

# ИССЛЕДОВАНИЯ ТОЧНОСТИ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ ДВУХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ: ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО, ВЕЙБУЛЛА, ПОЛУЧЕННЫХ МЕТОДОМ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ПО СФОРМИРОВАННЫМ ВЫБОРКАМ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А. Ю. Русин, М. А. Абдулхамед

*Тверской государственной технической университет*

Поступила в редакцию 26.09.2016 г.

**Аннотация.** Экспериментальные исследования для анализа точности оценок параметров двух законов распределения: экспоненциального, Вейбулла, полученных методом МП по малым, однократно цензурированным справа выборкам, формирующимся по плану  $[N, U, T]$ . Применение параметрических методов предполагает априорное знание теоретического закона распределения исследуемой величины или его определение по эмпирическим данным. Параметрическая оценка по цензурированным выборкам основывается на традиционных методах математической статистики таких как метод максимального правдоподобия и ряде других. Оценки, получаемые по методу максимального правдоподобия, при относительно нежестких ограничениях асимптотически эффективны, не смещены и распределены асимптотически нормально.

**Ключевые слова:** цензурированные выборки, надежность, метод максимального правдоподобия, компьютерное моделирование, испытания оборудования.

**Annotation.** Evaluation test specifications may be reduced only if information-processing methods ensure the validity of the calculated reliability characteristics. The result of test operations is forming small censored samples of mean-time-between-equipment failures. Reliability measurement using such samples is made by the maximum likelihood method. The article presents experimental studies of estimating precision of maximum a likelihood parameter of the exponential distribution law on small singly right-censored samples. In their studies, the authors used computer simulating of censored samples, which are similar to the samples formed in equipment reliability testing. These experimental data show that the majority of maximum likelihood estimates obtained using small singly right-censored samples have significant deviations from ideal values.

**Keywords:** computer modeling, information processing, testing equipment, reliability censored sample, the maximum likelihood method.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Для определения параметров надежности по незавершенным испытаниям характерна ситуация, когда к моменту прекращения испытаний большой партии изделий наблюдается выход из строя лишь части из них, обычно достаточно малой по сравнению с объемом всей партии. В этом случае анализ приходится проводить по выборке, сильно цензурированной справа. Особенно часто

приходится сталкиваться с задачей обработки цензурированных выборок, когда наблюдению оказывается доступной только часть области определения случайной величины, а для выборочных значений, попавших левее или правее этой области, фиксируется лишь сам факт этого попадания. Очевидно, что в такой неполной (цензурированной) выборке содержится меньше информации, чем в полной и это, естественно, отражается на точности оценивания параметров аппроксимирующего закона распределения. В этой связи оказывается интересным, насколько точно

можно оценить параметры наблюдаемого закона в зависимости от объема всей выборки  $n$  (объема партии) и величины наблюдаемой ее части. Наиболее универсальным методом по отношению к форме представления выборочных данных является метод максимального правдоподобия. В отличие от других метод позволяет находить ОМП параметров по не группированным, частично группированным и группированным данным. С точки зрения структуры данных цензурированные выборки являются частным случаем понятия частично группированной выборки, которую можно определить следующим образом [8]. Параметрическая оценка по цензурированным выборкам основывается на традиционных методах математической статистики (максимального правдоподобия, моментов, квантилей), методах линейных оценок и ряде других. Оценки, получаемые по методу максимального правдоподобия, при относительно нежестких ограничениях асимптотически эффективны, не смещены и распределены асимптотически нормально.

Смысл метода максимального правдоподобия заключается в том, что, при известном законе распределения для выборки случайных величин строится функция правдоподобия [4].

$$L = A \prod_{i=1}^n f(t_i) \prod_{j=1}^m (1 - F(\tau_j)). \quad (1)$$

где  $A$  – постоянный коэффициент;

$t_i$  – наработка до отказа объекта;

$\tau_j$  – наработка до цензурированной;

$n$  – число отказов объектов;

$m$  – количество цензурированных наработок;

$F(t)$  – функция распределения;

$f(t)$  – функция плотности распределения.

