УДК 519.854.3 + 517.977.57

# О РЕШЕНИИ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

**С. Н. Медведев, О. А. Медведева**

*Воронежский государственный университет*

**Поступила в редакцию 27.11.2016 г.**

**Аннотация.** В данной статье исследуется интервальная задача условной линейной целочисленной оптимизации. Рассматриваются два подхода к определению её оптимального решения, один из которых использует понятие недоминирующих интервалов. Для отыскания всех недоминирующих интервалов рассматривается вспомогательная оптимизационная задача, поиск решения которой основывается на идее алгоритма отсечений Гомори. В итоге предлагается алгоритм нахождения всех Парето-оптимальных решений интервальной задачи.

**Ключевые слова:** интервальная оптимизация, целочисленная оптимизация, оптимальное решение, несравнимые интервалы.

**Annotation.** This article explores the problem of the interval conditional integer optimization. Two approaches to the determination of its optimal solutions are considered. One of them uses the concept of non-dominant interval. The supporting optimization problem to find all non-dominated intervals is considered. Its solution based on the idea of the Gomory algorithm. As a result, the algorithm for finding all Pareto-optimal solutions to the interval problem is proposed.

**Keywords:** interval optimization, integer optimization, optimal solution, incomparable intervals.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Основной вопрос, возникающий в отношении интервальных задач оптимизации, касается определения оптимального решения, в частности понятия экстремума интервальной функции и выполнения интервального неравенства. Существуют различные подходы, позволяющие перейти от интервальной постановки оптимизационных задач к решению различных детерминированных линейных и нелинейных задач оптимизации.

В [4] предложен подход к оптимизации систем с интервально заданными параметрами, основанный на принципах сравнения интервалов, вытекающих из общих принципов интервальной математики. В результате оказалось возможным эффективное решение многих задач оптимизации в новой, интервальной постановке [4, 5, 7, 9, 11]. Однако предложенный подход имел ограничение, связанное с невозможностью сравнения интервалов, один из которых накрывает другой.



В [6] обоснован более общий подход к оптимизации систем с интервальными параметрами, в котором используется понятие меры близости двух интервалов.

Другой возможный подход к определению правила сравнения пересекающихся интервалов предложен в работах [1, 2]. Он основан на идеях теории проверки статистических гипотез. Реализация связана с необходимостью определения функции плотности распределения вероятностей значений внутри интервала. В работе [1] показано, как на основе сформированной полной группы событий, производится сравнение и ранжирование произвольных интервалов.

Значимые результаты достигнуты в работах [9, 12] по определению верхней и нижней границы оптимального решения.

## 2. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассматривается задача условной целочисленной линейной оптимизации в условиях неопределенности, формализованной в виде интервалов

$$\boldsymbol{F}(x_1,...,x_n) \to \max \quad (1)$$

$$\boldsymbol{f}_i(x_1,...,x_n) \le \boldsymbol{b}_i,\ i=1,...,m, \quad (2)$$

$$x_j \in Z,\ j=1,...,n. \quad (3)$$

Здесь коэффициенты линейных функций $\boldsymbol{F}(x)$, $\boldsymbol{f}_i(x)$, и коэффициенты $\boldsymbol{b}_i$, $i=1,...,m$ являются не точными числами, а известны с точностью до интервальных значений.

**Замечание 1.** Здесь и далее будем обозначать $x=(x_1,...,x_n)$.

**Замечание 2.** Здесь и далее жирным шрифтом $\boldsymbol{a}$ будем выделять интервальные величины, обычным шрифтом $a$ – числовые значения, $\boldsymbol{a}=[\underline{a},\overline{a}]$ [13].

В основе решения поставленной задачи (1)–(3) лежат правила сравнения интервалов [4, 10]:

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b} \ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\underline{a}=\underline{b},\\ \overline{a}=\overline{b},\end{cases} \quad (4)$$

$$\boldsymbol{a}\ge\boldsymbol{b} \ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\underline{a}\ge\underline{b},\\ \overline{a}\ge\overline{b},\end{cases} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{a}\le\boldsymbol{b} \ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\underline{a}\le\underline{b},\\ \overline{a}\le\overline{b}.\end{cases} \quad (6)$$

Тогда, если выполняются условия

$$\begin{cases}\underline{a}<\underline{b},\\ \overline{a}>\overline{b},\end{cases} \text{или} \begin{cases}\underline{a}>\underline{b},\\ \overline{a}<\overline{b},\end{cases} \quad (7)$$

то интервалы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ будут являться несравнимыми или недоминирующими друг над другом.

