УДК 517.9

ВЛИЯНИЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО СЛУЧАЙНОГО ШУМА НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В. Г. Задорожний

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 27.11.2016 г.

Аннотация. Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений, мультипликативно возмущенная случайным шумом. Получены формулы для математического ожидания и корреляционной функции решения. Открыт новый факт: Неустойчивая по Ляпунову линейная система при мультипликативном возмущении может стать асимптотически устойчивой в среднем и устойчивая линейная система при мультипликативном возмущении может быть неустойчивой в среднем. Приведены соответствующие примеры.
Ключевые слова: стабилизация систем, моментные функции, вариационная производная, мультипликативно возмущенные системы, гауссов случайный шум, устойчивые в среднем решения, устойчивость в широком смысле.
Annotation. We consider a linear system of differential equations perturbed by a multiplicative random noise. The formulas for the mathematical expectation and correlation functions of solutions be find. A new fact open: according to Lyapunov unstable linear system with multiplicative disturbance can be asymptotically stable average and stable linear system with multiplicative perturbend may be unstable on average. The appropriate examples are given.
Keywords: stabilization systems, moment functions, variational derivative, multiplicative perturbed systems Gaussian random noise, the average sustainable solutions, sustainability in a broad sense.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $T=[t_0,\infty)\subset\mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел, $\mathbb{C}^n$ – комплексное n-мерное векторное пространство со скалярным произведением $\langle x,y\rangle$ и нормой $\|x\|=\langle x,x\rangle^{0,5}$.

Изучается линейное векторное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon_1(t)Ax+\varepsilon_2(t)f(t) \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(t_0)=x_0, \quad (2)$$

где $t\in T$, $x:T\to\mathbb{R}^n$ – искомая функция, $f:T\to\mathbb{R}^n$ заданная векторная функция, A заданная вещественная матрица размера $n\times n$, $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ – случайные процессы (зависимость от случайного события в записи не отражается), $x_0\in\mathbb{R}^n$ случайный вектор. Уравнение (1) называется *уравнением, мультипликативно возмущенным случайным шумом.*

Пусть $U(T)$ – банахово пространство функций $u:T\to\mathbb{R}$. Характеристическим функционалом [1, стр. 30] процессов $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ называется функционал

$$\psi(u(\cdot),v(\cdot))=$$
$$=M\left(\exp\left(i\int_T(\varepsilon_1(s)u(s)+\varepsilon_2(s)v(s))ds\right)\right),$$

где i – мнимая единица, M – знак математического ожидания по функции распределения процессов $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ и $u\in U(T)$, $v\in U(T)$, реализации случайных процессов $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ должны лежать в сопряженном пространстве $U^*(T)$. Предполагается, что характеристический функционал ψ известен.

Для практических задач важно знать ответы на следующие вопросы: Пусть спектр матрицы A лежит слева от мнимой оси (т.е. невозмущенная $(\varepsilon_1(t)=1)$ детерминированная система асимптотически устойчива). Может ли возмущенная система (1) быть неустойчивой? Если да, то при какой интенсивности шума? Пусть спектр матрицы A лежит справа от мнимой оси (т. е. невозмущенная детерминированная система неустойчива). Может ли мультипликативно возмущенная система (1) быть устойчивой (асимптотически устойчивой)? Если да, то при какой интенсивности шума? Для стохастических систем дифференциальных уравнений эти вопросы рассматривались, например, в [2], [3], [4, стр. 280]. В [5] показывается, что при $n=1$ асимптотически устойчивая система может вследствие случайного шума стать неустойчивой. Ответы на эти вопросы можно получить, анализируя моментные функции решений уравнения. Иногда задачу нахождения моментных функций можно свести к детерминированному дифференциальному уравнению с обычной и вариационной производными [1], [6]. Для некоторых задач удалось найти явные формулы для моментных функций решения [1], [7]. Периодические в среднем решения рассмотрены в [8].

В этой статье находятся формулы для первых двух моментных функций решения задачи (1), (2) и на их основе даются ответы на поставленные вопросы.

В дальнейшем мы используем понятие вариационной производной. Напомним ее определение [1, стр. 13]. Пусть пространство суммируемых с квадратом на T функций $L_2(T)$ плотно в $U(T)$, $y:U(T)\to\mathbb{C}^n$, $h(\cdot)$ – приращение переменной $u(\cdot)$. Если $y(u(\cdot)+h(\cdot))-y(u(\cdot))=\int_T \varphi(t,u(\cdot))h(t)dt+o(h(\cdot))$,

где интеграл (Лебега) является линейным ограниченным на $U(T)$ оператором по $h(\cdot)$, $o(h(\cdot))$ – бесконечно малая высшего порядка относительно $h(\cdot)$, то $\varphi:T\times U(T)\to\mathbb{C}^n$ называется вариационной производной от y в точке $u(\cdot)$ и обозначается $\frac{\delta y(u)}{\delta u(t)}$. Если $U(T)$ – пространство векторных функций, то определение вариационной производной вполне аналогично. Техника вариационного дифференцирования изложена в [1].

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ ЗАДАЧА

Иногда функции $u(\cdot)$ будем обозначать просто u. Введем обозначение $e(u,v)=$ $=\exp\left(i\int_T(\varepsilon_1(s)u(s)+\varepsilon_2(s)v(s))ds\right)$. Умножим (1) и (2) на $e(u,v)$ и вычислим математическое ожидание полученных выражений по функции распределения для ε_1, ε_2, x_0, получим

$$M\left(\frac{dx}{dt}e(u,v)\right)=M(\varepsilon_1(t)Axe(u,v))+ \\ +M(\varepsilon_2(t)f(t)e(u,v)), \tag{3}$$

$$M(x(t_0)e(u,v))=M(x_0e(u,v)). \tag{4}$$

Введем отображение $y=y(t,u,v)=$ $=M(x(t)e(u,v))$. Отметим, что

$$y(t,0,0)=M(x(t)), \tag{5}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=M\left(\frac{dx}{dt}e(u,v)\right),\ \frac{\delta_p\psi}{\delta v(t)}=M(i\varepsilon_2(t)e(u,v)),$$

$$\frac{\delta_p y}{\delta u(t)}=M(i\varepsilon_1(t)xe(u,v)),$$

где, например, $\frac{\delta_p\psi}{\delta v(t)}$ обозначает частную вариационную производную по переменной v. Тогда (3), (4) можно записать в виде

$$\frac{\partial y}{\partial t}=-iA\frac{\delta_p y}{\delta u(t)}-if(t)\frac{\delta_p\psi}{\delta v(t)}, \tag{6}$$

$$y(t_0,u,v)=M(x_0e(u,v)).$$

Будем предполагать, что x_0 не зависит от $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$. Тогда

$$y(t_0,u,v)=M(x_0)M(e(u,v))=M(x_0)\psi(u,v). \tag{7}$$

Формально получено детерминированное дифференциальное уравнение (6) первого порядка с обычной и вариационной производными и детерминированным начальным условием (7). Ввиду (5), естественным является следующее

Определение. Математическим ожиданием $M(x(t))$ решения задачи (1), (2) называется $y(t,0,0)$, где y – решение задачи (6), (7) в некоторой окрестности точки с координатами $u=0$, $v=0$.

2. ОПЕРАТОР $U(t,s)$

Пусть $\chi(s,t,\tau)=\chi(\tau)$ – функция, равная $sign(\tau-s)$ при τ принадлежащем отрезку $[\min(s,t),\ \max(s,t)]$ и равная нулю в противном случае, E – единичная матрица размера $n\times n$, $L(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)$ – пространство матриц размера $n \times n$, $L_1(T)$ – пространство суммируемых на T функций с нормой $\|u\|_1 = \int_T |u(s)|\,ds$. Отметим, что функция χ обладает свойством: $\chi(s,t_1+t_2) = \chi(s,t_1) + \chi(t_1,t_1+t_2)$ при $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Пусть Ω – линейное пространство аналитических отображений $\varphi : L_1(T) \to \mathbb{C}$, разлагающихся в степенной ряд

$$\varphi(u(\cdot)) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_T \ldots \int_T \varphi_k(s_1, s_2, \ldots, s_k) \times$$
$$\times u(s_1)u(s_2)\cdots u(s_k)ds_1 ds_2 \ldots ds_k,$$

где φ_k – симметричные по любым двум переменным функции. Тогда определено матричнозначное отображение $\varphi(u(\cdot)E)$ и справедливы равенства

$$\varphi(u(\cdot)E) = \varphi(u(\cdot))E,$$
$$\frac{\delta}{\delta u(t)}\varphi(u(\cdot)E) = \frac{\delta}{\delta u(t)}\varphi(u(\cdot))E.$$

На пространстве отображений $\varphi(u(\cdot)E)$ определим линейный оператор

$$U(t,s)\varphi(u(\cdot)E) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_T \ldots \int_T \varphi_k(s_1, s_2, \ldots, s_k)(u(s_1)E -$$
$$-i\chi(s,t,s_1)A)(u(s_2)E - i\chi(s,t,s_2)A)\ldots(u(s_k)E -$$
$$-i\chi(s,t,s_k)A)ds_1 ds_2 \ldots ds_k.$$

При фиксированных $u(\cdot)$, t, s это матричный ряд, его сумму будем обозначать $\varphi(u(\cdot)E - i\chi(s,t,\cdot)A)$. Таким образом,

$$U(t,s)\varphi(u(\cdot)E) = \varphi(u(\cdot)E - i\chi(s,t,\cdot)A).$$

Из определения оператора легко получаются следующие свойства:

1. $U(t,t)\varphi(u(\cdot)E) = \varphi(u(\cdot)E) = \varphi(u(\cdot))E$,
2. $U(t,\tau)U(\tau,s) = U(t,s)$,
3. $U(s,t) = U^{-1}(t,s)$,
4. $AU(t,s) = U(t,s)A$,
5. $U(t+\tau,s) = U(t,s)U(t+\tau,t)$.

3. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ

Нужно иметь в виду, что детерминированный случай является частным вариантом рассматриваемой нами задачи, поэтому приходится вводить в рассмотрение аналог матричного дифференциального уравнения и фундаментальной матрицы.

Пусть

$$\varphi(u) = \exp\Big(i\int_T a(s)u(s)ds -$$
$$-\frac{1}{2}\int_T \int_T b(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2)ds_1 ds_2\Big)$$

характеристический функционал гауссова случайного процесса ε. Здесь $a(s) = M(\varepsilon(s))$ – математическое ожидание процесса ε, $b(s_1,s_2) = M(\varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)) - M(\varepsilon(s_1))M(\varepsilon(s_2))$.

Определим матричное отображение

$$Y = U(t,t_0)\varphi(uE).$$

Иногда нужно находить производные отображения Y.

Теорема 1. *Пусть* $u \in L_1(T)$, $\|u\|_1 < r$, $a : T \to R$ *– непрерывная на* T *функция* $|a(t)| \le M_1$, $b : T \times T \to R$ *– равномерно непрерывная ограниченная функция,* $|b(s_1,s_2)| < M_2$, *тогда существует производная* $\frac{\partial Y}{\partial t}$ *и справедливо равенство*

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = Y(a(t)A +$$
$$+i\int_T b(s_1,t)u(s_1)Ads_1 + \int_{t_0}^{t} b(s_1,t)A^2 ds_1). \qquad (8)$$

Доказательство. Пусть Δt – приращение переменной t и $\Delta_t Y$ – соответствующее приращение Y. Учитывая свойства функции χ и определение экспоненты от матрицы, находим

$$\frac{1}{\Delta t}\Delta_t Y = \frac{1}{\Delta t}[U(t+\Delta t,t_0)\varphi(uE) -$$
$$-U(t,t_0)\varphi(uE)] =$$
$$= \frac{1}{\Delta t}[\varphi(uE - i\chi(t_0,t+\Delta t)A) -$$
$$-\varphi(uE - i\chi(t_0,t)A)] =$$
$$= \frac{1}{\Delta t}\Bigg\{\exp\Bigg[i\int_T a(s)(u(s)E - i\chi(t_0,t,s)A -$$
$$-i\chi(t,t+\Delta t,s)A)ds -$$
$$-\frac{1}{2}\int_T\int_T b(s_1,s_2)(u(s_1)E - i\chi(t_0,t,s_1)A -$$
$$-i\chi(t,t+\Delta t,s_1)A)(u(s_2)E - i\chi(t_0,t,s_2)A -$$
$$-i\chi(t,t+\Delta t,s_2)A)ds_1 ds_2\Bigg] -$$

$$-\exp\left[i\int_T a(s)(u(s)E - i\chi(t_0,t,s)A)ds -\right.$$

$$-\frac{1}{2}\int_T\int_T b(s_1,s_2)(u(s_1)E - i\chi(t_0,t,s_1)A)(u(s_2)E -$$

$$\left.\left. - i\chi(t_0,t,s_2)A)ds_1 ds_2\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\varphi(uE - i\chi(t_0,t)A)\left\{\left[\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)Ads +\right.\right.\right.$$

$$+ i\int_T\int_t^{t+\Delta t} b(s_1,s_2)u(s_1)Ads_1 ds_2 +$$

$$+ i\int_{t_0}^{t}\int_t^{t+\Delta t} b(s_1,s_2)A^2 ds_1 ds_2 +$$

$$\left.\left.\left. + \int_t^{t+\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} b(s_1,s_2)A^2 ds_1 ds_2\right) - E\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\varphi(uE - i\chi(t_0,t)A)[\exp W - E] =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}Y[W + o(W)], \tag{9}$$

где

$$W = \int_t^{t+\Delta t} a(s)Ads +$$

$$+ i\int_T\int_t^{t+\Delta t} b(s_1,s_2)u(s_1)Ads_1 ds_2 +$$

$$+ \int_{t_0}^{t}\int_t^{t+\Delta t} b(s_1,s_2)A^2 ds_1 ds_2 +$$

$$+ \int_t^{t+\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} b(s_1,s_2)A^2 ds_1 ds_2.$$

Согласно теореме о среднем значении [9, стр. 113] $\int_t^{t+\Delta t} a(s)Ads = a(c)A\Delta t$, где c – точка из интервала с концами t и $t+\Delta t$. Поскольку a непрерывная функция, то

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} a(s)Ads = a(t)A.$$

Аналогично получаем

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[i\int_T\int_t^{t+\Delta t} b(s_1,s_2)u(s_1)Ads_1 ds_2 +\right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t}\int_t^{t+\Delta t} b(s_1,s_2)A^2 ds_1 ds_2\right] =$$

$$= i\int_T b(s_1,t)u(s_1)Ads_1 + \int_{t_0}^{t} b(s_1,t)A^2 ds_1.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – любое число. Поскольку b равномерно непрерывная функция на $T\times T$, то найдется такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что неравенство $|s-t| < \delta(\varepsilon)$, влечет неравенство $|b(s_1,s) - b(s_1,t)| < \varepsilon$ при всех $s_1 \in T$. Тогда при $0 < |\Delta t| < \delta(\varepsilon)$, $\|u\|_1 < r$ имеем

$$\left\|\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} b(s_1,s_2)A^2 ds_1 - b(s_1,t)A^2\right\}ds_2\right\| =$$

$$= \left\|\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}(b(s_1,s_2) - b(s_1,t))A^2 ds_1\right\}ds_2\right\| \le$$

$$\le \left|\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}|b(s_1,s_2) - b(s_1,t)|\,\|A\|^2 ds_1\right\}ds_2\right| <$$

$$< \varepsilon(t-t_0)\|A\|^2.$$

Аналогично получаем

$$\left\|\int_T\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} b(s_1,s_2)u(s_1)Ads_1 - b(s_1,t)u(s_1)A\right\}ds_2\right\| \le$$

$$\left|\int_T\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}|b(s_1,s_2) - b(s_1,t)|\,|u(s_1)|\,\|A\|ds_1\right\}ds_2\right| <$$

$$< \varepsilon\|A\|\|u\|_1 < \varepsilon\|A\|r,$$

$$\left\|\frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t}\int_t^{t+\Delta t} b(s_1,s_2)A^2 ds_1 ds_2\right\| \le K\|A\|^2|\Delta t| = O(\Delta t),$$

где $O(\Delta t)$ обозначает бесконечно малую одного порядка малости с величиной Δt.

Поскольку ε произвольное положительное число, то из этих оценок следует, что при $\Delta t \to 0$ существует предел

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}W =$$

$$a(t)A + i\int_t b(s_1,t)u(s_1)Ads_1 + \int_{t_0}^{t} b(s_1,t)A^2 ds_1.$$

Устремляя в равенстве (9) Δt к нулю, получаем равенство (8). Теорема доказана.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 существует вариационная производная* $\frac{\delta_p Y}{\delta u(t)}$ *и справедливо равенство*

$$\frac{\delta_p Y}{\delta u(t)} = Y\left(ia(t)E - \int_T b(s_1,t)u(s_1)Eds_1 +\right.$$

$$\left. + i\int_{t_0}^{t} b(t,s_2)Ads_2\right). \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $h \in L_1(T)$ – приращение переменной u. Используя определение матричной экспоненты, находим

$$U(t,t_0)\varphi((u(\cdot)+h(\cdot))E) - U(t,t_0)\varphi(u(\cdot)E) =$$
$$= \varphi((u+h)E - i\chi(t_0,t)A) - \varphi(uE - i\chi(t_0,t)A) =$$
$$= \exp\Bigg[i\int_T a(s)\big((u(s)+h(s))E - i\chi(t_0,t,s)A\big)ds -$$
$$-\frac{1}{2}\int_T\int_T b(s_1,s_2)((u(s_1)+h(s_1))E -$$
$$-i\chi(t_0,t,s_1)A)((u(s_2)+h(s_2))E -$$
$$-i\chi(t_0,t,s_2)A)ds_1ds_2\Bigg] -$$
$$-\exp\Bigg[i\int_T a(s)(u(s)E - i\chi(t_0,t,s)A)ds -$$
$$-\frac{1}{2}\int_T\int_T b(s_1,s_2)(u(s_1)E - i\chi(t_0,t,s_1)A)\times$$
$$\times(u(s_2)E - i\chi(t_0,t,s_2)A)ds_1ds_2\Bigg] =$$
$$= \varphi(uE - i\chi(t_0,t)A)\Bigg[\exp\Bigg(i\int_t a(s)h(s)Eds -$$
$$-\int_T\int_T b(s_1,s_2)u(s_1)h(s_2)Eds_1ds_2 +$$
$$+i\int_T\int_{t_0}^t b(s_1,s_2)h(s_1)Ads_1ds_2 -$$
$$-\frac{1}{2}\int_T\int_T b(s_1,s_2)h(s_1)h(s_2)Eds_1ds_2\Bigg) - E\Bigg] =$$
$$= Y\Bigg[i\int_T a(s)h(s)Eds -$$
$$-\int_T\int_T b(s_1,s_2)u(s_1)h(s_2)Eds_1ds_2 +$$
$$+i\int_T\int_{t_0}^t b(s_1,s_2)h(s_1)Ads_1ds_2 -$$
$$-\frac{1}{2}\int_T\int_T b(s_1,s_2)h(s_1)h(s_2)Eds_1ds_2 + o(h)\Bigg].$$

