

## МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ НЕМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ МНОЖЕСТВЕННЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ ПОТОКОВ С НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ФОРМЫ ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

П. Б. Абрамов\*, Е. Н. Десятирикова\*\*, М. А. Чурсин\*\*\*

\*ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (г. Воронеж)

\*\*Воронежский государственный технический университет

\*\*\*Воронежский филиал РЭУ им. Г. В. Плеханова

Поступила в редакцию 13.02.2017 г.

**Аннотация.** В статье обсуждается научный подход, позволяющий представить немарковский процесс марковской моделью с целью получения вероятностных оценок состояний процесса. Рассмотрены особенности решения задачи для нецелочисленных параметров формы гамма-распределения временных интервалов в потоках модели. Обоснован алгоритм расчета коэффициентов коррекции интенсивностей для множества рекуррентных потоков, выходящих из одного состояния модели.

**Ключевые слова:** немарковский процесс, марковская модель, рекуррентные потоки событий, пересчет интенсивностей.

**Annotation.** The article discusses a scientific approach to present a non-Markov process by Markov model to obtain probabilistic estimates of the process states. Considered features of solving the problem for non-integer shape parameter of the gamma distribution of model flows time intervals. Substantiated algorithm of calculation of coefficients of correction of the intensities for the set of recurrent flow emerging from one state of the model.

**Keywords:** non-markovian process, markovian model, recurrent stream, recalculation of intensity.

### ВВЕДЕНИЕ

Моделированию немарковских процессов смены состояний технических систем в научной литературе в настоящее время уделяется серьезное внимание. Полумарковские модели весьма сложны, что существенно затрудняет их использование в случае большого количества состояний системы. В ряде трудов [1–3] показано, что возможен подход, когда для стационарного режима модели рекуррентные потоки заменяются простейшими с пересчетом интенсивности, обеспечивая возможность применения марковских моделей для

получения вероятностных оценок. Представляется актуальным рассмотрение особенностей решения задачи для нецелочисленного параметра формы гамма-распределения и для случая множества рекуррентных потоков, исходящих из одного состояния модели.

### ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ НЕМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПОСЛЕДЕЙСТВИЯ

В [1] приводятся полные таблицы мантисс для коэффициентов пересчета  $K_{\text{корр}}$  интенсивности рекуррентного потока к интенсивности простейшего потока, в случае, когда он

---

© Абрамов П. Б., Десятирикова Е. Н., Чурсин М. А., 2017

$K_{nd} = 4,7 \downarrow$

| $\lambda / \Lambda_{nm}$ \ $K_{nd}$             | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    |
|-------------------------------------------------|------|------|------|------|------|------|
| 0,1                                             | 9756 | 9674 | 9633 | 9608 | 9591 | 9580 |
| 0,2                                             | 9524 | 9362 | 9280 | 9231 | 9199 | 9175 |
| 0,3                                             | 9302 | 9063 | 8943 | 8870 | 8821 | 8786 |
| 0,4                                             | 9091 | 8778 | 8619 | 8523 | 8459 | 8412 |
| 0,5                                             | 8889 | 8504 | 8308 | 8190 | 8110 | 8053 |
| $\lambda / \Lambda_{nm} = 0,73 \rightarrow$ 0,6 | 8696 | 8242 | 8011 | 7870 | 7776 | 7709 |
| 0,7                                             | 8511 | 7991 | 7725 | 7564 | 7456 | 7378 |
| 0,8                                             | 8333 | 7750 | 7452 | 7270 | 7149 | 7061 |
| 0,9                                             | 8163 | 7519 | 7189 | 6989 | 6854 | 6757 |

