

## ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССООБМЕНА НА ПРОНИЦАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ГИПЕРЗВУКОВЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ.

### III. О ПОСТАНОВКЕ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ И ОБЛАСТЯХ ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ «ТЕПЛО – ТРЕНИЕ»

Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко

*Казанский национальный исследовательский технический университет  
(КНИТУ-КАИ) им. А. Н. Туполева (г. Казань)*

Поступила в редакцию 26.09.2016 г.

**Аннотация.** Рассматриваются задачи математического моделирования эффективной тепловой защиты проницаемых цилиндрических и сферических поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов. Приведена постановка двумерных обратных задач тепломассообмена. Определены условия возможности восстановления пары управляющих воздействий в зависимости от заданных параметров тепломассообмена в точке торможения. Установлен вид области допустимых значений «тепло – трение». Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

**Ключевые слова:** тепломассообмен, гиперзвуковые течения, ламинарный пограничный слой, управление, двумерная обратная задача, область допустимых значений «тепло – трение».

**Annotation.** The hypersonic aircraft permeable cylindrical and spherical surfaces effective heat protection mathematical modeling problems are considered. The statement of two dimensional inverse problems is given. The conditions of control restoration possibility depending on the preset given heat and mass transfer parameters in the stagnation point are found. The allowed values “heat – friction” range shape is distinguished. The computational experiments results are presented.

**Keywords:** heat and mass transfer, hypersonic flows, laminar boundary layer, control, two dimensional inverse problem, allowed values “heat - friction” range.

#### ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является расширенным вариантом материала докладов, представленных на Международную конференцию «ВЗМШ-2017» [1, 2] (секция «Качественные методы математического моделирования»).

Ранее на основе изучения свойств систем дифференциальных и алгебраических уравнений [3] для *одномерных обратных задач* (ООЗ) тепломассообмена (ТМО) на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА) были:

- 1) приведены постановки [4, 5];
- 2) обоснована возможность восстановления управления в точке торможения (ТТ) [5, 6];

3) обсуждены результаты вычислительных экспериментов по синтезу управлений, обеспечивающих желаемые параметры ТМО [7].

В данной работе, продолжающей исследования [3–7]:

а) приводятся постановки *двумерных обратных задач* (ДОЗ) ТМО на проницаемых поверхностях ГЛА;

б) определяются условия возможности восстановления пары управляющих воздействий в ТТ в зависимости от заданных параметров ТМО;

в) устанавливается вид области допустимых значений «тепло – трение»  $\Omega = \{(q_0, \bar{f}_0)\}$ ;

г) изучается влияние магнитного поля на изменение области  $\Omega$ .

Кроме того, проводится сравнение результатов вычислительных экспериментов с полученными в работах [8–10].

Являясь продолжением [5, 7], данная статья сохраняет введенные в них обозначения.

## 1. ДВУМЕРНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССОБМЕНА

Аналогично [4, 5] сформулируем обратные задачи по паре управлений: вдуву  $m(x)$  и температурному фактору (ТФ)  $\tau(x)$ , где  $x \in X = [0; 1]$ . Пусть заданы:

- 1) сетка управления  $X_1 = (x_j^\wedge)_{j=0, \dots, n_1}$ ;
- 2) сетка наблюдения  $X_2 = (x_j^\vee)_{j=0, \dots, n_2}$ ;
- 3) непрерывное управление  $s(x) = \sigma B_0^2(x)$  – магнитное поле (МП);
- 4) ограничения  $I_{j,k}^c = [b_{j,k}^c; t_{j,k}^c]$ ,  $j = 1, \dots, n_1$ ,  $k = 0, \dots, \nu_1^c$ ,  $c \in \{m, \tau\}$ ,  $\nu_1^m \geq 0$ ,  $\nu_1^\tau \geq 1$ ;
- 5) пары «контрольных» значений  $(q^\vee, f^\vee) = ((q_j^\vee, f_j^\vee))_{j=0, \dots, n_2}$ .