Далее

$$\left\| i\int_T a(s)h(s)Eds \right\|_1 \le \int_T |a(s)||h(s)|ds \le M_1\|h\|_1,$$
$$\left\| \int_T\int_T b(s_1,s_2)u(s_1)h(s_2)Eds_1ds_2 \right\|_1 \le$$
$$\le \int_T\int_T |b(s_1,s_2)||u(s_1)||h(s_2)|ds_1ds_2 \le M_2 r\|h\|_1,$$
$$\left\| i\int_T\int_{t_0}^t b(s_1,s_2)h(s_1)Ads_1ds_2 \right\|_1 \le$$
$$\le \int_T\int_{t_0}^t |b(s_1,s_2)||h(s_1)|\|A\|ds_1ds_2 \le$$
$$\le M_2\|A\|(t-t_0)\|h\|_1,$$
$$\left\| \frac{1}{2}\int_T\int_T b(s_1,s_2)h(s_2)Eds_1ds_2 \right\|_1 \le \frac{1}{2}M_2\|h\|_1^2.$$

Из этих неравенств следует, что

$$i\int_T a(s)h(s)Eds -$$
$$-\int_T\int_T b(s_1,s_2)u(s_1)h(s_2)Eds_1ds_2 +$$
$$+i\int_T\int_{t_0}^t b(s_1,s_2)h(s_1)Ads_1ds_2$$

является линейным ограниченным на $L_1(T)$ оператором и

$$\frac{1}{2}\int_T\int_T b(s_1,s_2)h(s_1)h(s_2)Eds_1ds_2 + o(h) = o_1(h).$$

Здесь $o_1(h)$ бесконечно малая высшего порядка относительно h. Тогда, согласно определению вариационной производной, справедливо равенство (10). Теорема доказана.

Из этих двух теорем следует

Теорема 3. *В условиях теоремы 1 матричное отображение* $Y = U(t,t_0)\varphi(u(\cdot)E) = \varphi(uE - i\chi(t_0,t)A)$ *является решением матричной задачи Коши*

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = -iA\frac{\delta_p Y}{\delta u(t)}, \qquad (11)$$

$$Y(t_0,u) = \varphi(uE). \qquad (12)$$

Доказательство. Действительно, $Y(t_0,u) = \varphi(uE - i\chi(t_0,t_0)A) = \varphi(uE)$, т. е. условие (12) выполнено. Подстановка (8), (10) в (11), обращает его в равенство. Теорема доказана.

Теорема 4. *Решение* $Y = U(t,t_0)\varphi(u(\cdot)E)$ *задачи (11), (12) единственно в классе аналитических (в некоторой окрестности точки* t_0*) по переменной* t *решений.*

Действительно, пусть Y_1 еще одно решение задачи (11), (12). Рассмотрим $Z = Y_1 - Y$. Отображение Z является решением задачи

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -iA\frac{\delta_p Z}{\delta u(t)},$$
$$Z(t_0, u) = 0.$$

Будем искать решение в виде ряда $Z = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(u)E(t-t_0)^k$. Из начального условия получаем $Z_0 = 0$. Подставим Z в уравнение, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} kZ_k(u)E(t-t_0)^{k-1} = -iA\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\delta Z_k(u)E}{\delta u(t)}(t-t_0)^k.$$

При $t = t_0$ из этого равенства следует $Z_1 = -iA\frac{\delta Z_0}{\delta u(t)} = 0$. Сокращая на $t - t_0$ и полагая $t = t_0$, получаем $Z_2 = -iA\frac{\delta Z_1}{\delta u(t)} = 0$. Продолжая этот процесс далее, получим $Z_k = 0$ при всех k. Следовательно, $Z = 0$ и $Y = Y_1$, что и доказывает единственность решения задачи (10), (11).

4. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ (6), (7)

Используя оператор $U(t,s)$ можно выписать формулу для решения линейного неоднородного векторного уравнения. Приведем соответствующее утверждение применительно к задаче (6), (7).

В задаче (6), (7) переменная v является параметром. Пусть

$$\psi(u,v) = \exp\left(i\int_T [a_1(s)u(s) + a_2(s)v(s)]ds - \right.$$
$$-\frac{1}{2}\int_T\int_T [b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2) +$$
$$+2b_{12}(s_1,s_2)u(s_1)v(s_2) +$$
$$\left.+b_{22}(s_1,s_2)v(s_1)v(s_2)]ds_1 ds_2\right) \quad (13)$$

– характеристический функционал гауссовых случайных процессов ε_1 и ε_2. Здесь $a_1 = M(\varepsilon_1)$, $a_2 = M(\varepsilon_2)$, $b_{11}(s_1,s_2) = M(\varepsilon_1(s_1)\varepsilon_1(s_2)) - M(\varepsilon_1(s_1))M(\varepsilon_1(s_2)), b_{12}(s_1,s_2) = M(\varepsilon_1(s_1)\varepsilon_2(s_2)) - M(\varepsilon_1(s_1))M(\varepsilon_2(s_2)), b_{22}(s_1,s_2) = M(\varepsilon_2(s_1)\varepsilon_2(s_2)) - M(\varepsilon_2(s_1))M(\varepsilon_2(s_2))$.

В задаче (6), (7) переменная v является параметром. Естественно определить

$$U(t,s)\psi(uE,v) = \psi(uE - i\chi(t,s)A, v).$$

Теорема 5. *Пусть выполняются условия:* $u \in L_1(T)$, $\|u\|_1 < r > 0$, a_1, a_2 *– непрерывные ограниченные на* T *функции,* b_{11}, b_{12}, b_{22} *– равномерно непрерывные, ограниченные, симметричные по переменным на* $T \times T$ *функции. Тогда*

$$y = U(t,t_0)\psi(uE,v)M(x_0) -$$
$$-i\int_{t_0}^{t}\frac{\delta}{\delta v(s)}U(s,t)\psi(uE,v)f(s)ds =$$
$$\psi(uE - i\chi(t_0,t)A, v)M(x_0) -$$
$$-i\int_{t_0}^{t}\frac{\delta_p}{\delta v(s)}\psi(uE - i\chi(t,s)A, v)f(s)ds \quad (14)$$

является решением задачи (6), (7).

Доказательство проведем подстановкой (14) в задачу (6), (7).

$$y(t_0,u,v) = U(t_0,t_0)\psi(uE,v)M(x_0) =$$
$$= \psi(u,v)EM(x_0) = \psi(u,v)M(x_0).$$

Используя теорему 1 и равенство (11), находим

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\delta_p}{\delta u(t)}(U(t,t_0)\psi(uE,v))(-iA)M(x_0) -$$
$$-i\frac{\delta_p}{\delta v(t)}U(t,t)\psi(uE,v)f(t) -$$
$$-i\int_{t_0}^{t}\frac{\delta_p^2}{\delta v(s)\delta u(t)}(U(s,t)\psi(uE,v))(-iA)f(s)ds.$$

Далее, по первому свойству оператора $U(s,t)$, $\frac{\delta_p}{\delta v(t)}U(t,t)\psi(uE,v)f(t) = \frac{\delta_p}{\delta v(t)}\psi(u,v)f(t)$ и

$$\frac{\delta_p y}{\delta u(t)} = \frac{\delta_p}{\delta u(t)}(U(t,t_0)\psi(uE,v))M(x_0) -$$
$$-i\int_{t_0}^{t}\frac{\delta_p^2}{\delta v(s)\delta u(t)}(U(s,t)\psi(uE,v))f(s)ds.$$

Матрица A перестановочна с оператором $U(s,t)$, поэтому при подстановке полученных выражений в уравнение (6), получается равенство. Теорема доказана.

Замечание. Формула (14) остается верной, если вместо матрицы A подставить $q(t)A$, где $q: T \to C$ – непрерывная функция.

5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1), (2)

Из предыдущей теоремы легко получаем

Теорема 6. *Пусть в задаче (1), (2) случайные процессы* $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ *заданы характеристическим функционалом (13), матрица* A

постоянна, $f: T \to C^n$ *непрерывно,* x_0 *не зависит от* $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, *тогда*

$$M(x(t)) = \psi(-iA\chi(t_0,t,\cdot),0)M(x_0) -$$

$$-i\int_{t_0}^{t} \frac{\delta_p}{\delta v(s)}\psi(-iA\chi(s,t,\cdot),0)f(s)ds \qquad (15)$$

является математическим ожиданием решения задачи (1), (2).

Доказательство. Согласно определению математического ожидания решения задачи (1), (2) $M(x(t)) = y(t,0,0)$. Полагая в (14) $u=0$, $v=0$ получаем (15). Теорема доказана.