Задача (1)–(3) может быть записана в явном интервальном виде

$$[\underline{F}(x),\overline{F}(x)] \to \max$$

$$[\underline{f}_i(x),\overline{f}_i(x)] \le [\underline{b}_i,\overline{b}_i],\ i=1,...,m,$$

$$x_j \in Z,\ j=1,...,n.$$

На основе правил (4)–(7) задачу (1)–(3) можно представить в виде совокупности пары детерминированных задач

$$\underline{F}(x) \to \max \quad (8)$$

$$\begin{cases}\underline{f}_i(x)\le\underline{b}_i,\ i=1,...,m,\\ \overline{f}_i(x)\le\overline{b}_i,\ i=1,...,m,\\ x_j\in Z,\ j=1,...,n.\end{cases} \quad (9)$$

и

$$\overline{F}(x) \to \max \quad (10)$$

$$\begin{cases}\underline{f}_i(x)\le\underline{b}_i,\ i=1,...,m,\\ \overline{f}_i(x)\le\overline{b}_i,\ i=1,...,m,\\ x_j\in Z,\ j=1,...,n.\end{cases} \quad (11)$$

В совокупности пара данных задач эквивалента исходной [5, 7].

Задачу (8)–(9) будем называть нижней задачей для исходной интервальной задачи (1)–(3), множество её оптимальных решений обозначим $M_н$.

Задачу (10)–(11) будем называть верхней задачей для исходной интервальной задачи (1)–(3), множество её оптимальных решений обозначим $M_в$.

Перейдём к нахождению оптимального решения $x^*$ задачи (1)–(3), основываясь на правилах сравнения интервалов (4)–(7). Пусть $x_н^* \in M_н$ и $x_в^* \in M_в$.

1. Пусть $M_н \cap M_в \ne \varnothing$. Тогда существует хотя бы одна пара $x_н^* = x_в^*$, и $\boldsymbol{F}(x_н^*)=\boldsymbol{F}(x_в^*)$. В этом случае $x^*=x_н^*=x_в^*$ и $\boldsymbol{F}(x^*)=\boldsymbol{F}^*$.

Таким образом, интервальная задача имеет оптимальное решение, если пересечение множеств оптимальных решений верхней и нижней задач не пусто [6].

2. Пусть $M_н \cap M_в = \varnothing$. Тогда для всех решений верхней и нижней задач выполнено $x_н^* \ne x_в^*$. $\boldsymbol{F}(x_н^*)=[\underline{F}(x_н^*),\overline{F}(x_н^*)]$, $\boldsymbol{F}(x_в^*)=[\underline{F}(x_в^*),\overline{F}(x_в^*)]$ и $\boldsymbol{F}(x_н^*)\ne\boldsymbol{F}(x_в^*)$. При этом $\underline{F}(x_н^*)\ge\underline{F}(x_в^*)$ в силу оптимальности $x_н^*$ для нижней задачи, и $\overline{F}(x_н^*)\le\overline{F}(x_в^*)$ в силу оптимальности $x_в^*$ для верхней задачи, то есть интервал $\boldsymbol{F}(x_н^*)$ вложен в интервал $\boldsymbol{F}(x_в^*)$, $[\underline{F}(x_н^*),\overline{F}(x_н^*)]\subset[\underline{F}(x_в^*),\overline{F}(x_в^*)]$ (рис. 1). Такие интервалы являются несравнимыми (недоминирующими друг над другом) по формулам (7).

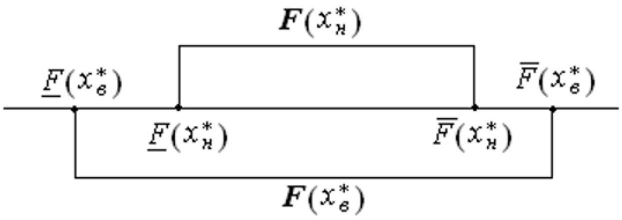


*Рис. 1. Вложенные интервалы*

В данном случае рассмотрим два подхода [6–8]:

1) оптимального решения интервальной задачи нет, если пересечение множеств оптимальных решений верхней и нижней задач пусто [6];

2) есть несколько Парето-оптимальных решений, в которых значения целевой функции (1) не доминируют друг над другом [7, 8].

