УДК 519.834

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ШТРАФОВ И ВОЗНАГРАЖДЕНИЙ В ПРОЕКТАХ

А. В. Копытин, Д. И. Соломатин, Е. А. Копытина

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 05.11.2016 г.

Аннотация. Рассматривается проектная проблема, возникающая, когда реальное время выполнения работ, составляющих проект, отличается от планового времени, что может привести к задержке или досрочному завершению проекта и, как следствие, к штрафу или вознаграждению. Для того чтобы разделить общий штраф (вознаграждение) между работами проекта вводится семейство соответствующих кооперативных проектных игр. Каждая игра этого семейства является выпуклой, поскольку представляет собой разность так называемых игр банкротства и налогообложения.
Ключевые слова: проект, задержка и досрочное завершение, кооперативная игра, ядро, проблема банкротства, проблема налогообложения.
Annotation. This paper analyzes a project problem arising when the realization time of the activities consisting the project differs from the planned time, possibly causing delay or expedition of the project and associated penalty or reward. In order to divide the total reward (penalty) among the activities, a family of related project games is introduced. Every game of this family is shown to be convex by describing as the difference of bankruptcy and taxation games.
Keywords: project, delay and expedition, cooperative game, core, bankruptcy problem, taxation problem.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время многие проекты, будь то создание высокотехнологичных устройств или строительство сооружений и объектов инфраструктуры, требуют участия и координации усилий различных компаний. Благодаря своей высокой социальной и экономической значимости управление проектами стало важной и актуальной дисциплиной. Качественное планирование проекта имеет большое значение для сокращения времени проекта. Двумя основными методами планирования и координации работ проекта являются PERT (Program Evaluation Review Technique) и метод критического пути.

Вместе с тем важной проблемой управления проектами является задержка проекта. Во многих странах, когда общественный проект задерживается, власти по закону имеют право оштрафовать осуществляющую его компанию. Также и в частных проектах в контракте есть пункт, предусматривающий штраф в случае, если проект завершается позже запланированного времени. Во всех этих случаях, если компания, ответственная за проект, заключила субдоговора с другими фирмами, выполнявшими отдельные виды работ, и эти фирмы внесли свой вклад в задержку проекта, то важно знать, за какую часть штрафа они могли бы нести ответственность.

В то же время возможно дополнительное вознаграждение за досрочное выполнение проекта. В качестве примера можно привести разработку новых высокотехнологичных устройств. Компании обычно борются за то, чтобы их новая продукция оказалась на рынке раньше продукции конкурентов, и, поэтому, обещают бонус своим сотрудникам, если изготовление устройства завершится раньше запланированного времени. Следующий вопрос состоит в том, как разделить этот бонус между сотрудниками, чьими усилиями проект завершился раньше намеченного срока.

Впервые теоретико-игровой подход к анализу обозначенных проблем был предложен в [1]. Этот подход состоит в построении кооперативной игры, связанной с проектной проблемой и рассмотрении ее ядра как соответствующего множества решений. В [2] результаты [1] обобщаются путем рассмотрения произвольной неубывающей функции вознаграждения, а также принятием во внимание того, могут ли работы начинаться раньше своего запланированного времени. В работе [3] рассматривается ситуация, когда проект завершается раньше запланированного времени. Проблема распределения вознаграждения в этом случае сводится к известной по Талмуду проблеме банкротства.

В настоящей статье анализируется как случай задержки, так и случай ускорения проекта. Главным результатом является определение семейства выпуклых кооперативных игр, соответствующих проектной проблеме, зависящих от степени жесткости управления проектом.

ПОНЯТИЕ ПРОЕКТА

Проект – это множество работ с известными взаимосвязями. Эти работы выполняются в течение определенного промежутка времени и направлены на достижение конкретной цели. Пусть N обозначает множество всех работ проекта. Для произвольной работы $i \in N$ пусть P_i обозначает множество всех предшествующих работ, т. е. тех работ, которые должны быть завершены до начала выполнения работы i. Проект может быть определен как пара $(N, \{P_i\}_{i\in N})$. Для произвольной работы $i \in N$ пусть F_i обозначает множество всех следующих за i работ, т. е. тех, для начала выполнения которых, необходимо завершение работы i.