6. СЛУЧАЙ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)$

Теорема 7. *Пусть в условиях теоремы 4 гауссовы случайные процессы* $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ *независимы и заданы характеристическими функционалами* $\varphi_{\varepsilon_1}(u)$, $\varphi_{\varepsilon_2}(v)$, *тогда*

$$M(x(t)) = \varphi_{\varepsilon_1}(-iA\chi(t_0,t,\cdot))M(x_0) +$$

$$+\int_{t_0}^{t} \varphi_{\varepsilon_1}(-iA\varphi(s,t,\cdot))M(\varepsilon_2(s))f(s)ds. \qquad (16)$$

Доказательство. Действительно, при независимых случайных процессах $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ функция b_{12} равна нулю, функционал $\psi(u,v)$ запишется в виде $\psi(u,v) = \varphi_{\varepsilon_1}(u)\varphi_{\varepsilon_2}(v)$, и

$$\psi(-iA\chi(t_0,t,\cdot),0) = \varphi_{\varepsilon_1}(-iA\chi(t_0,t,\cdot)\varphi_{\varepsilon_2}(0) =$$

$$= \varphi_{\varepsilon_1}(-iA\chi(t_0,t,\cdot)).$$

Используя определение характеристического функционала $\varphi_{\varepsilon_2}(v) = M\left(\exp\left(i\int_T \varepsilon_2(s)v(s)ds\right)\right)$ легко находим

$$\frac{\delta\varphi_{\varepsilon_2}(v)}{\delta v(t)}|_{v=0} =$$

$$= M(\exp(i\int_T \varepsilon_2(s)v(s)ds)i\varepsilon_2(t))|_{v=0} =$$

$$= iM(\varepsilon_2(t)).$$

Подставляя эти выражения в (15), получаем (16). Теорема доказана.

Замечание. Хотя формула (16) получена при условиях, что известны характеристические функционалы φ_{ε_1}, φ_{ε_2}, все же для нахождения математического ожидания $M(x(t))$ решения задачи (1), (2) достаточно знать характеристический функционал для ε_1 и лишь математическое ожидание $M(\varepsilon_2(t))$.

Рассмотрим задачу (1), (2) с гауссовым случайным процессом $\varepsilon_1(t)$, заданным характеристическим функционалом

$$\varphi_{\varepsilon_1}(u) = \exp\left(i\int_T M(\varepsilon_1(s))u(s)ds -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int_T\int_T b(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2)ds_1ds_2\right), \qquad (17)$$

где $b(s_1,s_2) = M(\varepsilon_1(s_1)\varepsilon_1(s_2)) - M(\varepsilon_1(s_1))M(\varepsilon_1(s_2))$ – ковариационная функция, и независимым с $\varepsilon_1(t)$ случайным процессом $\varepsilon_2(t)$.

Используя определение функции $\chi(s,t,\cdot)$, находим

$$\varphi_{\varepsilon_1}(-iA\chi(s,t,\cdot)) =$$

$$\exp\left(i\int_T M(\varepsilon_1(\tau))(-iA\chi(s,t,\tau))d\tau -\right.$$

$$-\frac{1}{2}\int_T\int_T b(s_1,s_2)(-A\chi(s,t,s_1)\times$$

$$\left.\times(-iA\chi(s,t,s_2)))ds_1ds_2\right) =$$

$$= \exp\left(i\int_s^t M(\varepsilon_1(\tau))Ad\tau + \frac{1}{2}\int_s^t\int_s^t b(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2\right).$$

Подставляя это выражение в (16), получаем следующий результат.

Теорема 8. *Пусть в задаче (1), (2) случайный процесс* $\varepsilon_1(t)$ *задан характеристическим функционалом (17) и не зависит от* $\varepsilon_2(t)$, *тогда*

$$M(x(t)) = \exp\left(A\int_{t_0}^{t} M(\varepsilon_1(\tau))d\tau +\right.$$

$$\left.+\frac{A^2}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} b(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)M(x_0) +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\exp\left(A\int_s^t M(\varepsilon_1(\tau))d\tau\ +\right.$$

$$\left.+\frac{A^2}{2}\int_s^t\int_s^t b(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)M(\varepsilon_2(s))f(s)ds \qquad (18)$$

является математическим ожиданием решения этой задачи.

7. УСТОЙЧИВОСТЬ В СРЕДНЕМ МУЛЬТИПЛИКАТИВНО ВОМУЩЕННЫХ ГАУССОВЫМ ШУМОМ УРАВНЕНИЙ

Определение [ср. 4, стр. 231]. Решение $x(t,x_0)$ уравнения (1) называется *устойчивым в среднем*, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любого ξ, удовлетворяющего условию $\|M(\xi)\|<\delta(\varepsilon)$, для математического ожидания $M(x(t,\xi))$ выполняется условие

$$\sup_{t\geq 0}\|M(x(t,\xi))-M(x(t,x_0))\|<\varepsilon.$$

Если при этом выполняется условие

$$\|M(x(t,\xi))-M(x(t,x_0))\|\to 0$$

при $t\to+\infty$, то решение $x(t,x_0)$ называется *асимптотически устойчивым в среднем*.

Поскольку разность решений линейного неоднородного уравнения является решением линейного однородного уравнения, то устойчивость (асимптотическая устойчивость) в среднем любого решения неоднородного уравнения (1) равносильна устойчивости (асимптотической устойчивости) в среднем нулевого решения линейного однородного уравнения.

Определение. Уравнение (1) называется *устойчивым (асимптотически устойчивым) в среднем*, если все решения уравнения являются устойчивыми (асимптотически устойчивыми) в среднем.

Также как и в детерминированном случае доказывается, что линейное однородное уравнение устойчиво в среднем тогда и только тогда, когда все его решения ограничены в среднем при $t>0$.

Из (18) получаем признак устойчивости уравнения (1) в среднем

Теорема 9. *Мультипликативно возмущенное гауссовым шумом уравнение (1) устойчиво, асимптотически устойчиво, неустойчиво в среднем тогда и только тогда, когда*

$$\left\|\exp\left(A\int_{t_0}^{t}M(\varepsilon_1(\tau))d\tau+\frac{A^2}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}b(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)\right\| \qquad (19)$$

соответственно, ограничено при $t\in[t_0,\infty)$, *стремится к нулю при* $t\to+\infty$, *неограничено при* $t\in[t_0,\infty)$.

8. ВЛИЯНИЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ГАУССОВА ШУМА НА УСТОЙЧИВОСТЬ УРАВНЕНИЯ

Здесь мы обсудим следующие вопросы для мультипликативно возмущенного гауссовым шумом уравнения (1). Можно ли стабилизировать неустойчивую линейную систему случайным шумом? Может ли гауссов шум сделать асимптотически устойчивую линейную систему неустойчивой? Какой уровень шума может изменить характер устойчивости системы? Случай $M(\varepsilon_1(t))<0$ мало интересен.

1. Сохранение устойчивости. Пусть $\sigma(A)$ обозначает спектр матрицы A.

Теорема 10. *Если* $M(\varepsilon_1(t))>0$, $0\notin\sigma(A)$ *и аргументы всех собственных значений матрицы A лежат в интервале* $(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$, *то мультипликативно возмущенное гауссовым шумом уравнение (1) не является асимптотически устойчивым в среднем (при любой ковариационной функции* $b(s_1,s_2)$ *).*

Доказательство. Для гауссова случайного процесса $\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}b(s_1,s_2)\geq 0$. Матрицы A и A^2 перестановочны и одним преобразованием подобия приводятся к жордановой форме. Поскольку для собственных значений λ матрицы A выполняется условие $-\frac{\pi}{4}<arg\lambda<\frac{\pi}{4}$, то [9, стр. 611] λ^2 является собственным значением матрицы A^2 и $-\frac{\pi}{2}<arg\lambda^2<\frac{\pi}{2}$, т. е. вещественные части всех собственных значений матриц A и A^2 положительны, тогда (19) не стремится к нулю при $t\to+\infty$ и уравнение (1) не является асимптотически устойчивым в среднем. Теорема доказана.

Теорема 11. *Если* $M(\varepsilon_1(t))>0$ *и* $\int_{t_0}^{t}M(\varepsilon_1(s))ds\to+\infty$ *или* $\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}b(s_1,s_2)ds_1ds_2\to+\infty$ *при* $t\to+\infty$ *и аргументы всех собственных значений матрицы A лежат в интервалах* $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$, $(-\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{2})$, *то мультипликативно возмущенное гауссовым шумом уравнение (1) является асимптотически устойчивым в среднем.*

Доказательство. При выполнении условий теоремы аргументы $\arg\lambda^2$ собственных значений матрицы A^2 лежат в интервале $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$, т. е. вещественные части всех собственных значений матриц A и A^2 отрицательны. Тогда при выполнении условий теоремы выражение (19) стремится к нулю при $t \to +\infty$ и уравнение (1) асимптотически устойчиво в среднем. Теорема доказана.

2. Изменение характера устойчивости. Если не выполняются условия последних двух теорем, то характер устойчивости уравнения при мультипликативном возмущении гауссовым шумом при определенных условиях может измениться.

Пример 1. (Изменение асимптотической устойчивости на неустойчивость). Пусть $M(\varepsilon_1(t)) = m > 0, B > 0, b(s_1, s_2) = B(1+(s_1 - s_2)^2)^{-1}$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \ A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Собственными значениями матрицы A являются числа $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$, а $3 \pm 4i$ – собственные значения матрицы A^2,

$$\int_0^t \int_0^t b(s_1, s_2) ds_1 ds_2 = 2Bt - B\ln(1+t^2).$$

При этом $\left\| \exp\left(A\int_{t_0}^t M(\varepsilon_1(\tau)) d\tau \right) \right\| = O(\exp(-2mt))$, а элементы матричной функции $\exp(\frac{A^2}{2}\int_0^t \int_0^t b(s_1, s_2) ds_1 ds_2)$ имеют порядок роста $O\left(\exp\left(3Bt \operatorname{arctg} t - \frac{B}{2}\ln(1+t^2) \right) \right)$. Таким образом, во всяком случае, при $0 < B < \frac{4m}{3\pi}$ характер устойчивости в среднем уравнения (1) не меняется, оно остается асимптотически устойчивым в среднем.

