$$y_2(t,u_1,u_2)=x_{20}\psi(u_1,u_2-i\chi(0,t)). \quad (7)$$

3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА

Из (7) находим

$$M(x_1(t)+x_2(t))=$$
$$=x_{10}\psi(-i\chi(0,t),0)+x_{20}\psi(0,-i\chi(0,t)).$$

Отсюда находим математическое ожидание критерия качества

$$\begin{aligned}I&=M(x_1(1)+x_2(1))=\\&=x_{10}\psi(-i\chi(0,1),0)+(1-x_{10})\psi(0,-i\chi(0,1))=\\&=x_{10}[\psi(-i\chi(0,1),0)-\psi(0,-i\chi(0,1))]+\\&+\psi(0,-i\chi(0,1)).\end{aligned} \quad (8)$$

4. ОПТИМАЛЬНОЕ НАЧАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КАПИТАЛА БЕЗ УЧЕТА РИСКОВ

Используя (8), задачу можно сформулировать в виде: *Требуется найти* $0\le x_{10}\le 1$, *при котором (8) принимает наибольшее значение.*

Теорема 1. *Оптимальное распределение начального капитала без учета рисков имеет вид:*

$x_{10}=1,\ x_{20}=0$ *при условии*

$$\psi(-i\chi(0,1),0)-\psi(0,-i\chi(0,1))>0,$$

при этом $I=\psi(-i\chi(0,1),0)$;

$x_{10}=0,\ x_{20}=1$ *при условии*

$$\psi(-i\chi(0,1),0)-\psi(0,-i\chi(0,1))\le 0,$$

при этом $I=\psi(0,-i\chi(0,1))$.

Доказательство. Выражение (8) является линейным относительно x_{10}, поэтому максимум на отрезке [0, 1] достигается при $x_{10}=1$, если коэффициент при x_{10} больше нуля. В противном случае максимум достигается при $x_{10}=0$. Теорема доказана.

Для нахождения оптимального начального распределения капитала нужно знать лишь характеристический функционал ψ. Для получения более конкретных результатов нужно его задать.

Рассмотрим характеристический функционал гауссовых процессов $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$.

$$\psi(u_1,u_2)=\exp\left[i\int_0^1(a_1(s)u_1(s)+a_2(s)u_2(s))ds-\right.$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 b_{11}(s_1,s_2)u_1(s_1)u_1(s_2)ds_1ds_2-$$
$$-\int_0^1\int_0^1 b_{12}(s_1,s_2)u_1(s_1)u_2(s_2)ds_1ds_2-$$
$$\left.-\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 b_{22}(s_1,s_2)u_2(s_1)u_2(s_2)ds_1ds_2\right],\qquad(9)$$

где $a_1(s)=M(\varepsilon_1(s))$, $a_2(s)=M(\varepsilon_2(s))$, $b_{11}(s_1,s_2)=M(\varepsilon_1(s_1)\varepsilon_1(s_2))-M(\varepsilon_1(s_1))M(\varepsilon_1(s_2))$ – ковариационная функция случайного процесса ε_1, $b_{12}(s_1,s_2)=M(\varepsilon_1(s_1)\varepsilon_2(s_2))-$ $-M(\varepsilon_1(s_1))M(\varepsilon_2(s_2)), b_{22}(s_1,s_2)=M(\varepsilon_2(s_1)\varepsilon_2(s_2))-$ $-M(\varepsilon_2(s_1))M(\varepsilon_2(s_2))$.

Отметим, что при $b_{12}=0$ случайные процессы $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ независимы.

Вычислим коэффициент

$$\psi(-i\chi(0,1),0)-\psi(0,-i\chi(0,1))=$$
$$=\exp\left[i\int_0^1 a_1(s)ds+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2\right]-$$
$$-\exp\left[i\int_0^1 a_2(s)ds+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 b_{22}(s_1,s_2)ds_1ds_2\right].\ (10)$$

Теорема 2. *Если случайные процессы* $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ *заданы характеристическим функционалом (9), то оптимальное распределение начального капитала без учета рисков имеет вид:*

$x_{10}=1,\ x_{20}=0$ *при условии*

$$\exp\left[i\int_0^1(a_1(s)-a_2(s))ds+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 b_{11}(s_1,s_2)-b_{22}(s_1,s_2)ds_1ds_2\right]>0,$$

при этом $I=\psi(-i\chi(0,1),0)$;

$x_{10}=0,\ \ x_{20}=1$ *в противном случае, при этом* $I=\psi(0,-i\chi(0,1))$.