Для произвольного проекта $(N, \{P_i\}_{i\in N})$ путем называется последовательность работ $\{i_1, \dots, i_k\}$, удовлетворяющая следующим условиям: 1) $P_{i_1} = \varnothing$; 2) работа i_j является непосредственным предшественником работы i_{j+1}, т. е. $i_j \in P_{i_{j+1}}$ и $F_{i_j} \cap P_{i_{j+1}} = \varnothing$ для $j = 1, \dots, k-1$; 3) $F_{i_k} = \varnothing$.

Заметим, что проект может быть представлен множеством всех его путей. В дальнейшем мы будем отождествлять проект $(N, \{P_i\}_{i\in N})$ с множеством всех его путей $\{N_1, \dots, N_m\}$. Более того, проект может быть представлен в виде направленного графа, в котором множество дуг соответствует множеству работ. Для того чтобы избежать множественных дуг, в графе вводятся фиктивные работы, не расходующие ни времени, ни ресурсов. Фиктивные работы изображаются штрихованными дугами.

Пример 1. Табл. 1 задает множество работ проекта с соответствующими предшественниками.

Таблица 1

Предшественники работ из примера 1

Работа	Предшественники
A	–
B	–
C	A, B
D	A, B

Здесь $N = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}\}$ – множество работ и $\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ – набор путей, где $N_1 = \{\mathrm{A, C}\}$, $N_2 = \{\mathrm{A, D}\}$, $N_3 = \{\mathrm{B, C}\}$ и $N_4 = \{\mathrm{B, D}\}$. Графическое представление этого проекта приведено на рис. 1.

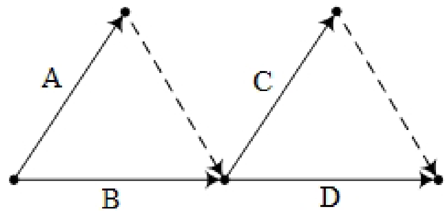

Рис. 1. Графическое представление проекта из табл. 1

Свяжем с проектом $\{N_1, \dots, N_m\}$ функцию продолжительности $l : N \to \mathbb{R}_+$, где $l(i)$ обозначает длительность или продолжительность работы $i \in N$. Определим продолжительность $D(N_\tau, l)$ пути N_τ в соответствии с функцией l как сумму продолжительностей его работ, т. е. $D(N_\tau, l) = \sum_{i\in N_\tau} l(i)$. Продолжительность проекта $D(l)$ в соответствии с функцией l есть максимальная из продолжительностей его путей, т. е. $D(l) = \max_{1\le\tau\le m} D(N_\tau, l)$. Путь N_τ будем называть критическим, если его продолжительность равна продолжительности проекта, т. е. $D(N_\tau, l) = D(l)$.

Введем в рассмотрение функцию $p: N \to \mathbb{R}_+$, представляющую запланированное или оцениваемое время выполнения работ и функцию $r: N \to \mathbb{R}_+$, представляющую реальное время выполнения работ после завершения проекта. Определим функцию задержки $d: N \to \mathbb{R}_+$ как $d(i) = (r(i) - p(i))_+$, где $d(i) = (r(i) - p(i))_+ := \max\{r(i) - p(i), 0\}$ обозначает неотрицательную часть разности $r(i) - p(i)$, т. е. $d(i)$ есть задержка работы i. Аналогично, определим функцию досрочного завершения $e: N \to \mathbb{R}_+$ как $e(i) = (p(i) - r(i))_+$, т. е. $e(i)$ есть время, на которое работа i завершилась раньше запланированного срока. Пусть $\mathcal{D} = \{i \in N \mid d(i) > 0\}$ и $\mathcal{E} = \{i \in N \mid e(i) > 0\}$ обозначают множества просроченных и выполненных досрочно работ соответственно.

КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ

Кооперативной игрой в форме характеристической функции называется пара (N, v), где N – конечное множество игроков, а $v: 2^N \to \mathbb{R}$ – характеристическая функция, сопоставляющая каждой коалиции, т. е. подмножеству $S \subseteq N$, действительное число $v(S)$, причем $v(\varnothing) = 0$. В общем случае, $v(S)$ представляет собой совместную выплату, которую может получить коалиция S, если ее члены решат объединиться.

Кооперативная игра может отражать расходы или вознаграждения. Игра, отражающая расходы, обозначается отображением c, тогда как игра, отражающая вознаграждения, обозначается отображением v.

Ядро игры (N, v) определяется как

$$\mathrm{Core}(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i \in N} x_i = v(N), \right.$$
$$\left. \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \ \forall S \in 2^N \setminus \varnothing \right\},$$

т. е. ядро является множеством распределений $v(N)$, против которых не может обоснованно возражать ни одна из коалиций. Важным подклассом игр с непустым ядром является класс выпуклых игр (см. [4]). Игра (N, v) называется выпуклой, если $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$ для любых $S, T \subseteq N$.

Ядро игры (N, c) определяется как

$$\mathrm{Core}(c) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i \in N} x_i = c(N), \right.$$
$$\left. \sum_{i \in S} x_i \leq c(S) \ \forall S \in 2^N \setminus \varnothing \right\},$$

и эквивалентом выпуклой игры для игры расходов является вогнутая игра. Игра (N, c) называется вогнутой, если $c(S) + c(T) \geq$ $\geq c(S \cup T) + c(S \cap T)$ для любых $S, T \subseteq N$.

Проблема банкротства (bankruptcy problem) определяется тройкой (N, E, c), где $N = \{1, \ldots, n\}$ – множество игроков, $E \geq 0$ – имущество, которое должно быть разделено между игроками, а $c \in \mathbb{R}_+^N$ – вектор требований игроков, причем $\sum_{i \in N} c_i \geq E$. Соответствующая кооперативная игра $(N, v_{E,c})$ определяется как

$$v_{E,c}(S) = \left(E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i \right)_+$$

для всех $S \subseteq N$. Как показано в [5], игра $(N, v_{E,c})$ является выпуклой.

Проблема налогообложения (taxation problem) может рассматриваться как двойственная к проблеме банкротства. Проблема налогообложения определяется тройкой (N, E, c), где $N = \{1, \ldots, n\}$ – множество игроков, $E \geq 0$ – налог, который должен быть собран с игроков, а $c \in \mathbb{R}_+^N$ – вектор платежеспособностей игроков, причем $\sum_{i \in N} c_i \geq E$. Соответствующая кооперативная игра расходов $(N, c_{E,c})$ определяется как

$$c_{E,c}(S) = \min\left\{ E, \sum_{i \in S} c_i \right\}$$

для всех $S \subseteq N$. Как показано в [6], игра $(N, c_{E,c})$ является вогнутой.

ПРОЕКТНАЯ ПРОБЛЕМА

Проектная проблема возникает тогда, когда реальное время выполнения работ отличается от запланированного, что приводит к задержке или ускорению проекта и связанным с этим штрафами или вознаграждениями. Будем считать, что вознаграждение (штраф) равно времени, на которое проект был выполнен досрочного (просрочен). Таким образом, проектная проблема может быть описана тройкой $(\{N_1,\ldots,N_m\}, p, r)$.

Пусть дана проектная проблема $(\{N_1,\ldots,N_m\}, p, r)$. Предположим, что все работы, выполненные досрочно, на самом деле завершились по плану, т. е. функция $\max\{p,r\}$ задает реальное время выполнения работ после завершения проекта. Тогда разность $D(\max\{p,r\}) - D(p)$ определяет максимальную сумму, на которую могут быть оштрафованы все просроченные работы. Простейший способ задания вектора $b \in \mathbb{R}_+^N$ максимальных индивидуальных ответственностей работ проекта состоит в том, чтобы положить $b_i = d(i)$ для каждой работы $i \in N$. Однако, такой подход неадекватен, поскольку любая работа $i \in \mathcal{D}$ не может быть оштрафована больше, чем на неотрицательную часть разности между максимальной продолжительностью пути, содержащем i, в соответствии с функцией $\max\{p,r\}$ и плановой продолжительностью проекта. Поэтому определим вектор b следующим образом:

$$b_i = \max_{\tau:N_\tau \ni i} \min\{d(i), (D(N_\tau, \max\{p,r\}) - D(p))_+\}$$