Отметим, что при больших t имеем $\ln(1+t^2) = o(t)$. Тогда при больших t

$$3Bt \operatorname{arctg} t - \frac{B}{2}\ln(1+t^2) > \left(B\pi - \frac{B}{2} \right) t$$

и при $B > \frac{2m}{\pi - 0,5}$ характер устойчивости в среднем уравнения (1) меняется, оно становится неустойчивым в среднем.

Пример 2. (Изменение неустойчивости на асимптотическую устойчивость). Пусть теперь $M(\varepsilon_1(t)) = m > 0, \quad b(s_1, s_2) = B(1+(s_1 - s_2)^2)^{-1}$, $B > 0$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \ A^2 = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Спектр матрицы A образуют числа $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$, а спектром матрицы A^2 являются числа $-8 \pm 6i$. При этом элементы матрицы $\exp(Amt)$ имеют порядок роста $O(\exp(mt))$ и

$$\left\| \exp\left(\frac{A^2}{2} \int_0^t \int_0^t b(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right) \right\| = \\ = O\left(-8\left(Bt \operatorname{arctg} t - \frac{B}{2}\ln(1+t^2) \right) \right).$$

При больших t выполняется неравенство $-8\left(t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) \right) < -7t$. При $B > \frac{m}{7}$ мультипликативно возмущенное гауссовым шумом уравнение (1) становится асимптотически устойчивым в среднем, хотя невозмущенное уравнение является неустойчивым.

Пример 3. (Дифференциальное уравнение второго порядка). Многие результаты хорошо интерпретируются на поведении маятника (дифференциальном уравнении второго порядка).

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = 0.$$

Запишем его в виде системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y, \ \frac{dy}{dt} = -bx - ay. \tag{20}$$

Мультипликативно возмущенная система имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_1(t)y, \ \frac{dy}{dt} = -\varepsilon_1(t)bx - \varepsilon_1(t)ay. \tag{21}$$

Если $a = -2, b = 10$, то $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$ являются характеристическими числами системы уравнений (20), и выводы относительно характера устойчивости в среднем решений системы уравнений, полученные в примере 2, относятся и к системе (21).

Отметим, что дифференциальное уравнение второго порядка, соответствующее системе (21), имеет вид

$$\varepsilon_1(t)\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\varepsilon_1^2(t)a - \frac{d\varepsilon_1(t)}{dt} \right)\frac{dx}{dt} + \varepsilon_1^3(t)bx = 0.$$

Уважаемый Читатель уже говорит: «Условия устойчивости в среднем системы уравнений привлекательны, но если вторая моментная функция решения растет, то от твоей асимптотической устойчивости решений в среднем проку мало». Он абсолютно прав. Поэтому мы займемся нахождением второй моментной функции решения.

9. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ВТОРОЙ МОМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ

Вторая моментная функция характеризует возможный разброс решений, поэтому нужны оценки ее значений. Вторая моментная функция решения уравнения (1) определяет квадратичную форму (например, по переменной $\omega \in \mathbb{C}^n$). Будем следовать предыдущему приему, который позволил найти формулы для математического ожидания решения задачи (1), (2). Умножим уравнение (1) на $\langle x(\tau), \omega\rangle e(u,v)$ и выпишем математическое ожидание полученного равенства

$$M\left(\frac{dx}{dt}\langle x(\tau),\omega\rangle e(u,v)\right) = \\ = M(\varepsilon_1(t)Ax(t)\langle x(\tau),\omega\rangle e(u,v)) + \\ + M(\varepsilon_2(t)f(t)\langle x(\tau),\omega\rangle e(u,v)). \quad (22)$$

Введем отображение

$$z = z(t,\tau,v,\omega) = M(x(t)\langle x(\tau),\omega\rangle e(u,v)).$$

Тогда (формально)

$$\frac{\partial z}{\partial t} = M\left(\frac{dx}{dt}\langle x(\tau),\omega\rangle e(u,v)\right),$$

$$\frac{\delta_p z}{\delta u(t)} = M(i\varepsilon_1(t)x(t)\langle x(\tau),\omega\rangle e(u,v)),$$

$$\frac{\delta_p \langle y(\tau,u,v),\omega\rangle}{\delta v(t)} = M(i\varepsilon_2(t)\langle x(\tau),\omega\rangle e(u,v))$$

(y определено в п. 1) и уравнение (22) можно записать в виде

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -iA\frac{\delta_p z}{\delta u(t)} - \frac{\delta_p\langle y(\tau,u,v),\omega\rangle}{\delta v(t)} f(t). \quad (23)$$

Уравнение (23) имеет вид уравнения (6), однако еще нужно получить начальное условие для этого уравнения. С этой целью, умножим условие (2) на $\langle x(t_0),\omega\rangle e(u,v)$ и вычислим математическое ожидание полученного равенства

$$M(x(t_0)\langle x(t_0),\omega\rangle e(u,v)) = M(x_0\langle x_0,\omega\rangle e(u,v)) = \\ = M(x_0\langle x_0,\omega\rangle)\psi(u,v).$$

Здесь мы воспользовались независимостью x_0 от $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$. Последнее равенство запишем в виде

$$z(t_0,t_0,u,v,\omega) = M(x_0\langle x_0,\omega\rangle)\psi(u,v). \quad (24)$$

Положим в уравнении (23) $\tau = t_0$, получим

$$\frac{\partial z(t,t_0 u,v,\omega)}{\partial t} = -iA\frac{\delta_p z(t,t_0,u,v,\omega)}{\delta u(t)} - \\ -i\frac{\delta_p\langle y(t_0,u,v),\omega\rangle}{\delta v(t)} f(t). \quad (25)$$

Мы получили детерминированную задачу (24), (25) вида задачи (6), (7). Выпишем решение этой задачи по формуле (14)

$$z(t,t_0,u,v,\omega) = \\ \psi(Eu - iA\chi(t_0,t,\cdot),v)M(x_0\langle x_0,\omega\rangle) - \\ -i\int_{t_0}^{t}\frac{\delta_p}{\delta v(s)}\langle y(t_0,Eu - iA\chi(s,t,\cdot),v),\omega\rangle f(s)ds.$$

Рассмотрим квадратичную относительно ω форму

$$\langle z(t,\tau,u,v,\omega),\omega\rangle = \\ = M(\langle x(t),\omega\rangle\langle x(\tau),\omega\rangle e(u,v)). \quad (26)$$

Она симметрично зависит от переменных t, τ. Тогда

$$z(t_0,\tau,u,v,\omega) = \\ = \psi(Eu - iA\chi(t_0,\tau,\cdot),v)M(x_0\langle x_0,\omega\rangle) - \\ -\int_{t_0}^{t}\frac{\delta_p}{\delta v(s)}\langle y(t_0,Eu - \\ -iA\chi(s,t,\cdot),v),\omega\rangle f(s)ds. \quad (27)$$

Уравнения (23) и (27) удобнее записать в виде

$$\left\langle\frac{\partial z(t,\tau,u,\omega)}{\partial t},\omega\right\rangle = \left\langle -iA\frac{\delta_p(t,\tau,u,v,\omega)}{\delta u(t)},\omega\right\rangle - \\ -i\frac{\delta_p\langle y(\tau,u,v),\omega\rangle}{\delta v(t)}\langle f(t),\omega\rangle,$$

$$\langle z(t_0,\tau,u,v,\omega),\omega\rangle = \\ \langle\psi(Eu - iA\chi(t_0,\tau,\cdot),v)M(x_0,\langle x_0,\omega\rangle,\omega\rangle - \\ -i\int_{t_0}^{\tau}\frac{\delta_p}{\delta v(s)}\langle y(t_0,Eu - \\ -iA\chi(s,\tau,\cdot),v),\omega\rangle\langle f(s),\omega\rangle ds. \quad (29)$$

Определение. *Второй моментной функцией решения задачи (1), (2)* называется матрица квадратичной формы (26) при $u=0$, $v=0$, где $\langle z(t,\tau,u,v,\omega),\omega\rangle$ – симметричное по t, τ решение задачи (28), (29).

Таким образом, для нахождения второй моментной функции решения задачи (1), (2) достаточно найти симметричное по t, τ решение детерминированной задачи (28), (29) в некоторой окрестности точки $u=0$, $v=0$.

10. ВТОРАЯ МОМЕНТНАЯ ФУНКЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1), (2)

Теорема 12. *Пусть $\psi(u,v)$ имеет вид (13) и выполняются условия теоремы 4, тогда*

$$\langle z(t,\tau,u,v,\omega),\omega\rangle =$$
$$\langle \psi(Eu - iA\chi(t_0,\tau) -$$
$$-iA\chi(t_0,t),v)M(x_0,\langle x_0,\omega\rangle,\omega\rangle -$$
$$-i\int_{t_0}^{\tau}\frac{\delta_p}{\delta v(s)}\langle y(t_0,Eu-iA\chi(s,\tau)-$$
$$-iA\chi(t_0,t),v),\omega\rangle\langle f(s),\omega\rangle ds -$$
$$-i\int_{t_0}^{\tau}\frac{\delta_p}{\delta v(s)}\langle y(\tau,Eu-iA\chi(s,t,\cdot),v),\omega\rangle\langle f(s),\omega\rangle ds$$

является симметрическим по t, τ решением задачи (28), (29).