Требуется найти пару управлений  $(m^\sim, \tau^\sim)$ , заданных [11] элементами  $m^\sim(x) = m_j^\sim(x)$  и  $\tau^\sim(x) = \tau_j^\sim(x)$  для  $x \in [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge]$ ,  $j = 1, \dots, n_1$ , удовлетворяющими условиям

$$(m^\sim)^{(k)}(x) \in I_{j,k}^m, \quad k = 0, \dots, \nu_1^m, \quad (1)$$

$$(\tau^\sim)^{(k)}(x) \in I_{j,k}^\tau, \quad k = 0, \dots, \nu_1^\tau, \quad (2)$$

таких, что  $m^\sim(x)$  является непрерывным,  $\tau^\sim(x)$  – непрерывно-дифференцируемым на  $X$ , а вычисленные [3, 8, 9] на  $X_2$  пары  $(q^\sim, f^\sim) = ((q_j^\sim, f_j^\sim))_{j=0, \dots, n_2}$ , где

$$q_j^\sim = q(x_j^\vee; m^\sim, \tau^\sim, s), \quad f_j^\sim = f(x_j^\vee; m^\sim, \tau^\sim, s),$$

должны быть близкими к  $(q^\vee, f^\vee)$ , т. е.

$$(q^\vee, f^\vee) \rightarrow (m^\sim, \tau^\sim),$$

$$(m^\sim, \tau^\sim, s) \rightarrow (q^\sim \approx q^\vee, f^\sim \approx f^\vee). \quad (3)$$

**Замечания.** Приведённая выше постановка требует некоторых уточнений.

1) Аналогично [5] для представления элементов  $m_j^\sim(x)$  и  $\tau_j^\sim(x)$  используются многочлены степеней  $\mu_1^m \geq \nu_1^m + 1$  и  $\mu_1^\tau \geq \nu_1^\tau + 1$ , соответственно. Отметим, что степени  $\mu_1^c$  (для  $c \in \{m, \tau\}$ ) выбраны на единицу больше требуемых в (1) и (2) значений  $\nu_1^c$ .

2) В качестве типов близости пар  $(q^\sim, f^\sim)$  и  $(q^\vee, f^\vee)$  в (3) используются обобщения аппроксимационного и интерполяционного ти-

пов близости, введенных в [4, 5]. В частности, используются

$$\begin{aligned} R_\infty((q^\sim, f^\sim); (q^\vee, f^\vee)) &= \\ &= \max \{R_\infty(q^\sim; q^\vee); R_\infty(f^\sim; f^\vee)\}, \\ R_p((q^\sim, f^\sim); (q^\vee, f^\vee)) &= \\ &= (R_p^p(q^\sim; q^\vee) + R_p^p(f^\sim; f^\vee))^{1/p} \\ &\text{при } p \in [1; +\infty). \end{aligned}$$

3) Аналогично [5] для  $\mu_1^m \geq 1$  и  $\mu_1^\tau \geq 2$  будем предполагать, что  $X_1 \subseteq X_2$ , и (для простоты) что множества  $X_{1,j}^+ = (X_2 \setminus X_1) \cap [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge]$  содержат одинаковое количество  $\nu_2 \geq 0$  (различных) точек:  $X_{1,j}^+ = (x_{j,k}^\wedge)_{k=1, \dots, \nu_2}$ . В зависимости от выбранного [11] поведения  $m^\sim$  и  $\tau^\sim$  в точках стыка  $X_1$  и от соотношения между  $\mu_1^m$ ,  $\mu_1^\tau$  и  $\nu_2$  задача может оказаться *однозначно определённой*, *недо-* или *переопределённой*.

4) ДООЗ ТМО приведены в наиболее простой (синхронной как для наблюдения, так и для управления) постановке. Случаи *несовпадающих* между собой (отличающихся хотя бы в одном узле) сеток управления

$$X_1^m = (x_j^{m^\wedge})_{j=0, \dots, n_1^m}, \quad X_1^\tau = (x_j^{\tau^\wedge})_{j=0, \dots, n_1^\tau}$$

и/или *несовпадающих* между собой сеток наблюдения

$$X_2^q = (x_j^{q^\vee})_{j=0, \dots, n_2^q}, \quad X_2^f = (x_j^{f^\vee})_{j=0, \dots, n_2^f}$$

являются предметом отдельного исследования.

## 2. ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ЛОКАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ТЕПЛОМАССОБМЕНА ОТ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ В ТОЧКЕ ТОРМОЖЕНИЯ

### 2.1. Одномерный случай.

Уточним приведенные в работах [5, 6] утверждения о характере зависимости *параметров* пограничного слоя – функций  $\bar{\theta}_0(m_0, \tau_0, s_0)$ ,  $\bar{\theta}_1(\dots)$ ,  $\bar{\omega}_0(\dots)$ ,  $\bar{\omega}_1(\dots)$ , представляющих собой решения алгебраических систем (15) и (31) из [3], и *параметров* ТМО – функции  $q_0 = q(0; m_0, \tau_0, s_0)$ , определяющей значения локального теплового потока в ТТ, и функции  $\bar{f}_0 = \bar{f}(m_0, \tau_0, s_0)$ , представляющей собой коэффициент при значащей степени  $x$

локального напряжения трения  $f(x; m, \tau, s)$ , от управляющих воздействий в ТТ.