**Определение 1.** Решение $x^*$ интервальной задачи (1)–(3) назовем Парето-оптимальным, если не существует какого-либо другого решения $\tilde{x}$, такого что одновременно $\overline{F}(\tilde{x}) > \overline{F}(x^*)$ и $\underline{F}(\tilde{x}) > \underline{F}(x^*)$.

Соответствующие значения интервальной целевой функции (1) решений $x^*$ и $\tilde{x}$ являются недоминирующими по правилу (7).

Если множества $M_н$ и $M_в$ изменить по следующим правилам:

$$M_н^* = \left\{x : \max_{x \in M_н} \boldsymbol{F}(x)\right\} \text{ и } M_в^* = \left\{x : \max_{x \in M_в} \boldsymbol{F}(x)\right\}, \quad (12)$$

то все решения из объединения этих двух множеств будут являться Парето-оптимальными (рис. 2).

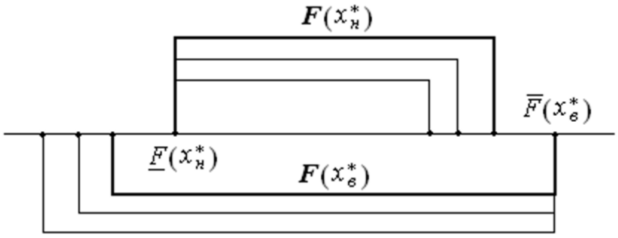


*Рис. 2. Совокупность интервалов, отвечающих одному решению*

В рамках второго подхода возникает проблема поиска всех Парето-оптимальных решений интервальной задачи (1)–(3) (рис. 3).

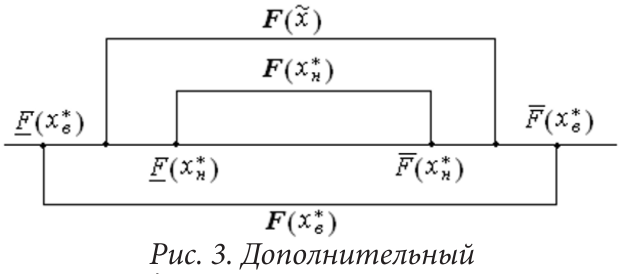


*Рис. 3. Дополнительный недоминирующий интервал*

## 3. ПОИСК ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СУБОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим вспомогательную задачу:

для задачи условной целочисленной линейной максимизации $\max_{x \in \Omega} F(x)$ найти последовательность субоптимальных решений, упорядоченных по значению целевой функции до оптимального.

Пусть $x^*$ – единственное оптимальное решение задачи $\max_{x \in \Omega} F(x)$. Для нахождения наименее удаленного по значению целевой функции к нему решения воспользуемся идеей алгоритма отсечений Гомори [3] и введём новое ограничение.

Не ограничивая общности, будем считать, что коэффициенты целевой функции $F(x)$ являются целыми числами [3].

**Утверждение.** Новое ограничение имеет вид

$$F(x) \le F(x^*) - 1$$

и удовлетворяет двум требованиям:

1) полученное оптимальное решение отсекается, то есть оно не удовлетворяет новому ограничению;

2) все другие допустимые точки исходной задачи должны удовлетворять этому ограничению.

**Доказательство.**

1) Доказательство первого требования очевидно.

2) Так как $x^*$ – единственное оптимальное решение задачи $\max_{x \in \Omega} F(x)$, то для всех $x \in \Omega \setminus \{x^*\}$ выполняется неравенство $F(x) < F(x^*)$. В виду того, что решается целочисленная задача, значение целевой функции может быть равно только целому числу. Поэтому разность двух целых чисел $F(x^*) - F(x)$, при условии $x \ne x^*$, будет больше или равна одному

$$F(x^*) - F(x) \ge 1,$$

$$F(x) \le F(x^*) - 1.$$

**Утверждение доказано.**

Таким образом, чтобы для задачи линейной целочисленной оптимизации $\max_{x \in \Omega} F(x)$ найти допустимое решение $x_2^*$, наименее удаленное по значению целевой функции от оптимального $x^*$, необходимо решить задачу