для всех $i \in N$. Покажем, что

$$\sum_{i\in N} b_i \geq D(\max\{p,r\}) - D(p). \tag{1}$$

Пусть N_τ – критический путь проекта в соответствии с функцией $\max\{p,r\}$. Тогда

$$\sum_{i\in N} b_i \geq \sum_{i\in N_\tau} b_i =$$

$$= \sum_{i\in N_\tau} \min\{d(i), D(N_\tau, \max\{p,r\}) - D(p)\} \geq$$

$$\geq \min\left\{\sum_{i\in N_\tau} d(i), D(N_\tau, \max\{p,r\}) - D(p)\right\} =$$

$$= \min\{D(N_\tau, \max\{p,r\}) - D(N_\tau, p),$$

$$D(N_\tau, \max\{p,r\}) - D(p)\} =$$

$$= D(N_\tau, \max\{p,r\}) - D(p) =$$

$$= D(\max\{p,r\}) - D(p).$$

Предположим теперь, что все просроченные работы на самом деле завершились по плану, т. е. функция $\min\{p,r\}$ задает реальное время выполнения работ после завершения проекта. Тогда разность $D(p) - D(\min\{p,r\})$ определяет максимальное возможное вознаграждение всех работ, выполненных досрочно. Простейший способ задания вектора $f \in \mathbb{R}_+^N$ максимальных индивидуальных вознаграждений работ проекта состоит в том, чтобы положить $f_i = e(i)$ для каждой работы $i \in N$. Однако, такой подход снова неадекватен, так как любая работа $i \in \mathcal{E}$ не может получить больше, чем неотрицательная часть разности между максимальной плановой продолжительностью пути, содержащем i, и продолжительностью проекта в соответствии с функцией $\min\{p,r\}$. Поэтому определим вектор f следующим образом:

$$f_i = \max_{\tau:N_\tau \ni i} \min\{e(i), (D(N_\tau, p) - D(\min\{p,r\}))_+\}$$

для всех $i \in N$. Покажем, что

$$\sum_{i\in N} f_i \geq D(p) - D(\min\{p,r\}). \tag{2}$$

Пусть N_τ – критический путь проекта в соответствии с функцией p. Тогда

$$\sum_{i\in N} f_i \geq \sum_{i\in N_\tau} f_i =$$

$$= \sum_{i\in N_\tau} \min\{e(i), D(N_\tau, p) - D(\min\{p,r\})\} \geq$$

$$\geq \min\left\{\sum_{i\in N_\tau} e(i), D(N_\tau, p) - D(\min\{p,r\})\right\} =$$

$$= \min\{D(N_\tau, p) - D(N_\tau, \min\{p,r\}),$$

$$D(N_\tau, p) - D(\min\{p,r\})\} =$$

$$= D(N_\tau, p) - D(\min\{p,r\}) =$$

$$= D(p) - D(\min\{p,r\}).$$

Определим семейство кооперативных проектных игр, соответствующих проектной проблеме, в которых множеством игроков является множество работ.

Рассмотрим сначала случай, когда $D(p) \leq D(r)$. В этом случае просроченные работы должны быть оштрафованы как минимум на величину $D(r) - D(p)$. Вспомним, что $D(\max\{p,r\}) - D(p)$ – максимальная величина штрафа. Разность между этими величинами $D(\max\{p,r\}) - D(r)$ является вкладом работ, завершившихся досрочно, в уменьшение общей задержки проекта. С другой стороны, $D(p)-D(\min\{p,r\})$ есть максимальное возможное вознаграждение для работ, завершившихся досрочно. Таким образом, в лучшем случае работы, завершившиеся досрочно, могут получить вознаграждение равное