Пусть фиксированы значения неизменяемых параметров:

$$\text{число Маха } M_\infty \in [10; 40], \quad (4)$$

$$\text{высота полёта } H \in [10; 30] \text{ [км]}, \quad (5)$$

$$\text{радиус тела } R \in [0, 1; 1] \text{ [м]}. \quad (6)$$

Пусть диапазоны изменения управляющих параметров в ТТ ограничены следующим образом:

$$m_0 = m(0) \in [0; 1], \quad (7)$$

$$\tau_0 = \tau_w(0) \in [0, 15; 0, 9], \quad (8)$$

$$s_0 = \sigma B_0^2(0) \in [0; 5 \cdot 10^4] \text{ [Тл / Ом} \cdot \text{м]}. \quad (9)$$

Тогда для  $\bar{\theta}_0(m_0, \tau_0, s_0)$ ,  $\bar{\theta}_1(\dots)$ ,  $\bar{\omega}_0(\dots)$ ,  $\bar{\omega}_1(\dots)$ ,  $q_0(\dots)$ ,  $\bar{f}_0(\dots)$  установлены следующие свойства.

**Утверждение 1.** В условиях (4)–(9) функции  $\frac{\partial \bar{\theta}_0}{\partial m_0}$ ,  $\frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial m_0}$ ,  $\frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial m_0}$ ,  $\frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial m_0}$  строго положительны, а  $\frac{\partial q_0}{\partial m_0}$ ,  $\frac{\partial \bar{f}_0}{\partial m_0}$  – строго отрицательны.

**Утверждение 2.** В условиях (4)–(9) функции  $\frac{\partial \bar{\theta}_0}{\partial \tau_0}$ ,  $\frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \tau_0}$ ,  $\frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial \tau_0}$ ,  $\frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \tau_0}$ ,  $\frac{\partial q_0}{\partial \tau_0}$  строго отрицательны, а  $\frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \tau_0}$  – строго положительна.

**Утверждение 3.** В условиях (4)–(9) функции  $\frac{\partial \bar{\theta}_0}{\partial s_0}$ ,  $\frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial s_0}$ ,  $\frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial s_0}$ ,  $\frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial s_0}$  строго положительны, а  $\frac{\partial q_0}{\partial s_0}$ ,  $\frac{\partial \bar{f}_0}{\partial s_0}$  – строго отрицательны.

## 2.2. Двумерный случай.

В указанных в п. 2.1. условиях установлено, что для пары  $(q_0, \bar{f}_0)$  верны следующие свойства.

**Утверждение 4.** В условиях (4)–(9) для любого (фиксированного) значения параметра  $s_0$  отображение  $(m_0, \tau_0) \rightarrow (q_0, \bar{f}_0)$  – диффеоморфизм.

**Утверждение 5.** В условиях (4)–(9) для любого (фиксированного) значения параметра  $\tau_0$  отображение  $(m_0, s_0) \rightarrow (q_0, \bar{f}_0)$  – диффеоморфизм.

**Утверждение 6.** В условиях (4)–(9) для любого (фиксированного) значения параметра

$m_0$  отображение  $(\tau_0, s_0) \rightarrow (q_0, \bar{f}_0)$  – диффеоморфизм.

**Замечания.** 1) Справедливость утверждений 4 и 6 в условиях утверждений 1–3 очевидна:

$$\begin{aligned} \frac{D(q_0, \bar{f}_0)}{D(m_0, \tau_0)} &= \det \frac{\partial(q_0, \bar{f}_0)}{\partial(m_0, \tau_0)} = \\ &= \frac{\partial q_0}{\partial m_0} \cdot \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \tau_0} - \frac{\partial q_0}{\partial \tau_0} \cdot \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial m_0} < 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D(q_0, \bar{f}_0)}{D(\tau_0, s_0)} &= \det \frac{\partial(q_0, \bar{f}_0)}{\partial(\tau_0, s_0)} = \\ &= \frac{\partial q_0}{\partial \tau_0} \cdot \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial s_0} - \frac{\partial q_0}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \tau_0} > 0. \end{aligned}$$

2) В условиях (4)–(9) минор

$$\frac{D(q_0, \bar{f}_0)}{D(m_0, s_0)} = \det \frac{\partial(q_0, \bar{f}_0)}{\partial(m_0, s_0)} > 0.$$

3) Отметим также, что утверждения 4–6 верны и для более широкого, чем  $[0, 15; 0, 9]$ , диапазона изменения управляющего параметра  $\tau_0$ .