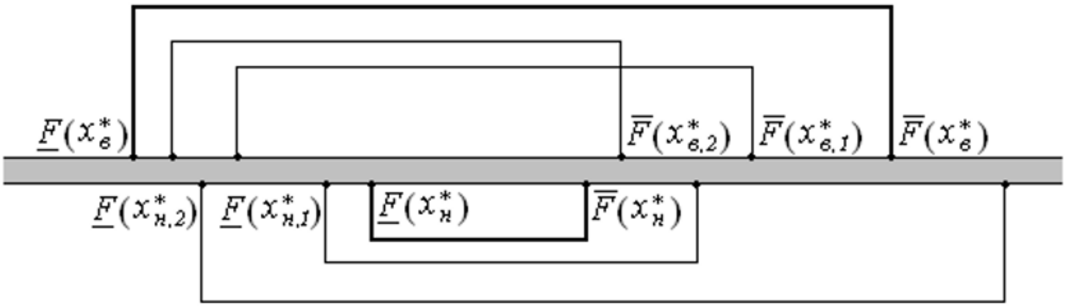


*Рис. 4. Совокупность интервалов*

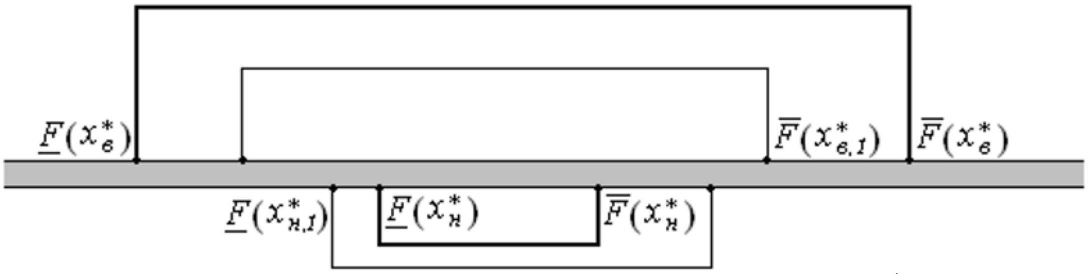


*Рис. 5. Парето-оптимальные решения интервальной задачи*

максимизации с той же целевой функцией, но с изменённым допустимым множеством

$$\Omega' = \Omega \cup \{x : F(x) \le F(x^*) - 1\}. \quad (13)$$

Продолжая процесс, получим последовательность субоптимальных решений $x^*$, $x_2^*$, $x_3^*$, $x_4^*$..., таких что

$$F(x^*) \ge F(x_2^*) \ge F(x_3^*) \ge F(x_4^*) \ge \ldots \quad (14)$$

Таким образом, получен алгоритм решения поставленной вспомогательной задачи.

Построим для нижней и верхней задач цепочки субоптимальных решений, тогда для интервальной задачи получим соответствующие наборы интервалов (рис. 4). Из их совокупности по правилу (7) выберем недоминирующие интервалы, при этом соответствующие им решения будут образовывать Парето-оптимальное множество задачи (1)–(3) (рис. 5).

## 4. АЛГОРИТМ

Алгоритм решения интервальной задачи (1)–(3).

1. Решить верхнюю задачу (8)–(9), сформировать множество $M_в$ – множество оптимальных решений.

Решить нижнюю задачу (10)–(11), сформировать множество $M_н$ – множество оптимальных решений.

2. Если $M_в \cap M_н \ne \varnothing$, то сформировать множество $M^* = M_в \cap M_н$ и перейти к п. 9, иначе перейти к п. 3.

3. Сформировать множества $M_н^*$ и $M_в^*$ по правилам (12).

4. Сформировать множество

$$M^* = M_н^* \cup M_в^*.$$

5. Предложенным способом найти последовательность субоптимальных решений $x^*_{н,\,k}$, $k = 1, \ldots, K$ для нижней задачи, таких что

$$\underline{F}(x_н^*) \ge \underline{F}(x^*_{н,2}) \ge \underline{F}(x^*_{н,3}) \ge \ldots$$

Процесс построения последовательности заканчивается, если

$$\underline{F}(x^*_{н,\,k}) < \underline{F}(x^*_в).$$

6. Предложенным способом найти последовательность субоптимальных решений $x^*_{в,\,l}$, $l = \overline{1, L}$ для верхней задачи, таких что

$$\overline{F}(x_в^*) \ge \overline{F}(x^*_{в,2}) \ge \overline{F}(x^*_{в,3}) \ge \ldots$$

Процесс построения последовательности заканчивается, если

$$\overline{F}(x^*_{в,\,l}) < \overline{F}(x^*_н).$$

7. Если выполнено $\overline{F}(x^*_{н,\,k}) > \overline{F}(x^*_н)$, то $x^*_{н,\,k}$ добавить во множество $M^*$, $M^* = M^* \cup \{x^*_{н,\,k}\}$. Проверка выполняется для всех $k = 1, \ldots, K$.