Рис. 1. Пример обращения к таблице мантисс коэффициентов пересчета  $K_{корр}$

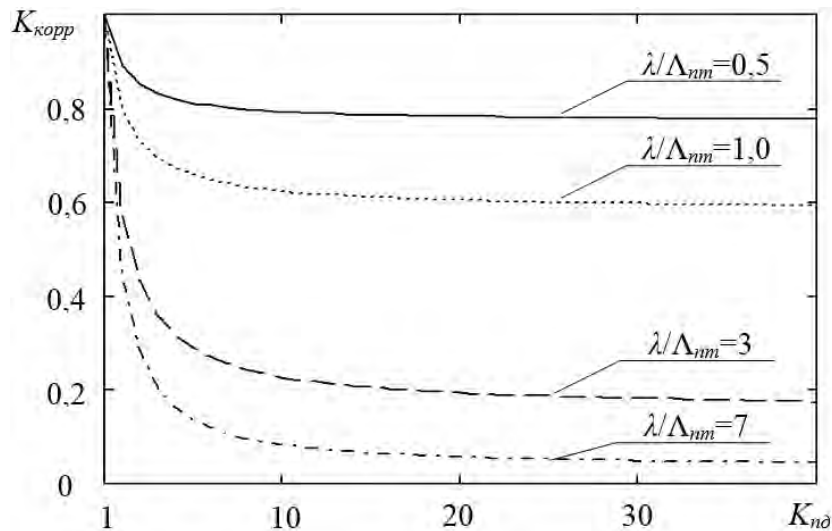


Рис. 2. Семейство зависимостей  $K_{корр} = f(K_{nd})$  при различных значениях отношения  $\lambda / \Lambda_{nm}$

является единственным и имеет гамма-распределение с целочисленным параметром формы.

Пример обращения к фрагменту таблицы с нецелочисленным параметром  $K_{nd} = m^2 / \sigma^2$  приведен на рис. 1.

На рис. 2 приведено семейство зависимостей  $K_{корр} = f(K_{nd})$  при различных значениях отношения  $\lambda / \Lambda_{nm}$ .

Анализ показывает, что при  $K_{nd} > 200$  зависимости достигают некоторых постоянных значений. Область при  $K_{nd} < 200$  является рабочей областью зависимостей. Определение промежуточных значений возможно на основе линейной и нелинейной интерполяции. Для нелинейной интерполяции целесоо-

бразно применение экспоненциальной функции, либо полиномиального представления. При этом в таблице, кроме двух значений справа и слева от искомой точки, следует взять еще по одному значению справа и слева с целью корректного учета кривизны зависимости.

При экспоненциальной интерполяции на основе четырех базовых точек система уравнений может быть представлена в виде

$$a \cdot \exp(-bK_{nd_i} + c) + d = K_{корр_i}, \quad i = \overline{1, 4}. \quad (1)$$

Эксперимент по расчету параметров интерполирующей экспоненты показал, что решение системы (1) для четырех базовых точек возможно не на всех участках зависимостей.

Приближение рассматриваемых зависимостей экспонентой на всей области определения является серьезной проблемой. Одним из возможных подходов к ее решению может стать введение переменных параметров экспоненты, зависящих от значения аргумента:

$$K_{\text{корр}} = a(K_{nd}) \cdot \exp(-b(K_{nd}) \cdot K_{nd} + c(K_{nd})) + d(K_{nd}). \quad (2)$$

Однако установление конкретного вида (2) требует проведения большого объема исследований. Полиномиальная интерполяция

$$K_{\text{корр}} = a_n K_{nd}^n + a_{n-1} K_{nd}^{n-1} + \dots + a_1 K_{nd} + a_0 \quad (3)$$

позволяет получать достаточно точные результаты для четырех и более точек, однако, как показал вычислительный эксперимент, также неприменима для всей области определения. Для отыскания коэффициентов в (3) требуется решение системы линейных уравнений. В следующем разделе будет показано, что для множества потоков с последствием алгоритм решения задачи включает в себя полный расчет промежуточного столбца таблицы. Если для каждой точки требуется решение системы уравнений, то алгоритм будет являться весьма затратным.

Линейная интерполяция сравнительно проста в реализации. Однако ее точность, по крайней мере на некоторых участках зависимостей, может быть неудовлетворительной. Сравнение результатов линейной интерполяции по отношению к кубической интерполяции в точке  $K_{nd} = 3,5$ , где наблюдается наибольшая нелинейность зависимостей, показало, что для  $\lambda / \Lambda_{nm} = 3$  абсолютная погрешность не превышает  $10^{-2}$ , а относительная погрешность составляет 1,6 %. Это вполне допустимые величины. Для  $\lambda / \Lambda_{nm} = 10$  абсолютная погрешность также не превышает  $10^{-2}$ , вместе с тем относительная погрешность составляет уже величину порядка 10 %. Этот результат не может быть признан удовлетворительным, однако линейная интерполяция может применяться в качестве модели первого приближения.

## МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ НЕМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ МНОЖЕСТВА ПОТОКОВ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Предположим, что из некоторого состояния модели выходят два рекуррентных потока (рис. 3).