## 3. ОБЛАСТИ ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ «ТЕПЛО – ТРЕНИЕ»

На рис. 1–12 в графическом виде в терминах пар «тепло – трение»  $(q_0, \bar{f}_0)$  представлены серии решений алгебраических систем (15) и (31) из [3]. Случаям обтекания боковой поверхности прямого кругового цилиндра соответствуют рисунки с нечётными номерами, случаям обтекания поверхности сферического носка – с чётными. Расчёты проведены при  $M_\infty = 10$ ,  $R = 0,1$  [м],  $H = 10$  [км] для удобства сравнения с результатами [5, 6, 8–10, 12]. Размерность [Тл / Ом · м] управляющего параметра  $s_0$  для краткости далее в тексте не приводится.

Обозначим  $M^c = [0; 1]$ ,  $T^c = [0; 0,999]$ ,

$$S^c = [0; 5 \cdot 10^4], \quad M_{05}^d = \{0; 0,05; \dots; 1\},$$

$$M_{25}^d = \{0; 0,25; \dots; 1\}, \quad T_{05}^d = \{0; 0,05; \dots; 0,95\},$$

$$T_{15}^d = \{0; 0,15; \dots; 0,9\},$$

$$S_{25}^d = \{0; 25 \cdot 10^3; 50 \cdot 10^3\}.$$

На рис. 1 и 2 МП отсутствует, сетка образована семействами линий  $(m_0 \in M^c, \tau_0 \in T_{05}^d, s_0 = 0)$  и  $(m_0 \in M_{05}^d, \tau_0 \in T^c, s_0 = 0)$ . Отме-

тим, что, изменяя шаг сетки и размер изображения, рис. 1 и 2 можно использовать в инженерной практике в качестве номограмм.

На рис. 3 и 4 представлены три семейства линий, соответствующих сочетаниям варьируемых параметров:

$$M : (m_0 \in M^c, \tau_0 \in T_{15}^d, s_0 \in S_{25}^d),$$

$$T : (m_0 \in M_{25}^d, \tau_0 \in T^c, s_0 \in S_{25}^d),$$

$$S : (m_0 \in M_{25}^d, \tau_0 \in T_{15}^d, s_0 \in S^c),$$

и отмечены точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  (сочетания значений параметров, характеризующие их, указаны в скобках):

$$A : (m_0 = 0, \tau_0 = 0, s_0 = 0),$$

$$B : (m_0 = 1, \tau_0 = 0, s_0 = 0),$$

$$C : (m_0 = 0, \tau_0 = 0, 999, s_0 = 0),$$

$$D : (m_0 = 0, \tau_0 = 0, s_0 = 5 \cdot 10^4).$$

Рис. 5 и 6 демонстрируют влияние МП  $s_0$ : приведены линии семейств  $M$  и  $T$ . Таким способом визуализировано содержание утверждения 3 об одновременном уменьшении параметров  $(q_0, \bar{f}_0)$  при увеличении МП. Также визуализируется утверждение 4 о диффеоморфизме  $(m_0, \tau_0) \rightarrow (q_0, \bar{f}_0)$  при фиксировании параметра  $s_0$ .

Рис. 7 и 8 демонстрируют влияние ТФ  $\tau_0$ : приведены линии семейств  $M$  и  $S$ . Таким способом визуализировано содержание утверждения 2 об уменьшении  $q_0$  и увеличении  $\bar{f}_0$  при увеличении ТФ. Также визуализируется утверждение 5 о диффеоморфизме  $(m_0, s_0) \rightarrow (q_0, \bar{f}_0)$  при фиксировании параметра  $\tau_0$ .

Рис. 9 и 10 демонстрируют влияние вдува  $m_0$ : приведены линии семейств  $T$  и  $S$ . Таким способом визуализировано содержание утверждения 1 об одновременном уменьшении параметров  $(q_0, \bar{f}_0)$  при увеличении вдува. Также визуализируется утверждение 6 о диффеоморфизме  $(\tau_0, s_0) \rightarrow (q_0, \bar{f}_0)$  при фиксировании параметра  $m_0$ .