Результат верен и для статистически зависимых случайных процессов $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$.

Доказательство. Используя (10) в теореме 1и учитывая монотонность экспоненты, получаем утверждение теоремы 2. Так как результат не зависит от b_{12}, то результат верен и для статистически зависимых случайных процессов $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$. Теорема доказана.

5. ВТОРЫЕ МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

Введем обозначения

$$z_j=z_j(t,\tau,u_1,u_2)=$$
$$=M(x_j(t)x_j(\tau)e(u_1,u_2)),\quad j=1,2,$$
$$z_3=z_3(t,\tau,u_1,u_2)=M(x_1(t)x_2(\tau)e(u_1,u_2)),$$
$$z_4=z_3(t,\tau,u_1,u_2)=M(x_1(t)x_2(\tau)e(u_1,u_2)).$$

Умножим первое из уравнений (1) на $x_1(\tau)e(u_1,u_2)$, второе уравнение из (1) умножим на $x_2(\tau)e(u_1,u_2)$ и вычислим математические ожидания по функции распределения процессов $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$, получим

$$M\left(\frac{dx_j}{dt}x_j(\tau)e(u_1,u_2)\right)=$$
$$=M\left(\varepsilon_j(t)x_j(t)x_j(\tau)e(u_1,u_2)\right),\ j=1,2.$$

Умножив первое из уравнений (1) на $x_2(\tau)e(u_1,u_2)$, второе уравнение из (1) умножив на $x_1(\tau)e(u_1,u_2)$ и вычислив математические ожидания по функции распределения процессов $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$, получим

$$M\left(\frac{dx_1}{dt}x_2(\tau)e(u_1,u_2)\right)=$$
$$=M\left(\varepsilon_1(t)x_1(t)x_2(\tau)e(u_1,u_2)\right),$$

$$M\left(\frac{dx_2}{dt}x_1(\tau)e(u_1,u_2)\right)=$$
$$=M\left(\varepsilon_2(t)x_2(t)x_1(\tau)e(u_1,u_2)\right).$$

Используя введенные обозначения z_1, z_2, z_3, z_4, эти уравнения запишем в виде

$$\frac{\partial z_j}{\partial t}=-i\frac{\delta z_j}{\delta u_j(t)},\quad j=1,2,$$
$$\frac{\partial z_3}{\partial t}=-i\frac{\delta z_3}{\delta u_1(t)},\quad \frac{\partial z_4}{\partial t}=-i\frac{\delta z_4}{\delta u_2(t)}. \qquad (11)$$

Аналогичным образом находятся условия

$$z_j(0,0,u_1,u_2)=x_{j0}^2\psi(u_1,u_2),\quad j=1,2,$$
$$z_j(0,0,u_1,u_2)=x_{10}x_{20}\psi(u_1,u_2),\quad j=3,4. \quad (12)$$

Полагая в (11) $\tau=0$, получим систему уравнений с начальными условиями (12). Решение этой системы находится по формуле [5, стр. 166]

$$z_1(t,0,u_1,u_2)=x_{10}^2\psi(u_1-i\chi(0,t),u_2),$$
$$z_2(t,0,u_1,u_2)=x_{20}^2\psi(u_1,u_2-i\chi(0,t)),$$
$$z_3(t,0,u_1,u_2)=x_{10}x_{20}\psi(u_1-i\chi(0,t),u_2),$$
$$z_4(t,0,u_1,u_2)=x_{10}x_{20}\psi(u_1,u_2-i\chi(0,t)).$$

Используя симметричность z_1, z_2 по переменным t, τ и определение z_3, z_4, находим

$$z_1(0,\tau,u_1,u_2)=x_{10}^2\psi(u_1-i\chi(0,\tau),u_2),$$
$$z_2(0,\tau,u_1,u_2)=x_{20}^2\psi(u_1,u_2-i\chi(0,\tau)), \quad (13)$$
$$z_3(0,\tau,u_1,u_2)=z_4(0,\tau,u_1,u_2)=$$
$$=x_{10}x_{20}\psi(u_1,u_2-i\chi(0,\tau)).$$