Доказательство. Полагая в (30) $t=t_0$, получаем начальное условие (29). Используя теорему 1, находим

$$\left\langle \frac{\partial z(t,\tau,u,v,\omega)}{\partial t},\omega\right\rangle =$$
$$=\langle -iA\frac{\delta_p\psi(Eu-iA\chi(t_0,\tau)-iA\chi(t_0,t),v)}{\delta u(t)}\times$$
$$\times M(x_0\langle x_0,\omega\rangle),\omega\rangle -$$
$$-i\int_{t_0}^{\tau}\frac{\delta_p^2\langle -iAy(t_0,Eu-iA\chi(s,\tau)-iA\chi(t_0,t),v),\omega\rangle}{\delta v(s)\delta u(t)}\times$$
$$\times\langle f(s),\omega\rangle ds - i\frac{\delta_p}{\delta v(t)}\langle y(\tau,Eu,v),\omega\rangle\langle f(t),\omega\rangle -$$
$$-i\int_{t_0}^{\tau}\frac{\delta_p^2\langle -iAy(\tau,Eu-iA\chi(s,t),v),\omega\rangle}{\delta v(s)\delta u(t)}\langle f(s),\omega\rangle ds,$$
$$\left\langle -iA\frac{\delta_p z(t,\tau,u,v,\omega)}{\delta u(t)},\omega\right\rangle =$$
$$\left\langle -iA\frac{\delta_p\psi(Eu-iA\chi(t_0,\tau)-iA\chi(t_0,t),v)}{\delta u(t)}\times\right.$$
$$\left.\times M(x_0\langle x_0,\omega\rangle,\omega\right\rangle -$$
$$-i\int_{t_0}^{\tau}\frac{\delta_p^2\langle y(t_0,Eu-iA\chi(s,\tau)-iA\chi(t_0,t),v),\omega\rangle}{\delta v(s)\delta u(t)}\times$$
$$\times\langle f(s),\omega\rangle ds -$$
$$-i\int_{t_0}^{t}\frac{\delta_p^2\langle y(\tau,Eu-iA\chi(s,t),v),\omega\rangle}{\delta v(s)\delta u(s)}\langle f(s),\omega\rangle ds.$$

Заметим, что

$$\frac{\delta_p}{\delta v(t)}\langle y(\tau,Eu,v),\omega\rangle =$$
$$=\frac{\delta_p}{\delta v(t)}[\langle\psi(Eu,v)M(x_0),\omega\rangle -$$
$$-i\int_{t_0}^{t}\left\langle\frac{\delta_p\psi(Eu,v)}{\delta v(s)}f(s),\omega\right\rangle ds] =$$
$$=\frac{\delta_p}{\delta v(t)}\Bigg[\langle\psi(u,v)EM(x_0),\omega\rangle -$$
$$-i\int_{t_0}^{t}\left\langle\frac{\delta_p\psi(u,v)}{\delta v(s)}Ef(s),\omega\right\rangle ds\Bigg] = \frac{\delta_p\langle y(\tau,u,v),\omega\rangle}{\delta v(t)}.$$

Подстановкой этих равенств в уравнение (28) убеждаемся, что оно выполняется.

Покажем, что (30) симметрично по переменным t, τ. Подставим в (30) выражение (14) для $y(t,u,v)$, получим

$$\langle z(t,\tau,u,v,\omega),\omega\rangle =$$
$$=\langle\psi(Eu-iA\chi(t_0,\tau)-$$
$$-iA\chi(t_0,t),v)M(x_0\langle x_0,\omega\rangle),\omega\rangle -$$
$$-i\int_{t_0}^{\tau}\frac{\delta_p\langle\psi(Eu-iA\chi(s,\tau)-iA\chi(t_0,t),v)M(x_0,\omega)\rangle}{\delta v(s)}\times$$
$$\times\langle f(s),\omega\rangle ds -$$
$$-i\int_{t_0}^{t}\frac{\delta_p\langle\psi(Eu-iA\chi(t_0,\tau)-iA\chi(s_1,t),v)M(x_0),\omega\rangle}{\delta v(s_1)}\times$$
$$\times\langle f(s_1),\omega\rangle ds_1 -$$
$$-i\int_{t_0}^{t}d\xi\int_{t_0}^{\tau}\frac{\delta_p^2\langle\psi(Eu-iA\chi(\xi,\tau)-iA\chi(s,t),v)f(\xi),\omega\rangle}{\delta v(s)\delta u(\xi)}\times$$
$$\times\langle f(s),\omega\rangle ds. \qquad (31)$$

Это выражение симметрично по переменным t, τ. Теорема доказана.

Теорема 13. *Если выполнены условия предыдущей теоремы, то квадратичная форма, определяемая второй моментной функцией решения задачи (1), (2), имеет вид*

$$M(\langle x(t),\omega\rangle\langle x(t),\omega\rangle)=$$
$$=\langle\psi(-iA\chi(t_0,\tau)-iA\chi(t_0,t),0)M(x_0\langle x_0,\omega\rangle),\omega\rangle-$$
$$-i\int_{t_0}^{\tau}\frac{\delta_p\langle\psi(-iA\chi(s,\tau)-iA\chi(t_0,t),0)M(x_0),\omega\rangle}{\delta v(s)}\times$$
$$\times\langle f(s),\omega\rangle ds-$$
$$-i\int_{t_0}^{t}\frac{\delta_p\langle\psi(-iA\chi(t_0,\tau)-iA\chi(s_1,t),0)M(x_0),\omega\rangle}{\delta v(s_1)}\times$$
$$\times\langle f(s_1),\omega\rangle ds_1-$$
$$-i\int_{t_0}^{t}d\xi\int_{t_0}^{\tau}\frac{\delta_p^2\langle\psi(-iA\chi(\xi,\tau)-iA\chi(s,t),0)f(\xi),\omega\rangle}{\delta v(s)\delta u(\xi)}\times$$
$$\times\langle f(s),\omega\rangle ds. \qquad (32)$$

Доказательство. Учитывая определение квадратичной формы (26), положим в (31) $u=0,\ v=0,$ получим (32). Теорема доказана.

Отметим, что кроме представления (32) для второй моментной функции решения задачи (1), (2) можно получить и другое представление, которое получается из (30) при $u=0,\ v=0$

$$M(\langle x(t),\omega\rangle\langle x(t),\omega\rangle)=$$
$$=\langle\psi(-iA\chi(t_0,\tau)-iA\chi(t_0,t),0)M(x_0,\langle x_0,\omega\rangle,\omega\rangle-$$
$$-i\int_{t_0}^{\tau}\frac{\delta_p}{\delta v(s)}\langle y(t_0,Eu-iA\chi(s,\tau)-$$
$$-iA\chi(t_0,t),0)\omega\rangle\langle f(s),\omega\rangle ds-$$
$$-i\int_{t_0}^{t}\frac{\delta_p}{\delta v(s)}\langle y(\tau,Eu-iA\chi(s,t,\cdot),0),\omega\rangle\langle f(s),\omega\rangle ds.$$

11. ВТОРАЯ МОМЕНТНАЯ ФУНКЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1), (2) ПРИ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССАХ $\varepsilon_1,\varepsilon_2$

При независимых случайных процессах ε_1, ε_2 формула (32) принимает более удобный для расчетов вид.

Теорема 14. *Если в задаче (1), (2) гауссовы случайные процессы* ε_1, ε_2 *независимы и* $\varphi_{\varepsilon_1}(u)$ *– характеристический функционал для* ε_1, *то*

$$M(\langle x(t),\omega\rangle\langle x(t),\omega\rangle)=$$
$$\langle\varphi_{\varepsilon_1}(-iA\chi(t_0,\tau)-iA\chi(t_0,t),0)M(x_0\langle x_0,\omega\rangle),\omega\rangle-$$
$$-i\int_{t_0}^{\tau}\langle\varphi_{\varepsilon_1}(-iA\chi(s,\tau)-iA\chi(t_0,t))\times$$
$$\times M(\varepsilon_2(s))M(x_0),\omega\rangle\langle f(s),\omega\rangle ds-$$
$$-i\int_{t_0}^{\tau}\langle\varphi_{\varepsilon_1}(-iA\chi(t_0,\tau)-iA\chi(s_1,t))\times$$
$$\times M(\varepsilon_2(s_1))M(x_0),\omega\rangle\langle f(s_1),\omega\rangle ds_1-$$