Рис. 11 и 12 иллюстрируют различие областей  $\Omega = \{(q_0, \bar{f}_0)\}$  при учёте и без учёта эффекта диссоциации. Приведены линии семейств  $M$  и  $T$  без МП ( $s_0 = 0$ ). Влияние эффекта диссоциации воздуха (начиная с  $M_\infty = 6$ , таблица 1 в [3]) проявляется в суще-

ственном увеличении значений параметров ТМО в ТТ по сравнению с рассчитанными по модели совершенного газа, что подтверждает выводы, сделанные ранее в [8, 9] в отношении локальных тепловых потоков.

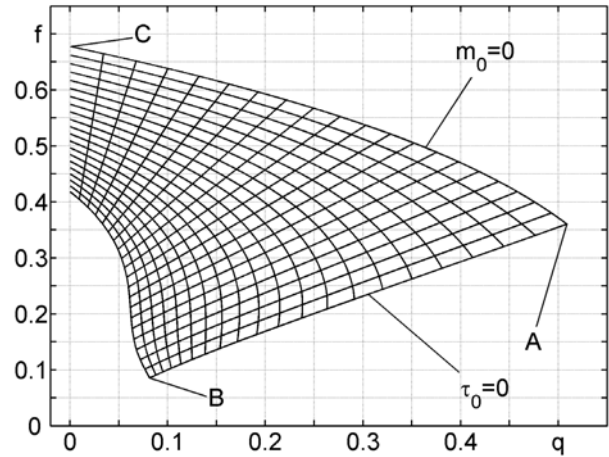


Рис. 1. Область  $\Omega$  в отсутствии МП ( $s_0 = 0$ ) для случая цилиндра

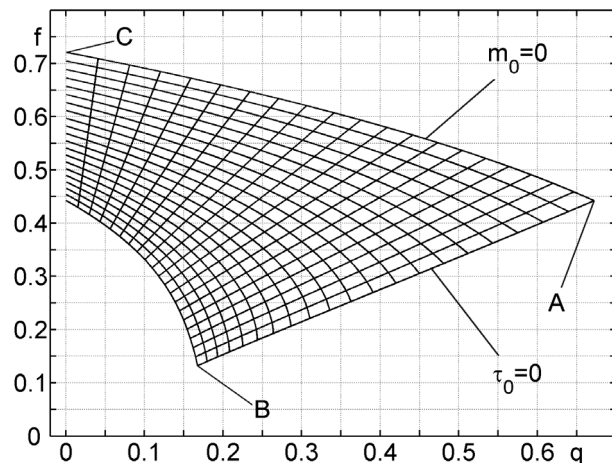


Рис. 2. Область  $\Omega$  в отсутствии МП ( $s_0 = 0$ ) для случая сферы