Решение системы уравнений (11) с начальными условиями (13) находится по формуле [5, стр. 166]

$$z_1=x_{10}^2\psi(u_1-i\chi(0,t)-i\chi(0,\tau),u_2),$$
$$z_2=x_{20}^2\psi(u_1,u_2-i\chi(0,t)-i\chi(0,\tau)),$$
$$z_3=x_{10}x_{20}\psi(u_1-i\chi(0,t),u_2-i\chi(0,\tau)).$$

Из определения z_1, z_2, z_3 при $u_1=u_2=0$, $t=\tau=1$ следует

$$M(x_1^2(1))=x_{10}^2\psi(-2i\chi(0,1),0),$$
$$M(x_2^2(1))=x_{20}^2\psi(0,-2i\chi(0,1)), \qquad (14)$$
$$M(x_1(1)x_2(1))=x_{10}x_{20}\psi(-i\chi(0,1),-i\chi(0,1)).$$

Теорема 3. *Дисперсия* $D(x_1(1)+x_2(1))$ *имеет вид*

$$D(x_1(1)+x_2(1))=Ax_{10}^2-2Bx_{10}+C, \qquad (15)$$

где

$$A=\psi(-2i\chi(0,1),0)-\psi^2(-i\chi(0,1),0)+$$
$$+\psi(0,-2i\chi(0,1))-\psi^2(0,-i\chi(0,1))-$$
$$-4\psi(-i\chi(0,1),-i\chi(0,1))+$$
$$+4\psi(-i\chi(0,1),0)\psi(0,-i\chi(0,1)),$$
$$B=\psi(0,-2i\chi(0,1))-\psi^2(0,-i\chi(0,1))+$$
$$+\psi(-i\chi(0,1),-i\chi(0,1))-$$
$$-\psi(-i\chi(0,1),0)\psi(0,-i\chi(0,1)),$$
$$C=\psi(0,-2i\chi(0,1))-\psi^2(0,-i\chi(0,1)).$$

Доказательство. Используя (14), находим

$$D(x_1(1)+x_2(1))=$$
$$=M\left[(x_1(1)+x_2(1))^2\right]-M^2(x_1(1)+x_2(1))=$$
$$=M(x_1^2(1))+M(x_2^2(1))+$$
$$+2M(x_1(1)x_2(1))-M^2(x_1(1))-$$
$$-2M(x_1(1))M(x_2(1))-M^2(x_2(1))=$$
$$=D(x_1(1))+D(x_2(1))+$$
$$+2[M(x_1(1)x_2(1))-M(x_1(1))M(x_2(1))]=$$
$$=x_{10}^2[\psi(-2i\chi(0,1),0)-\psi^2(-i\chi(0,1),0)]+$$
$$+x_{20}^2[\psi(0,-2i\chi(0,1))-\psi^2(0,-i\chi(0,1))]+$$
$$+2x_{10}x_{20}[\psi(-i\chi(0,1),-i\chi(0,1))-$$
$$-\psi(-i\chi(0,1),0)\psi(0,-i\chi(0,1))].$$

Здесь $D(x_1(1))$, $D(x_2(1))$ – дисперсии случайных величин $x_1(1)$ и $x_2(1)$. Подставив в это выражение $x_{20}=1-x_{10}$, приходим к (15). Теорема доказана.

6. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОРТФЕЛЕМ С УЧЕТОМ РИСКА

Полученные результаты позволяют сформулировать оптимальный алгоритм распределения начального капитала. Согласно определению Г. Марковица, риском называется дисперсия $D(x_1(1)+x_2(1))$.

Теорема 4. *Пусть задан допустимый риск* $r>0$, *тогда:*

1. $x_{10}=1$, $x_{20}=0$ *при выполнении условий*

$$\psi(-i\chi(0,1),0)-\psi(0,-i\chi(0,1))>0,$$

$$A-2B+C\le r,$$

при этом $I=\psi(-i\chi(0,1),0)$.

2. $x_{10}=0,\ x_{20}=1$ *при выполнении условий*

$$\psi(-i\chi(0,1),0)-\psi(0,-i\chi(0,1))\le 0,$$
$$C\le r,$$

при этом $I=\psi(0,-i\chi(0,1))$.