8. Если выполнено $\underline{F}(x^*_{в,\,l}) > \underline{F}(x^*_в)$, то $x^*_{в,\,l}$ добавить во множество $M^*$, $M^* = M^* \cup \{x^*_{в,\,l}\}$.

Проверка выполняется для всех $l = 1,...,L$.

9. Полученное множество $M^*$ – множество Парето-оптимальных решений задачи (1)–(3).

## 5. ПРИМЕР

Найти все Парето-оптимальные решения следующей задачи

$$\mathrm{F}(x, y) = \left[F_1(x, y), F_2(x, y)\right] \to \max$$

$$F_1(x, y) = x - 2y,$$

$$F_2(x, y) = 3x - y,$$

$$\begin{cases} x - y \le 3, \\ x + y \le 7, \end{cases}$$

$$x, y \ge 0,$$

$$x, y \in Z.$$

Заметим, что в данной задаче целевая функция является интервальной, а допустимое множество задано обычными функциями, таким образом, нижняя и верхняя задачи отличаются только целевыми функциями $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ соответственно.

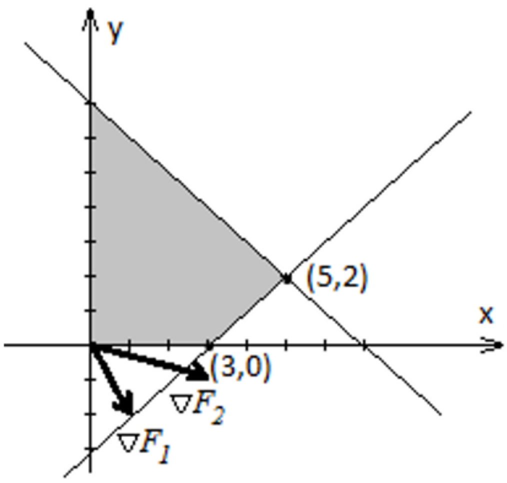


*Рис. 6. Графическое решение*

Оптимальное решение нижней задачи $(x, y)_1^* = (3,0)$, а верхней – $(x, y)_2^* = (5,2)$ (рис. 6).

Таким образом,

$$F_1^*(3,0) = 3,\ F_2(3,0) = 9,\ \mathrm{F}(3,0) = [3,\ 9];$$

$$F_1\ (5,2) = 1,\ F_2^*(5,2) = 13,\ \mathrm{F}(5,2) = [1,\ 13].$$

Так как интервалы [3, 9] и [1, 13] являются недоминирующими друг над другом (рис. 7), то решения $(x, y)_1^* = (3,0)$ и $(x, y)_2^* = (5,2)$ будут Парето-оптимальными для исходной задачи.

Проверим, есть ли еще Парето-оптимальные решения исходной задачи. Для этого построим последовательность субоптимальных решений для верхней и нижней задач. Из рисунка 6 видно, что наименее удаленное от оптимального является решение $(x, y)_3 = (4,1)$, причем и для верхней, и для нижней задачи. При этом, $F_1\ (4,1) = 2$, $F_2(4,1) = 11$, $\mathrm{F}(4,1) = [2,\ 11]$. Заметим, что данный интервал также является несравнимым с [3, 9] и [1, 13] (рис. 6). Таким образом, $(x, y)_3 = (4,1)$ также является Парето-оптимальным решением исходной задачи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гребенник И. В.* Ранжирование альтернативных решений на основе интервальной информации о важности их характеристик / И. В. Гребенник, К. Э. Петров, Л. В. Колесник // Вестник Херсонского государственного технического университета, 2005. – № 1(21). – С. 42–47.

2. *Колесник Л. В.* Метод рационального подбора и расстановки кадров // Проблемы информационных технологий. – 2009. – № 1 (005). – С. 101–104.