Доказательство. При независимых случайных процессах ε_1, ε_2 характеристический функционал $\psi(u,v)$ имеет вид $\psi(u,v)=$ $=\varphi_{\varepsilon_1}(u)\varphi_{\varepsilon_2}(v),\ \varphi_{\varepsilon_2}(0)=1$ и

$$\langle\psi(-iA\chi(t_0,\tau)-iA\chi(t_0,t),0)M(x_0\langle x_0,\omega\rangle)\rangle-$$
$$-\langle\varphi_{\varepsilon_1}(-iA\chi(t_0,\tau)-iA\chi(t_0,t))\times$$
$$\times\varphi_{\varepsilon_2}(0)M(x_0,\langle x_0,\omega\rangle,\omega\rangle,$$
$$\frac{\delta_p\langle\psi(-iA\chi(s,\tau)-iA\chi(t_0,t),0)M(x_0),\omega\rangle}{\delta v(s)}=$$
$$=\left\langle\varphi_{\varepsilon_1}(-iA\chi(s,\tau)-iA\chi(t_0,t))\frac{\delta_p\varphi_{\varepsilon_2}(0)}{\delta v(s)},\omega\right\rangle=$$
$$=\langle\varphi_{\varepsilon_1}(-iA\chi(s,\tau)-iA\chi(t_0,t))iM(\varepsilon_2(s)),\omega\rangle,$$
$$\frac{\delta_p^2\langle\psi(-iA\chi(\xi,\tau)-iA\chi(s,t),0)f(\xi),\omega\rangle}{\delta v(s)\delta v(\xi)}=$$
$$=\langle\varphi_{\varepsilon_1}(-iA\chi(\xi,\tau)-iA\chi(s,t))\times$$
$$\times M(\varepsilon_2(s)\varepsilon_2(\xi))f(\xi),\omega\rangle,$$

Здесь мы использовали легко проверяемые равенства

$$\left.\frac{\delta_p\varphi_{\varepsilon_2}(v)}{\delta v(s)}\right|_{v=0}=iM(\varepsilon_2(s)),$$
$$\left.\frac{\delta_p^2}{\delta v(s)\delta v(\xi)}\varphi_{\varepsilon_2}(v)\right|_{v=0}=-M(\varepsilon_2(s)\varepsilon_2(\xi)).$$

Подставляя эти соотношения в (32), получаем формулу (33). Теорема доказана.

Отметим, что при независимых случайных процессах ε_1, ε_2, для нахождения второй моментной функции решения задачи (1), (2) достаточно знать характеристический функционал для ε_1 и первые две моментные функции процесса ε_2.

12. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВТОРОЙ МОМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1) (2) ЧЕРЕЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ И КОВАРИАЦИОННУЮ ФУНКЦИЮ $\varepsilon_1(t)$

Пусть в задаче (1), (2) гауссов случайный процесс ε_1 задан характеристическим функционалом (17) и ε_2 – независимый с ε_1 случайный процесс. Тогда в формуле (33)

$$\varphi_{\varepsilon_1}(-iA\chi(\xi,\tau)-iA\chi(s,t))=$$
$$\exp\Bigg(i\int_T M(\varepsilon_1(s_1))(-iA\chi(\xi,\tau,s_1)-$$
$$\left.-iA\chi(s,t,s_1)\right)ds_1-$$
$$-\frac{1}{2}\int_T\int_T b(s_1,s_2)(-iA\chi(\xi,\tau,s_1)-iA\chi(s,t,s_1))\times$$
$$\times(-iA\chi(\xi,\tau,s_2)-iA\chi(s,t,s_2))ds_1ds_2=$$
$$\exp\Bigg(\int_\xi^\tau M(\varepsilon_1(s_1))Ads_1+\int_s^t M(\varepsilon_1(s_1))Ads_1+$$
$$+\frac{A^2}{2}\left(\int_\xi^\tau\int_s^t b(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)+$$
$$\left.+2\int_\xi^\tau\int_s^t b(s_1,s_2)ds_1ds_2+s\int_\xi^t\int_s^t b(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)$$

и получается вещественное выражение для $M(\langle x(t),\omega\rangle\langle x(t),\omega\rangle)$.

В частности, для решения линейного однородного уравнения, соответствующего (1), с гауссовым коэффициентом ε_1, получаем

$$M(\langle x(t),\omega\rangle\langle x(t),\omega\rangle)=$$
$$\left\langle\varphi_{\varepsilon_1}(-iA\chi(t_0,\tau)-iA\chi(t_0,t))M(x_0\langle x_0,\omega\rangle),\omega\right\rangle=$$
$$=\Bigg\langle\exp\Bigg(\int_{t_0}^\tau M(\varepsilon_1(s_1))Ads_1+\int_{t_0}^t M(\varepsilon_1(s_1))Ads_1+$$
$$+\frac{A^2}{2}\left(\int_{t_0}^t\int_s^t b(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)+$$
$$+2\int_{t_0}^t\int_{t_0}^\tau b(s_1,s_2)ds_1ds_2+$$
$$\left.\left.+\int_{t_0}^\tau\int_{t_0}^\tau b(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)M(x_0\langle x_0,\omega\rangle),\omega\right\rangle \quad (34)$$

13. УСТОЙЧИВОСТЬ В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ГАУССОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ $\varepsilon_1(t)$

Определение [ср. 4. стр. 43]. Нулевое решение дифференциального уравнения со случайными коэффициентами называется *устойчивым в широком смысле*, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$, такое, что для любых ξ, удовлетворяющих неравенствам $\|M(\xi)\|<\delta(\varepsilon)$, $\sup_{\|\omega\|\le1}\langle M(\xi\langle\xi,\omega\rangle,\omega)\rangle<\delta(\varepsilon)$ выполняются неравенства

$$\sup_{\|\omega\|\le1}\|Mx(t,\xi)\|<\varepsilon,$$
$$\sup_{\substack{t\ge t_0,\\ \tau\ge t_0,\\ \|\omega\|\le1}}\left|\langle M(x(t,\xi)\langle x(\tau,\xi),\omega\rangle),\omega\rangle\right|<\varepsilon.$$

Если при этом выполняются условия

$$\|Mx(t,\xi)\|\to0,$$
$$\sup_{\|\omega\|\le1}\left|\langle M(x(t,\xi)\langle x(\tau,\xi),\omega\rangle),\omega\rangle\right|\to0$$

при $t\ge t_0$, $\tau\ge t_0$, $t+\tau\to+\infty$, то нулевое решение называется *асимптотически устойчивым в широком смысле.*

Теорема 15. *Пусть $\varepsilon_1(t)$ гауссов случайный процесс, $M(\varepsilon_1(t))>0$, 0 не принадлежит спектру матрицы A, $\sup_{\|\omega\|\le1}\left|M(\xi\langle\xi,\omega\rangle,\omega)\right|\ne0$, аргументы всех собственных значений матрицы A лежат в интервале $(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$, и не ограничено при $t\ge t_0$, $\tau\ge t_0$ хотя бы одно из выражений $\int_{t_0}^t M(\varepsilon_1(s))ds$, $\int_{t_0}^t\int_{t_0}^t b(s_1,s_2)ds_1ds_2$, $\int_{t_0}^t\int_{t_0}^\tau b(s_1,s_2)ds_1ds_2$, тогда $M(\langle x(t),\omega\rangle\langle x(\tau),\omega\rangle)$ не ограничено при $t\ge t_0$, $\tau\ge t_0$.*

Доказательство. Для ковариационной функции $b(s_1,s_2)$ выполняется условие

$$\int_T\int_T b(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2)ds_1ds_2\ge0,\ \forall u\in L_1(T).$$

Тогда двойные интегралы в (34) неотрицательны. Если $\lambda\in\sigma(A)$, то, по теореме об отображении спектра оператора [9, стр. 611], $\lambda^2 \in \sigma(A^2)$. Поскольку $-\frac{\pi}{4} < \arg\lambda < \frac{\pi}{4}$, то $-\frac{\pi}{2} < \arg\lambda^2 < \frac{\pi}{2}$, т. е. вещественные части всех чисел λ^2 больше нуля и $Re\lambda > 0$ для $\lambda \in \sigma(A)$. Тогда (34) не ограничено при $t \geq t_0$, $\tau \geq t_0$. Теорема доказана.

Теорема 16. *Пусть* $\varepsilon_1(t)$ *– гауссов случайный процесс,* $M(\varepsilon_1(t)) > 0)$, $0 \notin \sigma(A)$ *аргументы всех собственных значений матрицы* A *лежат в интервалах* $(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$, *и выполняется хотя бы одно из условий* $\int_{t_0}^{t} M(\varepsilon_1(s))ds \to +\infty$, $\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} b(s_1, s_2)ds_1 ds_2 \to +\infty$, $\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau} b(s_1, s_2)ds_1 ds_2 \to +\infty$ *при* $t \geq t_0$, $\tau \geq t_0$ *и* $t + \tau \to +\infty$. *Тогда уравнение (1) асимптотически устойчиво в широком смысле.*

Доказательство. При выполнении условий теоремы аргументы собственных значений матрицы A^2 лежат в интервале $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, т. е. вещественные части всех собственных значений матриц A и A^2 отрицательны. Тогда из условий теоремы и (34) при $\|\omega\| \leq 1$ следует $M(\langle x(t), \omega\rangle\langle x(t), \omega\rangle) \to 0$ при $t + \tau \to +\infty$, $t \geq t_0$, $\tau \geq t_0$. Кроме того, согласно теореме 11, $\|Mx(t, \xi)\| \to 0$ при $t \to +\infty$. Теорема доказана.

Следующий пример показывает, что неустойчивое линейное детерминированное уравнение при мультипликативном возмущении гауссовым шумом может стать асимптотически устойчивым в широком смысле.