3. Если не выполняются случаи 1, 2 и

$$\psi(-i\chi(0,1),0)-\psi(0,-i\chi(0,1))>0,$$

то в качестве x_{10} *следует выбрать большее из чисел* $\dfrac{B\pm\sqrt{B^2-A(C-r)}}{A}$, *лежащее в промежутке (0,1), при этом*

$$I=x_{10}[\psi(-i\chi(0,1),0)-\psi(0,-i\chi(0,1))]+$$
$$+\psi(0,-i\chi(0,1)),$$

если $\psi(-i\chi(0,1),0)-\psi(0,-i\chi(0,1))<0$, *то в качестве* x_{10} *следует выбрать меньшее из чисел* $\dfrac{B\pm\sqrt{B^2-A(C-r)}}{A}$, *лежащее в промежутке (0,1).*

Доказательство. В первом случае при $x_{10}=1$ критерий качества принимает наибольшее значение (см. теорему 1). Тогда нужно оценить риск. Для этого нужно в (15) положить $x_{10}=1$. Если при этом выполняется неравенство $A-2B+C\le r$, то риск не превосходит заданную величину r и следует выбрать $x_{10}=1$. Из (8) находим $I=\psi(-i\chi(0,1),0)$.

Во втором случае из (15) при $x_{10}=0$ находим $D(x_1(1)+x_2(1))=C$. Если $C\le r$, то риск не превосходит заданную величину r и следует выбрать $x_{10}=0$, при этом из (8) находим $I=\psi(0,-i\chi(0,1))$.

Если первые два варианта не выполняются, то $0<x_{10}<1$ выбирается из условия максимально допустимого риска, т. е. решение уравнения $Ax_{10}^2-2Bx_{10}+C=r$. При этом, если есть два корня из промежутка (0,1), то при $A>0$ следует выбрать больший, в противном случае нужно выбирать меньший корень. Значение критерия качества I находится подстановкой выбранного корня в (8). Теорема доказана.

Замечание. Если случайные процессы ε_1, ε_2 заданы характеристическим функционалом (9) и b_{12} отлично от нуля (случайные процессы статистически зависимы), то величина

$$\psi(-i\chi(0,1),-i\chi(0,1))=$$
$$=\exp\left[\int_0^1 a_1(s)ds+\int_0^1 a_2(s)ds+\right.$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 b_{22}(s_1,s_2)ds_1ds_2+$$
$$\left.+\int_0^1\int_0^1 b_{12}(s_1,s_2)ds_1ds_2\right]$$

зависит от b_{12}. Эта величина входит в представление коэффициента A, следовательно, оптимальный портфель с учетом риска зависит от величины корреляционной связи между процессами ε_1, ε_2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для определения оптимального распределения начального капитала случайные процессы ε_1, ε_2 должны быть заданы характеристическим функционалом ψ. Если математическая модель предполагает, что процессы ε_1, ε_2 являются гауссовыми, то нужно задать только коэффициенты a_1, a_2, b_{11}, b_{12}, b_{22}. Представление коэффициентов A, B, C в (15) содержит интегралы, которые можно вычислять численными методами. В модели не предполагается, что промежуток времени является длительным (мы его обозначили за единицу), поэтому модель применима и для оперативного управления распределением капитала. Рассмотренный метод может быть применен для более общих моделей, например, для системы линейных неоднородных уравнений или для большего числа уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Markowitz H. M.* Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investiments. Yale University Press. – 1976.

2. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения / Б. Оксендаль. – М. : Мир, ООО Изд-во АСТ, 2003. – 408 с.

3. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики Т. 2. Теория / А. Н. Ширяев. – М. : ФАЗИС, 1998.

4. *Задорожний В. Г.* Об оптимальном линейном регуляторе со случайно изменяющейся структурой / В. Г. Задорожний, В. Грекш // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2011. – № 1.

5. *Задорожний В. Г.* Методы вариационного анализа / В.Г. Задорожний. –М. – Ижевск : РХД, 2006. – 316 с.

Задорожний Владимир Григорьевич – д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой нелинейных колебаний Воронежского государственного университета.
Тел.: 8 (4732) 208-649 (раб.),
8 (4732) 741-485 (дом.)
E-mail: zador@amm.vsu.ru

Zadorozhniy Vladimir Grigoryevich – doctor of science, professor, Voronezh State University.
Tel.: 8 (4732) 208-649,
8 (4732) 741-485
E-mail: zador@amm.vsu.ru