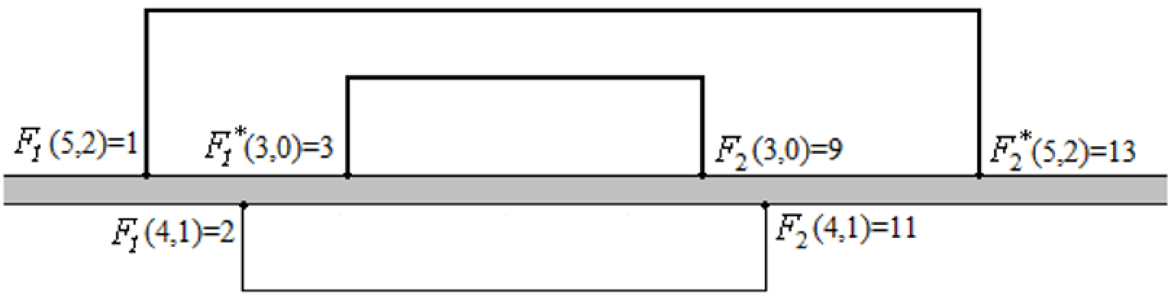


*Рис. 7. Недоминирующие интервалы и Парето-оптимальные решения*

3. *Корбут А. А.* Дискретное программирование / А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн [под ред. Д.Б. Юдина]. – М. : Наука, 1969. – 368 с.

4. *Левин В. И.* Дискретная оптимизация в условиях интервальной неопределенности // Автоматика и телемеханика, 1992. – № 7. – С. 97–107.

5. *Левин В. И.* Интервальный подход к оптимизации в условиях неоп-ределенности // Информационные технологии, 1999. – № 1. – С. 7–12.

6. *Левин В. И.* Сравнение интервалов и оптимизация в условиях неопределённости // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки, 2002. – Вып. 7. – № 3. – С. 383–389.

7. *Медведев С. Н.* Интервальная задача о назначениях. Анализ решения / С. Н. Медведев // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. трудов VI Междунар. конф., Воронеж, 10–16 сентября 2013г. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т., 2013. – С. 156-158.

8. *Медведев С. Н.* О существовании оптимального решения интервальной задачи о назначениях / С. Н. Медведев, О. А. Медведева // Фундаментальные и прикладные исследования: проблемы и результаты: сборник материалов XIII Международной научно-практической конференции / Под общ. ред. С. С. Чернова. – Новосибирск : Издательство ЦРНС, 2014. – С. 241–245.

9. *Фидлер М.* Задачи линейной оптимизации с неточными данными / М. Фидлер, Й. Недома, Я. Рамик, И. Рон, К. Циммерман. – М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт исследований, 2008. – 288 с.

10. *Шарый С. П.* Решение интервальной линейной задачи о допусках // Автоматика и телемеханика, 2004. – №10. – С. 147–162.

11. *Шарый С.П.* Конечномерный интервальный анализ. – Режим доступа: http://www.nsc.ru/interval/?page=Library/InteBooks.

12. *Jansson C.* Rigorous Lower and Upper Bounds in Linear Programming / C. Jansson // SIAM J. Optim., 2004. – Vol. 14. – № 3. – pp. 914–935.

13. *Kearfott B.* Standardized notation in interval analysis / B. Kearfott, M. Nakao, A. Neumaier, S. Rump, S.P. Shary, P. Van Hentenryck // Вычислительные технологии. – 2010. – Т. 15, № 1. – С. 7–13.

**Медведев Сергей Николаевич** – канд. физ.-мат. наук, преподаватель кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета.
E-mail: s_n_medvedev@mail.ru

**Medvedev Sergey N.** – Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Lecturer of the Department of Computing Mathematics and Applied Information Technology, Applied Mathematics, Informatics and Mechanics Faculty, Voronezh State University.
E-mail: s_n_medvedev@mail.ru

**Медведева Ольга Александровна** – канд. физ.-мат. наук, преподаватель кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета.
E-mail: s_n_medvedev @mail.ru

**Medvedeva Olga A.** – Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Lecturer of the Department of Computing Mathematics and Applied Information Technology, Applied Mathematics, Informatics and Mechanics Faculty, Voronezh State University.
E-mail: s_n_medvedev@mail.ru