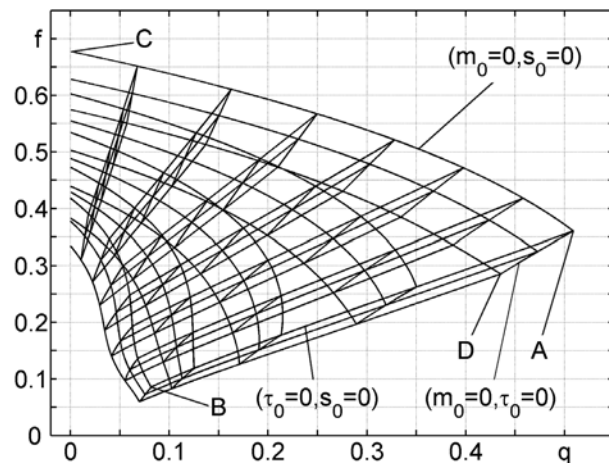


Рис. 3. Случай цилиндра



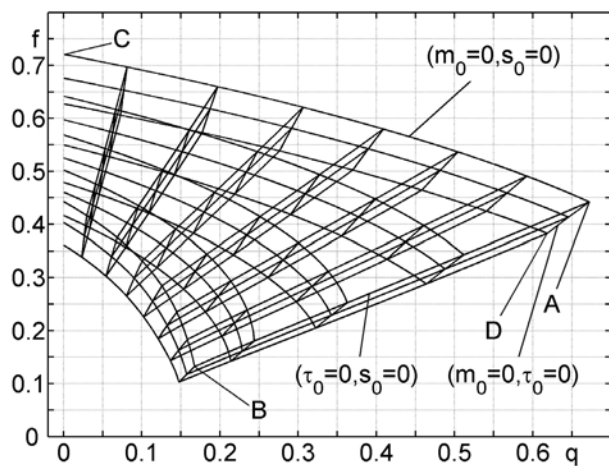


Рис. 4. Случай сферы

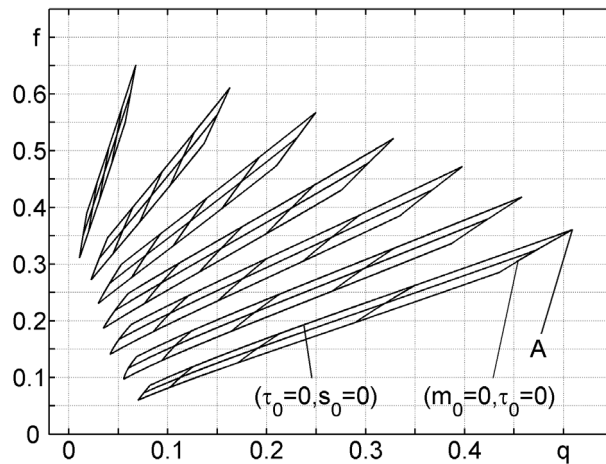


Рис. 7. Области  $\Omega$  в случае цилиндра для  $\tau_0 \in T_{15}^d$

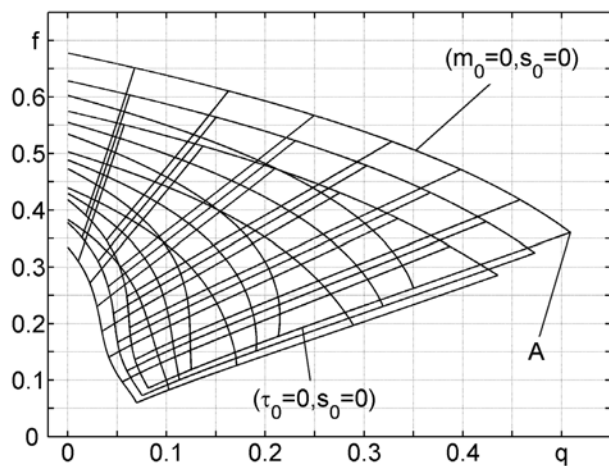


Рис. 5. Области  $\Omega$  в случае цилиндра для  $s_0 \in S_{25}^d$

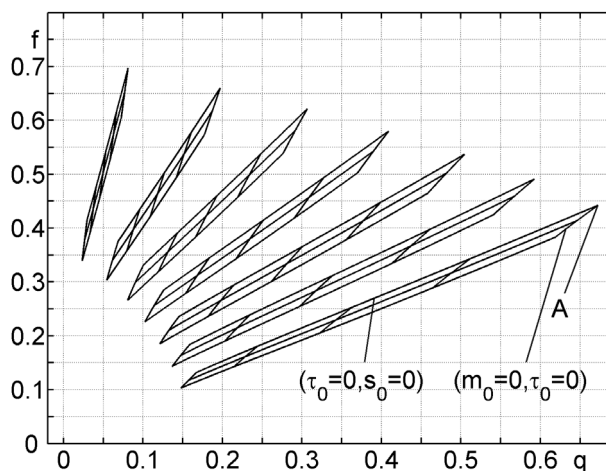


Рис. 8. Области  $\Omega$  в случае сферы для  $\tau_0 \in T_{15}^d$

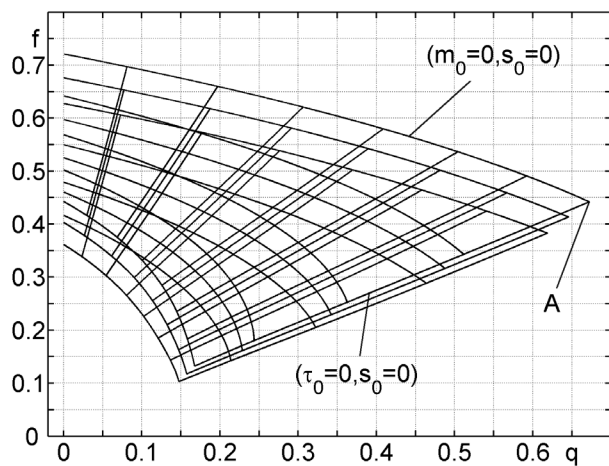


Рис. 6. Области  $\Omega$  в случае сферы для  $s_0 \in S_{25}^d$

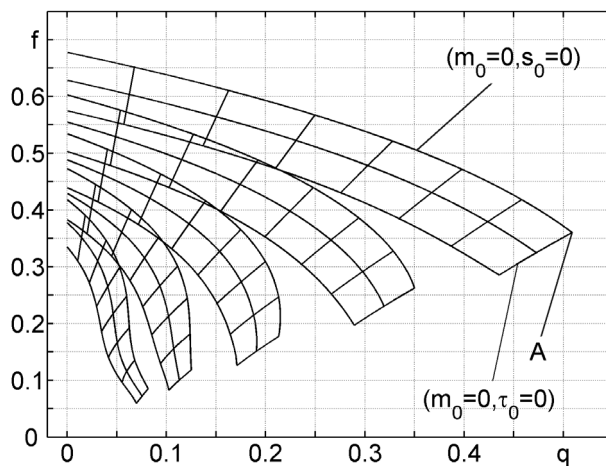