Для определения оценок максимального правдоподобия в диссертационной работе для двух законов распределения: экспоненциального, Вейбулла, необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial \ln L}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

Для экспоненциального закона распределения функция распределения и плотность распределения равны:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \quad (3)$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (4)$$

Функция правдоподобия имеет вид

$$L = f(t_1) \cdot f(t_2) \cdots f(t_r) \cdot \bar{F}(\tau_1) \cdot \bar{F}(\tau_2) \cdots \bar{F}(\tau_n).$$

После подстановки (2), (3) в (4) логарифмируем функцию правдоподобия и получаем

$$\ln L = r \cdot \ln \lambda - \lambda \left( \sum_{i=1}^r t_i + \sum_{j=1}^n \tau_j \right), \quad (5)$$

где  $\lambda$  – параметр экспоненциального распределения;

$\tau$  – наработка объекта до цензурирования;

$n$  – количество наработок до цензурирования.

$t$  – наработка объекта до отказа;

$r$  – количество отказов.

Выполняя дифференцирование уравнение (5), получаем

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{r}{\lambda} - \left( \sum_{i=1}^r t_i + \sum_{j=1}^n \tau_j \right) = 0. \quad (6)$$

Из выражения (6) получаем точечную оценку параметра экспоненциального распределения

$$\lambda = \frac{r}{\sum_{i=1}^r t_i + \sum_{j=1}^n \tau_j}. \quad (7)$$

Для закона распределения Вейбулла оценки параметров масштаба  $m$  и формы  $f$  рассчитываются путем решения системы уравнений [3, 4].

$$\left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{r}{f} + \sum_{i=1}^r \ln t_i \right) \left( \sum_{i=1}^r \ln t_i^f + \sum_{j=1}^n \tau_j^f \right) - \\ & - r \cdot \left( \sum_{i=1}^r t_i^f \ln t_i + \sum_{j=1}^n \tau_j^f \ln \tau_j \right) = 0 \\ & m = \left( \frac{\sum_{i=1}^r \ln t_i^f + \sum_{j=1}^n \tau_j^f}{r} \right)^{\frac{1}{f}} \end{aligned} \right.$$

В ранее рассматриваемая работа предложена процедура решения системы уравнений [6].

Существует несколько разработанных планов испытаний. Рассмотрим план  $[N, U,$

$T$ ], который приведен в стандарте [1]. Согласно этому плану, одновременно испытывают  $N$  объектов, отказавшие во время испытаний объекты не восстанавливают и не заменяют, испытания прекращают по окончании времени окончания или достижения наработки  $T$  для каждого не отказавшего объекта. В более новом стандарте [2], действующем в настоящее время, также существует план испытаний, подобный этому.

Он называется планом, ограниченным продолжительностью наблюдений. При проведении испытаний по плану  $[N, U, T]$  образуются однократно цензурированные выборки наработок на отказ. При параметрическом оценивании показателей надежности, например, средней наработки до отказа, по однократно цензурированным справа выборкам основным математическим методом является метод максимального правдоподобия [3]. В условиях постоянного повышения надежности испытываемого оборудования и желаемого сокращения времени испытаний, становится актуальным вопрос исследования достоверности оценок максимального правдоподобия (МП).

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Выполнены экспериментальные исследования точности оценок МП для экспоненциального закона распределения и распределение Вейбулла по малым, однократно цензурированным справа выборкам, формирующимся по плану  $[N, U, T]$ . Для проведения исследований разработан алгоритм и подпрограмма моделирования процесса отказов на ЭВМ, возникающих при проведении испытаний по плану  $[N, U, T]$ . Использован следующий алгоритм формирования однократно цензурированной выборки который разработан в [7]:

1. Генерируется случайная величина  $t$ , распределенная по исследуемому закону распределения.

2. Полученные случайные величины сравниваются с заданным временем проведения испытаний  $T$ . Добавляется случайная величина наработке до цензурирования  $T$  к моде-

лируемой выборке если  $t > T$ . Добавляется случайная величина наработке до отказа  $t$  к моделируемой выборке если  $t < T$ .

3. Цикл моделирования выполняется пока число сгенерированных случайных величин не станет равным заданному количеству членов выборки  $N$ .