$$E := \min\{D(p)-D(\min\{p,r\}),\ D(\max\{p,r\})-D(r)\}.$$

Генеральный менеджер проекта вправе решить, какую часть этого вознаграждения должны дополнительно компенсировать просроченные работы. Пусть $\alpha\in[0,1]$ обозначает эту часть. Тогда величина $C(\alpha):=\alpha E + D(r)-D(p)$ составляет итоговый штраф просроченных работ. Вспоминая (1), имеем

$$\sum_{i\in N} b_i \ge D(\max\{p,r\})-D(p)\ge C(\alpha).$$

Для того чтобы распределить штраф $C(\alpha)$ между просроченными работами, рассмотрим проблему налогообложения $(N, C(\alpha), b)$. Соответствующая кооперативная игра $(N, c_{C(\alpha),b})$ расходов определяется как

$$c_{C(\alpha),b}(S)=\min\left\{C(\alpha), \sum_{i\in S} b_i\right\}$$

для всех $S\subseteq N$.

Поскольку $b_i = 0$ для каждой работы $i\in N\setminus\mathcal{D}$, имеем $c_{C(\alpha),b}(S\cup\{i\}) = c_{C(\alpha),b}(S)$ для каждой работы $i\in N\setminus\mathcal{D}$, и поэтому $x_i=0$ для всех $x\in \mathrm{Core}(c_{C(\alpha),b})$ и $i\in N\setminus\mathcal{D}$, т. е. только просроченные работы могут быть оштрафованы.

Для того чтобы разделить вознаграждение E между работами, завершившимися досрочно, рассмотрим проблему банкротства (N, E, f). Соответствующая кооперативная игра $(N, v_{E,f})$ определяется как

$$v_{E,f}(S)=\left(E-\sum_{i\in N\setminus S} f_i\right)_+$$

для всех $S\subseteq N$.

Определим, наконец, соответствующую проектную игру (N, u_α^-) как

$$u_\alpha^-(S)=\alpha v_{E,f}(S) - c_{C(\alpha),b}(S)$$

для всех $S\subseteq N$. Заметим, что $u_\alpha^-(N) = D(p)-D(r)$.

Теорема 1. *Игра (N,u_α^-) является выпуклой для всех $\alpha\in[0,1]$. Более того, $x_i=0$ для всех $x\in\mathrm{Core}(u_0^-)$ и $i\in N\setminus\mathcal{D}$.*

Доказательство. Пусть $\alpha\in[0,1]$. Поскольку игра $(N, v_{E,f})$ является выпуклой, а игра $(N, c_{C(\alpha),b})$ – вогнутой, игра (N,u_α^-) выпукла. Второе утверждение теоремы следует из равенства $u_0^- = -c_{C(0),b}$.

Заметим, что если $D(p)=D(r)$, то $u_0^-=0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $D(p)>D(r)$. В этом случае досрочно завершенные работы должны получить как минимум вознаграждение равное $D(p)-D(r)$. Вспомним, что величина $D(p)-D(\min\{p,r\})$ есть максимальное вознаграждение, которое могут получить досрочно завершенные работы. Разность $D(r)-D(\min\{p,r\})$ между этими величинами есть вклад просроченных работ в уменьшение общего ускорения проекта. С другой стороны, $D(\max\{p,r\})-D(p)$ есть максимальная величина, на которую могут быть оштрафованы просроченные работы. Таким образом, в худшем случае просроченные работы могут быть оштрафованы на величину $H:=\min\{D(\max\{p,r\})-D(p), D(r)-D(\min\{p,r\})\}$. Генеральный менеджер проекта вновь вправе решить, на какую часть этой величины просроченные работы должны быть оштрафованы. Пусть $\alpha\in[0,1]$ обозначает эту часть. Тогда величина $G(\alpha):=\alpha H + D(p)-D(r)$ составляет итоговое вознаграждение завершившихся досрочно работ. Вспоминая (2), имеем

$$\sum_{i\in N} f_i \ge D(p)-D(\min\{p,r\})\ge G(\alpha).$$

Для распределения вознаграждения $G(\alpha)$ среди завершившихся досрочно работ рассмотрим проблему банкротства $(N, G(\alpha), f)$. Соответствующая кооперативная игра $(N, v_{G(\alpha),f})$ определяется как

$$v_{G(\alpha),f}(S)=\left(G(\alpha)-\sum_{i\in N\setminus S} f_i\right)_+$$

для всех $S\subseteq N$.