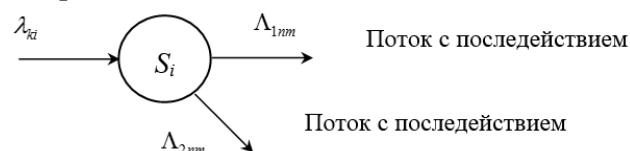


Рис. 3. Пример состояния с двумя рекуррентными потоками

Замена их эквивалентными простейшими потоками возможна, если бы для каждого из них были известны коэффициенты  $K_{\text{корр}}$

$$\begin{aligned} \lambda_{1\text{экв}} &= K_{1\text{корр}} \cdot \Lambda_{1nm}, \\ \lambda_{2\text{экв}} &= K_{2\text{корр}} \cdot \Lambda_{2nm}. \end{aligned} \quad (4)$$

Вместе с тем, из таблицы на рис. 1 следует, что при фиксированном коэффициенте формы гамма-распределения  $K_{nd}$  в потоке

$$K_{\text{корр}} = a \cdot \exp\left(-b \frac{\lambda}{\Lambda_{nm}} + c\right), \quad (5)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – коэффициенты аппроксимации,  $\Lambda_{nm}$  – интенсивность рекуррентного потока,

$\lambda$  – суммарная интенсивность простейших потоков, исходящих из данного состояния наряду с рекуррентным потоком.

Замена первого из рекуррентных потоков простейшим потоком с интенсивностью  $\lambda_{1\text{экв}}$  позволяет воспользоваться соотношением (5) и получить коэффициент пересчета для второго потока. Справедливо также и обратное утверждение. Основываясь на этом, можем записать следующую систему уравнений для отыскания неизвестных  $K_{1\text{корр}}$  и  $K_{2\text{корр}}$ :

$$\begin{cases} K_{1\text{корр}} = a_1 \cdot \exp\left(-b_1 \frac{K_{2\text{корр}} \cdot \Lambda_{2nm}}{\Lambda_{1nm}} + c_1\right) \\ K_{2\text{корр}} = a_2 \cdot \exp\left(-b_2 \frac{K_{1\text{корр}} \cdot \Lambda_{1nm}}{\Lambda_{2nm}} + c_2\right). \end{cases} \quad (6)$$

В системе уравнений (6) коэффициенты  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  и  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$  в общем случае могут считаться известными, так как каждая трой-

ка  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  является результатом аппроксимации некоторого столбца табличных значений функции. Следовательно, система двух уравнений с двумя неизвестными (6) в принципе позволяет определить коэффициенты коррекции двух рекуррентных потоков событий, исходящих из одного состояния модели.

Обобщая изложенный подход на произвольное количество  $N$  рекуррентных потоков, получим систему (7).

Каждое из уравнений (7) получается как результат аппроксимации некоторого столбца таблицы коэффициентов пересчета интенсивностей, соответствующего параметру последствия в  $i$ -ом исходящем из данного состояния рекуррентном потоке событий. Поскольку в таблице приведены только целочисленные параметры  $K_{nd}$ , то в большинстве случаев потребуется предварительное формирование нового столбца для нецелочисленных значений и его аппроксимация.

Можно показать, что для численного решения системы трансцендентных уравнений (7) достаточно быструю сходимость обеспечивает алгоритм поочередных подстановок,

реализующий принцип сжимающих отображений. Сначала фиксируются произвольные положительные значения всех переменных, в частности,  $K_{икорр} = 1$ . Внутренний цикл алгоритма включает в себя два уравнения относительно первой и второй переменных. Каждый следующий цикл алгоритма включает в себя на одно уравнение больше. Внешний цикл включает в себя все уравнения системы. Схема алгоритма приведена на рис. 4.

На схеме алгоритма под  $x_i$  понимаются в общем виде достаточно сложные аргументы функций, находящихся в правой части уравнений (7). Как показал вычислительный эксперимент, сходимость каждого цикла достигается максимально за 5 итераций. Таким образом, задача отыскания  $N$  коэффициентов пересчета интенсивностей будет решена не более чем за  $5^N$  подстановок переменных между уравнениями системы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе применения предложенного в настоящей статье подхода возможен анализ немарковских процессов динамики сложных

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{1корр} = a_1 \cdot \exp \left( -b_1 \frac{\sum_{j=2}^N K_{jкорр} \cdot \Lambda_{jnm}}{\Lambda_{1nm}} + c_1 \right) \\ K_{2корр} = a_2 \cdot \exp \left( -b_2 \frac{K_{1корр} \cdot \Lambda_{1nm} + \sum_{j=3}^N K_{jкорр} \cdot \Lambda_{jnm}}{\Lambda_{2nm}} + c_2 \right) \\ \dots \\ K_{икорр} = a_i \cdot \exp \left( -b_i \frac{\sum_{j=1}^{i-1} K_{jкорр} \cdot \Lambda_{jnm} + \sum_{j=i+1}^N K_{jкорр} \cdot \Lambda_{jnm}}{\Lambda_{inm}} + c_i \right) \\ \dots \\ K_{Nкорр} = a_N \cdot \exp \left( -b_N \frac{\sum_{j=1}^{N-1} K_{jкорр} \cdot \Lambda_{jnm}}{\Lambda_{Nnm}} + c_N \right) \end{array} \right. \quad (7)$$