На ЭВМ моделировались однократно цензурированные справа выборки случайных величин объемом  $N = 5, 10, 15, 20, 25$ .

Генерирование выборок выполнялось при следующих ограничениях

$$6 \leq N < 10, \quad q \geq 0,5$$

$$10 \leq N < 20, \quad q \geq 0,3$$

$$20 \leq N \leq 50, \quad q \geq 0,2,$$

где  $q$  – степень цензурирования выборки. Ограничения приняты в соответствии с рекомендациями [7]. Когда эти ограничения не выполняются, можно вычислять только нижнюю доверительную границу параметров распределения. Количество сформированных выборок для каждого значения  $N$  равно 3000. По каждой выборке методом максимального правдоподобия рассчитывались оценки экспоненциального распределения и распределения Вейбулла и их относительные отклонения  $\delta$  от истинных значений – значений, которые использовались при генерации выборки.

$$\delta = \frac{p - p_{МП}}{p},$$

где  $p$  – истинное значение параметра экспоненциального распределения,  $p_{МП}$  – оценка максимального правдоподобия экспоненциального распределения и распределения Вейбулла.

## 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

По результатам моделирование построены гистограммы относительных отклонений оценок максимального правдоподобия экспоненциального распределения и распределения Вейбулла [5]. По оси ординат отложен процент оценок от общего количества, попавших в данный интервал.

Полученные результаты приведены на рис. 1–3.

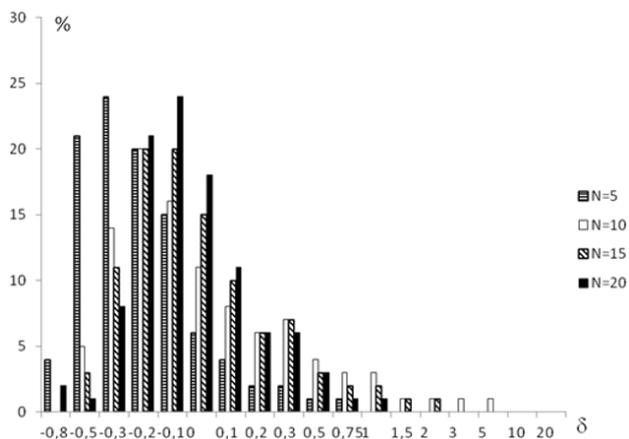


Рис. 1 Относительные отклонения оценки максимального правдоподобия параметра масштаба закона распределения Вейбулла

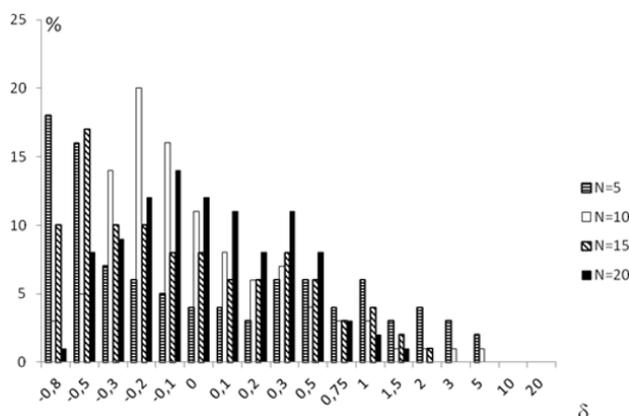


Рис. 2 Относительные отклонения оценки максимального правдоподобия параметра формы закона распределения Вейбулла

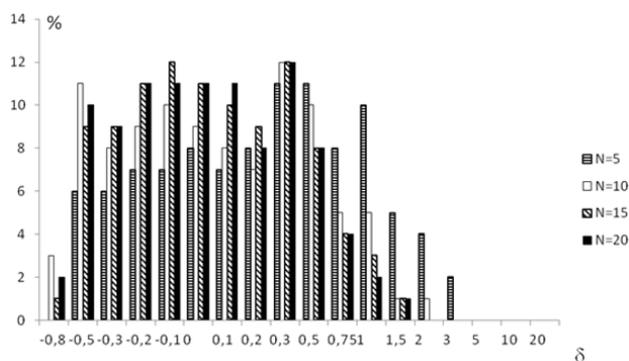


Рис. 3 Относительные отклонения оценки максимального правдоподобия экспоненциального закона распределения