Поскольку $f_i=0$ для каждой работы $i\in N\setminus\mathcal{E}$, имеем $v_{G(\alpha),f}(S\cup\{i\}) = v_{G(\alpha),f}(S)$ для каждой работы $i\in N\setminus\mathcal{E}$, и поэтому $x_i=0$ для всех $x\in\mathrm{Core}(v_{G(\alpha),f})$ и $i\in N\setminus\mathcal{E}$, т. е. вознаграждение могут получить только работы, завершившиеся досрочно.

Для того чтобы разделить штраф H среди просроченных работ, рассмотрим проблему налогообложения (N,H,b). Соответствующая игра расходов $(N,c_{H,b})$ определяется как

$$c_{H,b}(S)=\min\left\{H,\sum_{i\in S}b_i\right\}$$

для всех $S\subseteq N$.

Определим, наконец, соответствующую проектную игру (N,u_α^+) как

$$u_\alpha^+(S)=v_{G(\alpha),f}(S)-\alpha c_{H,b}(S)$$

для всех $S\subseteq N$. Заметим, что $u_\alpha^+(N)=D(p)-D(r)$.

Теорема 2. *Игра* (N,u_α^+) *является выпуклой для всех* $\alpha\in[0,1]$. *Более того,* $x_i=0$ *для всех* $x\in\mathrm{Core}(u_0^+)$ *и* $i\in N\setminus\mathcal{E}$.

Доказательство. Пусть $\alpha\in[0,1]$. Поскольку игра $(N,v_{G(\alpha),f})$ является выпуклой, а игра $(N,c_{H,b})$ – вогнутой, игра (N,u_α^+) выпукла. Второе утверждение теоремы следует из равенства $u_0^+=v_{G(0),f}$.

Пример 2. Рассмотрим проект из примера 1. Пусть плановое время $p:N\to\mathbb{R}_+$ задано как $p(\mathrm{A})=2$, $p(\mathrm{B})=3$, $p(\mathrm{C})=15$ и $p(\mathrm{D})=13$, и пусть реальное время $r:N\to\mathbb{R}_+$ задано как $r(\mathrm{A})=9$, $r(\mathrm{B})=5$, $r(\mathrm{C})=11$ и $r(\mathrm{D})=12$. Рассмотрим проектную проблему $(\{N_1,N_2,N_3,N_4\},p,r)$. В табл. 2 представлены длительности путей проекта в соответствии с различными функциями продолжительности.

Здесь $D(p)=18$ и $D(r)=21$. Поэтому задержка проекта составляет 3 единицы. Кроме того, $d(\mathrm{A})=7$, $d(\mathrm{B})=2$, $d(\mathrm{C})=0$ и $d(\mathrm{D})=0$; $e(\mathrm{A})=0$, $e(\mathrm{B})=0$, $e(\mathrm{C})=4$ и $e(D)=1$; $\mathcal{D}=\{\mathrm{A},\mathrm{B}\}$ и $\mathcal{E}=\{\mathrm{C},\mathrm{D}\}$.

Вычислим компоненты вектора $b\in\mathbb{R}_+^4$.

$$\begin{aligned}b_1&=\max\{\min\{d(\mathrm{A}),(D(\{\mathrm{A},\mathrm{C}\},\\&\qquad\max\{p,r\})-D(p))_+\},\\&\quad\min\{d(\mathrm{A}),(D(\{\mathrm{A},\mathrm{D}\},\\&\qquad\max\{p,r\})-D(p))_+\}\}=\\&=\max\{\min\{7,(24-18)_+\},\\&\quad\min\{7,(22-18)_+\}\}=\\&=\max\{\min\{7,6\},\min\{7,4\}\}=\\&=\max\{6,4\}=6,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_2&=\max\{\min\{d(\mathrm{B}),(D(\{\mathrm{B},\mathrm{C}\},\\&\qquad\max\{p,r\})-D(p))_+\},\\&\quad\min\{d(\mathrm{B}),(D(\{\mathrm{B},\mathrm{D}\},\\&\qquad\max\{p,r\})-D(p))_+\}\}=\\&=\max\{\min\{2,(20-18)_+\},\\&\quad\min\{2,(18-18)_+\}\}=\\&=\max\{\min\{2,2\},\min\{2,0\}\}=\\&=\max\{2,0\}=2,\end{aligned}$$