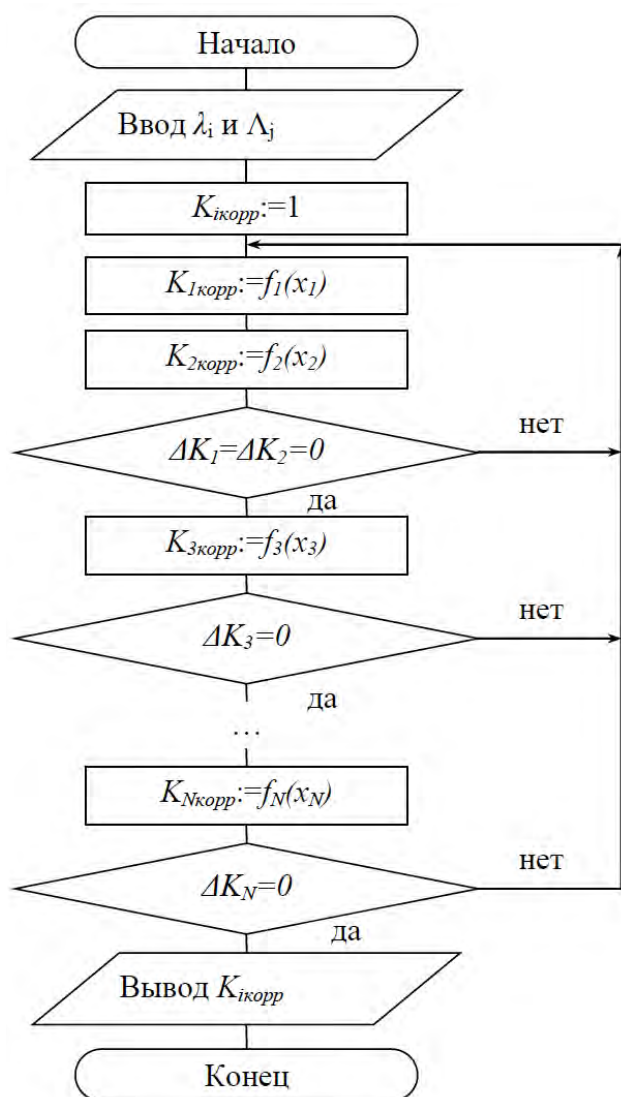


Рис. 4. Схема алгоритма вычисления коэффициентов  $K_{корр}$

систем с множеством рекуррентных потоков. Метод пересчета интенсивностей рекуррентных потоков позволяет заменить крайне сложные методы теории полумарковских процессов сравнительно простыми марковскими моделями и вычислительными процедурами для работы с табличными данными. Особенно полезным данный подход представляется с прагматической точки зрения для решения задач конкретной предметной направленности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов П. Б.* Марковские модели немарковских процессов: монография / П. Б. Абрамов. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2015. – 204 с.
2. *Абрамов П. Б., Десятирикова Е. Н., Чурсин М. А.* Марковские модели стационарного режима немарковских процессов. // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2015. – № 3. – С. 5–10.
3. *Абрамов П.Б., Чурсин М.А.* Анализ существования и устойчивости решения для марковских моделей разомкнутых систем массового обслуживания. // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2012. – № 1. – С. 56–61.

**Абрамов Петр Борисович** – канд. техн. наук, доцент, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина». Тел. 8-903-650-16-20  
E-mail: abpostbox58@mail.ru.

**Десятирикова Елена Николаевна** – д-р эконом. наук, профессор, Воронежский государственный технический университет.

**Чурсин Михаил Александрович** – канд. техн. наук, доцент, Воронежский филиал Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова.

**Abramov Petr B.** – candidate of technical Sciences, associate Professor, Military training-scientific center of Military Aviation Forces « Military Aviation academy named by prof. N.E.Zhukovsky and U.A.Gagarin». Tel: 8-903-650-16-20.  
E-mail: abpostbox58@mail.ru.

**Desyatirikova Elena N.** – doctor of economic Sciences, Professor, Voronezh State Technical University.

**Chursin Mikhail A.** – candidate of technical Sciences, associate Professor, PLEKHANOV Russian University of Economics, Voronezh branch.