Из результатов экспериментальных данных видно, что большинство оценок максимального правдоподобия, полученные по малым, однократно цензурированным справа выборкам имеют значительные отклонения от истинных значений. Например, 26 % оценок параметра масштаба распределения Вей-

булла при  $N = 5$  (рис. 1) имеют относительные отклонения по модулю от 0,2 до 0,3; 22 % – относительные отклонения от 0,3 до 0,5 и 5 % – более 0,8. С увеличением объема выборки точность оценок возрастает. При  $N = 20$  74 % относительных отклонений оценок параметра масштаба практически не превышают 0,2. Несмотря на это, 14 % оценок имеют относительные отклонения от 0,2 до 0,3; 7 % от 0,3 до 0,5; 7 % от 0,5 до 1. Еще более низкую точность имеют оценки параметра формы закона распределения Вейбулла (рис. 2). Для  $N = 5$ , 30 % оценок имеет отклонения по модулю от 0,5 до 1; 9 % от 1 до 2 и 9 % более 2. При  $N = 20$  65 % относительных отклонений оценок параметра формы не превышают 0,3. При этом 3 % оценок имеют относительные отклонения от 0,75 до 1; 2 % – от 1 до 1,5; 1 % – от 1,5 до 2. 2 % оценок экспоненциального распределения при  $N = 5$  имеют относительные отклонения от 3 до 5; 4% – от 2 до 3; 5 % – от 1,5 до 2. С увеличением объема выборки  $N$  точность оценок возрастает.

При  $N = 20$  относительные отклонения оценок экспоненциального закона распределения не превышают 1,5. Несмотря на это, 4 % оценок имеют относительные отклонения от 0,75 до 1; 8 % – от 0,5 до 0,75; 12 % – от 0,3 до 0,5. В целом можно сделать вывод, что точность метода максимального правдоподобия при значениях  $N < 20$  низка.

Относительное отклонение оценок от истинных значений может достигать 5 и более, а половина всех оценок имеет отклонения больше 0,3 в зависимости от объема выборки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- ГОСТ 27.410-87. Надёжность в технике. Методы контроля показателей надёжности и планы контрольных испытаний на надёжность.
- ГОСТ 27.402-95. Планы испытаний для контроля средней наработки до отказа (на отказ). Часть 1. Экспоненциальное распределение.
- Баталова З. Г., Благовещенский Ю. Н. О точности оценок ресурсов элементов изделий методом максимума правдоподобия при

случайном усечении длительностей наблюдений // Надежность и контроль качества. – 1979. – № 9. – С. 12–20.

4. *Бурдасов Е. И., Зарифьянц И. Д., Дворникова Н. Н.* Об оценке параметров нормального распределения по случайно цензурированной выборке // Надежность и контроль качества. – 1978. – № 6. – С. 10–16.

5. *Абдулхамед М. А.* Управление процессом испытания оборудования на надежность оборудования / А. Ю. Русин, М. А. Абдулхамед // науч.-техн. журнал. Надежность. – № 3(50). – 2014. – С. 27–34.

**Русин А.Ю.** – канд. техн. наук, доцент, Тверской государственной технической университет

**Абдулхамед М.** – аспирант, Тверской государственной технической университет  
E-mail: mohamed86@mail.ru

6. *Петрович М. Л., Давидович М. И.* Статистическое оценивание и проверка гипотез на ЭВМ. – М. : Финансы и статистика, 1989. – 189 с.

7. *Русин А. Ю.* Имитационное моделирование процессов возникновения отказов электрооборудования с целью повышения эффективности системы технического обслуживания и ремонта: дисс. ... канд. техн. наук. – Тверь : ТГТУ, 1999. – 214 с.

**Rusin A. Yu.** – Ph.D. Technique, Associate Professor, Tver State Technical University

**Abdulkhamed M. A.** – Postgraduate Student, Tver State Technical University  
E-mail: mohamed86@mail.ru