Рис. 9. Области  $\Omega$  в случае цилиндра для  $m_0 \in M_{25}^d$

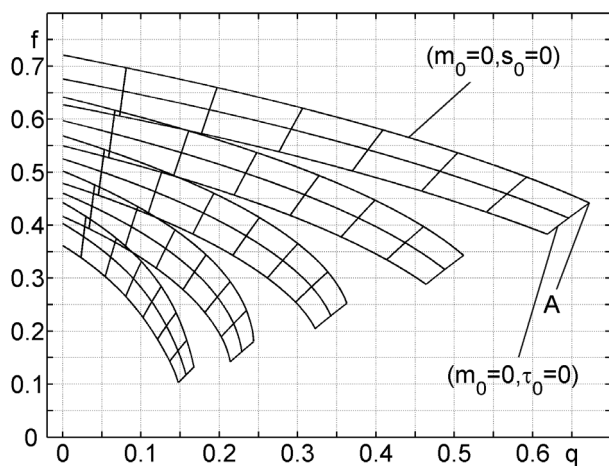


Рис. 10. Области  $\Omega$  в случае сферы для  $m_0 \in M_{25}^d$

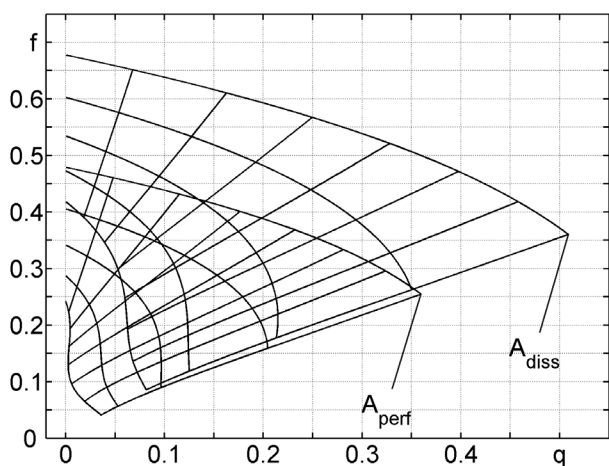


Рис. 11. Влияние эффекта диссоциации на область  $\Omega$  в случае цилиндра

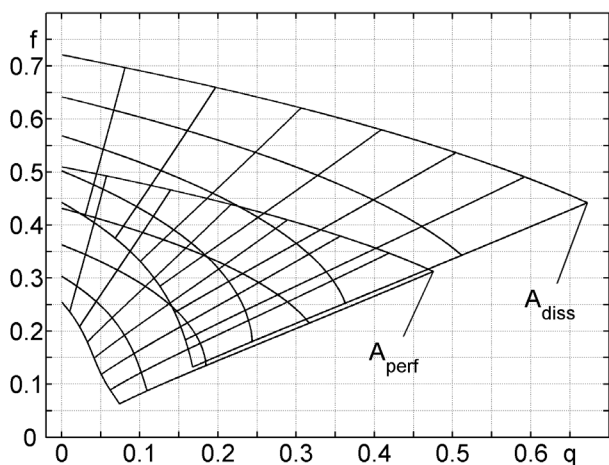


Рис. 12. Влияние эффекта диссоциации на область  $\Omega$  в случае сферы

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установлен вид области допустимых значений  $\Omega = \{(q_0, \bar{f}_0)\}$ , позволяющий дать однозначный ответ на вопрос о реализуемости пары  $(q_0, \bar{f}_0)$  параметров ТМО в ТТ в зависимости от возможного диапазона управляющих воздействий.