Пусть $M(\varepsilon_1(t)) = m > 0$, $B > 0$, $b(s_1, s_2) = B(1 + (s_1 - s_2)^2)^{-1}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \; A^2 = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Числа $1 \pm 3i$ образуют спектр матрицы A и числа $-8 \pm 6i$ – спектр матрицы A^2. При этих условиях из (34) получаем

$$M(\langle x(t), \omega\rangle\langle x(\tau), \omega\rangle) = \Bigg\langle \exp\Bigg(Am(t+\tau) + \frac{A^2 B}{2}(2t \operatorname{arctg} t - \ln(1+t^2) + 2\tau \operatorname{arctg}\tau - \ln(1+\tau^2) + 2\int_0^t\int_0^\tau (1 + (s_1 - s_2)^2)^{-1})ds_1 ds_2 \Bigg) M(x_0 \langle x_0, \omega\rangle), \omega \Bigg\rangle.$$

При этом

$$\|\exp(Am(t+\tau))\| = O(\exp(m(t+\tau))),$$

$$2t \operatorname{arctg} t - \ln(1+t^2) 2\tau \operatorname{arctg}\tau - \ln(1+\tau^2) + 2\int_0^t\int_0^\tau (1 + (s_1 - s_2)^2)^{-1})ds_1 ds_2 \geq$$

$$\geq (t+\tau) + 2\int_0^t\int_0^\tau (1 + (s_1 - s_2)^2)^{-1})ds_1 ds_2)$$

и

$$\left\| \exp\left(\frac{A^2 B}{2}(2t \operatorname{arctg} t - \ln(1+t^2) + 2\tau \operatorname{arctg}\tau - \ln(1+\tau^2) + 2\int_0^t\int_0^\tau (1 + (s_1 - s_2)^2)^{-1} ds_1 ds_2 \right) \right\| = O(-4B(t+\tau)).$$

При $B > 0,25m$ получаем

$$M(\langle x(t), \omega\rangle\langle x(\tau), \omega\rangle) < \exp((-4B + m)(t+\tau))\|M(x_0)\|^2 \|\omega\|^2 \to 0$$

при $t \geq t_0$, $\tau \geq t_0$, $t + \tau \to +\infty$. Отметим, что $0,25m > \frac{m}{7}$, поэтому, см. пример 2, при $B > 0,25m$ уравнение (1) является асимптотически устойчивым в широком смысле.

14. ВТОРЫЕ СМЕШАННЫЕ МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1), (2)

Практический интерес представляют и вторые смешанные моментные функции решения, которые характеризуют корреляцию решения с соответствующими коэффициентами уравнения.

Для нахождения второй моментной функции $M(x(t)\varepsilon_1(s))$ можно было бы использовать метод, который был применен для нахождения $M(x(t)x(\tau))$, однако, это можно сделать проще.

Теорема 17. *Пусть выполняются условия теоремы 12, тогда вторая смешанная моментная функция* $M(x(t)\varepsilon_1(s))$ *находится в явном виде*

$$M(x(t)\varepsilon_1(s)) = -i\frac{\delta_p \psi(-iA\chi(t_0, t), 0)}{\delta u(s)} M(x_0) - \int_{t_0}^{t} \frac{\delta_p^2 \psi(-iA\chi(\tau, t), 0)}{\delta v(\tau)\delta u(s)} f(\tau)d\tau. \qquad (35)$$

Доказательство. Из определения $y(t,u,v)$ легко получаем

$$M(x(t)\varepsilon_1(s)) = -i\frac{\delta_p y(t,u,v)}{\delta u(s)}|_{u=v=0}.$$

Для нахождения $y(t,u,v)$ используем представление (14), получим

$$M(x(t)\varepsilon_1(s)) =$$
$$= -i\frac{\delta_p\psi(Eu - iA\chi(t_0,t),v))}{\delta u(s)}M(x_0)|_{u=v=0} -$$
$$-\int_{t_0}^{t}\frac{\delta_p^2}{\delta v(\tau)\delta u(s)}\times$$
$$\times\psi(Eu - iA\chi(\tau,t),v)f(\tau)d\tau|_{u=v=0} =$$
$$= -i\frac{\delta_p\psi(-iA\chi(t_0,t),0)}{\delta u(s)}M(x_0) -$$
$$-\int_{t_0}^{t}\frac{\delta_p^2}{\delta v(\tau)\delta u(s)}\psi(-iA\chi(\tau,t),0)f(\tau)d\tau.$$

Теорема доказана.

При независимых случайных процессах ε_1, ε_2 формула приобретает более законченный вид.

Теорема 18. Если в задаче (1), процессы ε_1, ε_2 независимы и ε_1 является гауссовым процессом, то вторая смешанная моментная функция $M(x(t)\varepsilon_1(s))$ имеет вид

$$M(x(t)\varepsilon_1(s)) =$$
$$= -i\frac{\delta_p\varphi_{\varepsilon_1}(-iA\chi(t_0,t),0)}{\delta u(s)}M(x_0) -$$
$$-\int_{t_0}^{t}\frac{\delta_p\varphi_{\varepsilon_1}(-iA\chi(\tau,t))}{\delta u(s)}M(\varepsilon_2(\tau))f(\tau)d\tau.$$

Доказательство получается подстановкой в (35) выражения $\psi(u,v) = \varphi_{\varepsilon_1}(u)\varphi_{\varepsilon_2}(v)$.

Выпишем представление второй смешанной моментной функции $M(x(t)\varepsilon_1(s))$ для гауссова случайного процесса $\varepsilon_1(t)$, заданного характеристическим функционалом (17), и независимого с $\varepsilon_2(t)$

$$M(x(t),\varepsilon_1(s)) = A\exp\left(A\int_{t_0}^{t}a(\tau)\,d\tau + \right.$$
$$\left.+\frac{A^2}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}b(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)\times$$
$$\times\left(a(s) + \int_{t_0}^{t}b(s,s_2)ds_2\right)M(x_0) +$$
$$+A\int_{t_0}^{t}\exp\left(A\int_{\xi}^{t}a(\tau)d\tau + \frac{A^2}{2}\int_{\xi}^{t}\int_{\xi}^{t}b(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)\times$$
$$\times\left(a(s) + \int_{\xi}^{t}b(s,s_2)ds_2\right)M(\varepsilon_2(\xi))f(\xi)d\xi.$$

Аналогично находится и вторая смешанная моментная функция $M(x(t)\varepsilon_2(s))$ при независимых случайных процессах ε_1, ε_2

$$M(x(t)\varepsilon_2(s)) = -i\frac{\delta_p y(t,u,v)}{\delta v(s)}|_{u=v=0} =$$
$$= \varphi_{\varepsilon_1}(-iA\chi(t_0,t))M(\varepsilon_2(s))M(x_0) +$$
$$+\int_{t_0}^{t}\varphi_{\varepsilon_1}(-iA\chi(\tau,t))M(\varepsilon_2(\tau))f(\tau)d\tau.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты, полученные выше для мультипликативно возмущенных случайным гауссовым шумом уравнений, показывают, что в вопросах устойчивости линейных уравнений большую роль играют математическое ожидание, ковариационная функция $b(s_1,s_2)$ гауссова шума и спектр матрицы A. Выяснилось, что неустойчивые линейные системы могут быть (достаточно просто, с точки зрения математики) стабилизированы мультипликативным гауссовым шумом. В свою очередь, некоторые асимптотически устойчивые системы могут стать неустойчивыми при мультипликативном возмущении гауссовым шумом. При конструировании систем следует особо учитывать расположение спектра матрицы A. В случае скалярного уравнения (1) неустойчивое уравнение нельзя сделать асимптотически устойчивым в среднем с помощью мультипликативного случайного гауссова шума (при $M(\varepsilon_1(t) > 0)$).

Автор благодарен Ильину В. А. за полезные обсуждения задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Задорожний В. Г.* Методы вариационного анализа / В. Г. Задорожний. – М.-Ижевск : НИЦ РХД, 2006. – 316 с.

2. *Leibowits M. A.* Statistical behavior of linear systems with randomly varying parameters / M. A. Leibowits // Journ. of Math. Physics. – 1963. – V 4. 6. –P. 852–858.

3. *Samuels J. K.* On the stability of random systems and the stabilization of deterministic systems / J. K. Samuels // Journ. acoust. Soc. Amer. – 1960. – V. 32. – P. 594–601.

4. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Р. З. Хасьминский. – М. : ФМ, 1969. – 368 с.

5. *Задорожний В. Г.* Линейный хаотический резонанс при вихревом движении / В. Г. Задорожний // ЖВМ и МФ. – 2013. – Т.53, 4. – С. 639–655.

6. *Задорожний В. Г.* Дифференциальное уравнение в банаховом пространстве, содержащее вариационную производную / В. Г. Задорожний // Сиб.мат.жур. – 1992. – Т. 33, 2. – С. 80–93.

7. *Задорожний В. Г.* Первые моментные функции решения уравнения теплопроводности со случайными коэффициентами / В. Г. Задорожний, С. С. Хребтова // ЖВМ и МФ. – 2009. – Т. 49. 11. – С. 1937–1952.

8. *Задорожний В. Г.* Периодические в среднем решения линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка со случайными коэффициентами / В. Г. Задорожний, Г. А. Курина // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, 6. – С. 726–744.

9. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2 / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Физматлит, 1959. – 807 с.

10. *Данфорд Н.* Линейные операторы. Общая теория. Т. 1 / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. – М. : ИЛ, 1962. – 895 С.

Задорожний Владимир Григорьевич – д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой нелинейных колебаний, Воронежский государственный университет.
Тел.: 8-473-274-14-85, 8-908-143-26-16
E-mail: zador@amm.vsu.ru

Zadorozhniy Vladimir Grigoryevich – doctor of science, professor, Voronezh State University.
Tel.: 8-473-274-14-85, 8-908-143-26-16
E-mail: zador@amm.vsu.ru