$$b_3=b_4=0.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}E&=\min\{D(p)-D(\min\{p,r\}),\\&\quad D(\max\{p,r\})-D(r)\}=\\&=\min\{18-15,24-21\}=\min\{3,3\}=3.\end{aligned}$$

Пусть $\alpha\in[0,1]$. Тогда $C(\alpha)=3\alpha+3$ есть суммарный штраф, который должны выплатить совместно работы A и B, и

$$c_{C(\alpha),b}(\{\mathrm{A}\})=\min\{3\alpha+3,6\}=3\alpha+3,$$

$$c_{C(\alpha),b}(\{\mathrm{B}\})=\min\{3\alpha+3,2\}=2.$$

Значения $c_{C(\alpha),b}(S)$ для всех коалиций $\varnothing\neq S\subseteq N$ приведены в табл. 3.

Далее разделим вознаграждение $E=3$ между завершенными досрочно работами C и D. Для этого необходимо найти компоненты f_3 и f_4 вектора $f\in\mathbb{R}_+^4$ $(f_1=f_2=0)$.

Таблица 2

Продолжительности путей проекта из примера 2

N_τ	$D(N_\tau,p)$	$D(N_\tau,r)$	$D(N_\tau,\max\{p,r\})$	$D(N_\tau,\min\{p,r\})$
AC	17	20	24	13
AD	15	21	22	14
BC	18	16	20	14
BD	16	17	18	15

Таблица 3

Значения функции $c_{C(\alpha),b}$ из примера 2

S	{A}	{B}	{C}	{D}	{A,B}	{A,C}	{A,D}	{B,C}	{B,D}	{C,D}
$c_{C(\alpha),b}(S)$	$3\alpha+3$	2	0	0	$3\alpha+3$	$3\alpha+3$	$3\alpha+3$	2	2	0
S	{A,B,C}	{A,B,D}	{A,C,D}	{B,C,D}	N					
$c_{C(\alpha),b}(S)$	$3\alpha+3$	$3\alpha+3$	$3\alpha+3$	2	$3\alpha+3$					

Таблица 4

Значения функции $v_{E,f}$ из примера 2

S	{A}	{B}	{C}	{D}	{A,B}	{A,C}	{A,D}	{B,C}	{B,D}	{C,D}
$v_{E,f}(S)$	0	0	2	0	0	2	0	2	1	3
S	{A,B,C}	{A,B,D}	{A,C,D}	{B,C,D}	N					
$v_{E,f}(S)$	2	0	3	3	3					

Таблица 5

Значения функции u_α^- из примера 2

S	{A}	{B}	{C}	{D}	{A,B}	{A,C}	{A,D}	{B,C}	{B,D}	{C,D}
$u_\alpha^-(S)$	$-3\alpha-3$	-2	2α	0	$-3\alpha-3$	$-\alpha-3$	$-3\alpha-3$	$2\alpha-2$	$\alpha-2$	3α
S	{A,B,C}	{A,B,D}	{A,C,D}	{B,C,D}	N					
$u_\alpha^-(S)$	$-\alpha-3$	$-3\alpha-3$	-3	$3\alpha-2$	-3					

$$f_3 = \max\{\min\{e(\mathrm{C}),(D(\{\mathrm{A},\mathrm{C}\},p)- -D(\min\{p,r\}))_+\}, \min\{e(\mathrm{C}),(D(\{\mathrm{B},\mathrm{C}\},p)- -D(\min\{p,r\}))_+\}\} =$$

$$= \max\{\min\{4,(17-15)_+\}, \min\{4,(18-15)_+\}\} = = \max\{\min\{4,2\},\min\{4,3\}\} = = \max\{2,3\} = 3,$$

$$f_4 = \max\{\min\{e(\mathrm{D}),(D(\{\mathrm{A},\mathrm{D}\},p)- -D(\min\{p,r\}))_+\}, \min\{e(\mathrm{D}),(D(\{\mathrm{B},\mathrm{D}\},p)- -D(\min\{p,r\}))_+\}\} =$$

$$= \max\{\min\{1,(15-15)_+\}, \min\{1,(16-15)_+\}\} = = \max\{\min\{1,0\},\min\{1,1\}\} = = \max\{0,1\} = 1.$$