Из биективного характера соответствия пар управлений  $(m_0, \tau_0)$  и пар параметров ТМО  $(q_0, \bar{f}_0)$  следует, что попадание  $(q_0, \bar{f}_0)$  в допустимую область достаточно для построения начальной части решения ДОЗ ТМО в интерполяционной постановке [4, 5].

Вопросы разрешимости ДОЗ в интерполяционной постановке на отрезке планируется детально обсудить в последующих публикациях.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают глубокую признательность участникам Одиннадцатой Международной конференции «Сеточные методы для краевых задач и приложения» (Казань, 20–25 октября 2016 г.) д.ф.-м.н., проф. Бадриеву Ильдару Бурхановичу, д.ф.-м.н., проф. Карчевскому Михаилу Мироновичу, д.ф.-м.н., проф. Шишкину Григорию Ивановичу за проявленный интерес к докладам [12, 13] и ценные замечания, позволившие, в частности, улучшить формулировки Утверждений 1–3.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Об обратных задачах тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы междунар. конф. Воронеж. зимн. мат. школа (26 января – 1 февраля 2017 г.). – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2017. – С. 39–44.

2. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Об однозначной зависимости локальных параметров тепломассообмена от управляющих воздействий в точке торможения гиперзвукового потока / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко //

Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы междунар. конф. Воронеж. зимн. мат. школа (26 января – 1 февраля 2017 г.). – Воронеж : Изд. дом ВГУ, 2017. – С. 44–48.

3. Бильченко Н. Г. Метод А. А. Дородницына в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 1. – С. 5–14.

4. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Об одной обратной задаче тепломассообмена / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Герценовские чтения 2016. Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования» в электронном журнале Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2016. – № 2. – Ч. 2. – С. 50–56. – URL: <http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/herzen2016.pdf> (дата обращения: 12.07.2016).

5. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. I. О некоторых постановках и возможности восстановления управления / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 4. – С. 5–12.

6. Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 3. – С. 5–11.

7. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. II. О некоторых вычислительных экспериментах / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 4. – С. 13–19.

8. Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика и математика. – 2015. – № 1. – С. 83–94.

9. Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2015. – № 1. – С. 5–8.

10. Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения «простых» законов вдува / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 95–102.

11. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Классы решений задач оптимального управления пограничным слоем на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «ВЗМШ С. Г. Крейна-2016»: Материалы междунар. конф. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – С. 82–86.

12. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. О возможности восстановления управления в некоторых обратных задачах тепломассообмена / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Одиннадцатой Международной конференции. – Казань: Казанский университет, 2016. – С. 64–69.

13. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. О некоторых вычислительных экспериментах в обратных задачах тепломассообмена / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Одиннадцатой Международной конференции. – Казань : Казанский университет, 2016. – С. 70–75.

**Бильченко Григорий Григорьевич** – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Научно-исследовательской лаборатории № 16 (при кафедре Теплотехники и энергетического машиностроения) Казанского национального исследовательского технического университета (КНИТУ-КАИ) им. А. Н. Туполева, Казань, Российская Федерация.  
Тел.: +7-905-319-1843  
E-mail: ggibil2@gmail.com

**Бильченко Наталья Григорьевна** – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Научно-исследовательской лаборатории № 16 (при кафедре Теплотехники и энергетического машиностроения) Казанского национального исследовательского технического университета (КНИТУ-КАИ) им. А. Н. Туполева, Казань, Российская Федерация.  
Тел.: +7-905-319-1842  
E-mail: bilchnat@gmail.com

**Bilchenko Grigoriy Grigorievich** – Candidate of Science in Physics and Mathematics, Researcher of Research Laboratory #16, Department of Heat Engineering and Power Engineering Machinery, Kazan National Research Technical University (KNRTU-KAI) named after A. N. Tupolev, Kazan, Russian Federation.  
Tel.: +7-905-319-1843  
E-mail: ggibil2@gmail.com

**Bilchenko Natalya Grigorievna** – Candidate of Science in Physics and Mathematics, Researcher of Research Laboratory #16, Department of Heat Engineering and Power Engineering Machinery, Kazan National Research Technical University (KNRTU-KAI) named after A. N. Tupolev, Kazan, Russian Federation.  
Tel.: +7-905-319-1842  
E-mail: bilchnat@gmail.com