Тогда имеем $v_{E,f}(\{\mathrm{C}\}) = (3-1)_+ = 2$, $v_{E,f}(\{\mathrm{D}\}) = (3-3)_+ = 0$. Значения $v_{E,f}(S)$ для всех коалиций $\varnothing \neq S \subseteq N$ приведены в табл. 4.

Наконец, в табл. 5 приведены значения функции $u_\alpha^- = \alpha v_{E,f} - c_{C(\alpha),b}$.

Легко видеть, что ядро игры (N, u_α^-) есть

$$\mathrm{Core}(u_\alpha^-) = \mathrm{conv}\{(-3\alpha-1,-2,2\alpha,\alpha), (-3\alpha-1,-2,3\alpha,0), (-3\alpha-3,0,2\alpha,\alpha), (-3\alpha-3,0,3\alpha,0)\}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен теоретико-игровой подход к задаче распределения штрафов и вознаграждений в проектах. В рамках этого подхода указанная проблема сведена к известным проблемам банкротства и налогообложения, что позволяет построить семейство соответствующих выпуклых кооперативных игр. Последнее обстоятельство гарантирует наличие справедливых распределений штрафов и вознаграждений между работами проекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Estévez-Fernández A.* Project games / A. Estévez-Fernández, P. Borm, H. Hamers // International Journal of Game Theory. – 2007. – Vol. 36., No. 2. – P. 149–176.

2. *Estévez-Fernández A.* A game theoretical approach to sharing penalties and rewards in projects / A. Estévez-Fernández // European Journal of Operational Research. – 2012. – Vol. 216., No. 3. – P. 647–657.

3. *Копытин А. В.* О распределении вознаграждений в проектах / А. В. Копытин, Д. И. Соломатин, Е. А. Копытина // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – Воронеж, 2016. – № 1. – С. 72–76.

4. *Shapley L. S.* Cores of convex games / L. S. Shapley // International Journal of Game Theory. – 1971. – Vol. 1., No. 1. – P. 11–26.

5. *Curiel I. J.* Bankruptcy games / I. J. Curiel, M. Maschler, S. Tijs // Zeitschrift für Operations Research. – 1987. – Vol. 31., No. 5. – P. 143–159.

6. *Branzêi R.* Two approaches to the problem of sharing delay costs in joint projects / R. Branzêi, G. Ferrari, V. Fragnelli, S. Tijs // Annals of Operations Research. – 2002. – Vol. 109., No. 1. – P. 359–374.

Копытин А. В. – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных технологий управления, факультет компьютерных наук, Воронежский гос-ударственный университет.
E-mail: alexkopytin@gmail.com

Kopytin A. V. – Ph. D. of Physical and Mathematical Sciences, Associate Pro-fessor, Department of Information Technologies in Management, Computer Sciences Faculty, Voronezh State University.
E-mail: alexkopytin@gmail.com

Соломатин Д. И. – старший преподаватель кафедры программирования и информационных технологий, факультет компьютерных наук, Воронеж-ский государственный университет.
E-mail: solomatin@cs.vsu.ru

Solomatin D. I. – Assistant Professor, Department of Programming and In-formation Technology, Computer Sciences Faculty, Voronezh State University.
E-mail: solomatin@cs.vsu.ru

Копытина Е. А. – магистрант кафедры информационных технологий управления, факультет компьютерных наук, Воронежский государствен-ный университет.
E-mail: zhemkaterina@yandex.ru

Kopytina E. A. – Postgraduate Student, Department of Information Technolo-gies in Management, Computer Sciences Faculty, Voronezh State University.
E-mail: zhemkaterina@yandex.ru