

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССОБМЕНА НА ПРОНИЦАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ГИПЕРЗВУКОВЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ. II. О НЕКОТОРЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ

Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко

*Казанский национальный исследовательский технический университет
(КНИТУ-КАИ) им. А. Н. Туполева (г. Казань)*

Поступила в редакцию 20.09.2016 г.

Аннотация. Обсуждаются результаты вычислительных экспериментов по математическому моделированию эффективной тепловой защиты проницаемых поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов. Предложены и программно реализованы алгоритмы восстановления управления для обратных задач тепломассообмена в интерполяционной и аппроксимационной постановках. Два типа законов управлений рассмотрены в качестве примеров восстановления для обратной задачи в интерполяционной постановке. Исследуется влияние температурного фактора на восстановление управления. Изучается различие в характере чувствительности управляемых параметров к ступенчатому изменению управления (вдува).

Ключевые слова: тепломассообмен, гиперзвуковые течения, ламинарный пограничный слой, управление, прямая задача, обратная задача, интерполяционная постановка, аппроксимационная постановка, обобщённые интегральные соотношения, вычислительный эксперимент, чувствительность, точка переключения.

Annotation. The results of computational experiments on the hypersonic aircraft permeable surfaces effective heat protection mathematical modeling are considered. Some algorithms of control restoration are suggested for the interpolation and approximation statements of heat and mass transfer inverse problems. Both the algorithms are realized as programs. Two types of blowing laws restoration for the inverse problem in interpolation statement are presented as the examples. The influence of the temperature factor on the blowing restoration is investigated. The different character of sensitivity of controllable parameters respectively to step changing of control (the blowing) is studied.

Keywords: heat and mass transfer; hypersonic flows; laminar boundary layer; control; direct problem; inverse problem; interpolation statement; approximation statement, generalized integral relations, computational experiment, sensitivity, switching point.

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа, являющаяся расширенным вариантом второй части доклада [1], [2], представленного 13 сентября 2016 на секции «Системный анализ и современные задачи управления. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент» Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», продолжает исследования [3]. Первая часть доклада, по-

свящённая некоторым постановкам обратных задач тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА) и обоснованию возможности восстановления управления, изложена в [4]. Являясь продолжением [4], данная статья сохраняет принятые в ней обозначения и сокращения. Характеристики ПС, используемые при проведении вычислительных экспериментов, получены численным интегрированием системы ОДУ [5], выведенной с помощью метода обобщённых интегральных соотношений А. А. Дородницына.

1. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ В ИНТЕРПОЛЯЦИОННОМ СЛУЧАЕ

В виде программы реализован алгоритм *интерполяционного* построения вдува, который для заданных сеток X_1 , X_2 , последовательности контрольных значений q^\vee , погрешности $\varepsilon_1 > 0$ и ограничений $I_{j,k}$, где $j = 1, \dots, n_1$, $k = 0, \dots, \nu_1$, $\nu_1 \geq 0$: **либо** строит кусочно-полиномиальное на X_1 управление $m^\sim(x)$, удовлетворяющее условиям (4) и (10), **либо** сообщает о невозможности такого восстановления для заданных параметров и предлагает найти аппроксимационное решение. Здесь и далее, если не указано иное, номера формул и утверждений соответствуют [4].

Процесс решения начинается с нахождения управления m_0 для ТТ. Для этого два раза решается нелинейная система (15) или (31) из [5]: один раз для пробного значения $m_{0,(0)} = b_{0,0}$, второй – для пробного значения $m_{0,(1)} = t_{0,0}$ (индекс в скобках обозначает номер итерации). По полученным значениям $\bar{\theta}_0$, $\bar{\theta}_1$, $\bar{\omega}_0$, $\bar{\omega}_1$ вычисляется интервал $[q_{0,(1)}; q_{0,(0)}]$ возможной принадлежности q_0 . Если $q_0^\vee \in [q_{0,(1)}; q_{0,(0)}]$, то более точные (чем $m_{0,(0)}$ и $m_{0,(1)}$) значения $m_{0,(i)}$ определяются (в силу Утверждения 5.1) методом деления отрезка пополам (каждый раз приходится решать нелинейную систему), пока для $m_{0,(i_{final}(0))}$ не будет достигнуто

$$\left| q_{0,(i_{final}(0))}^\sim - q_0^\vee \right| \leq \varepsilon_1.$$

Если заданной точности достичь не удаётся (если заданное значение ε_1 оказалось меньше ε_{\min}), процесс завершится при прекращении изменений в $m_{0,(i)}^\sim(x)$ и/или $q_{0,(i)}^\sim$ с сообщением о достижении предела машинного представления. Если $q_0^\vee \notin [q_{0,(1)}; q_{0,(0)}]$, то на этом процесс завершается с сообщением, что в точке x_0^\wedge нарушено условие (4).

Далее, для каждого интервала $[x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge]$, начиная с $[x_0^\wedge; x_1^\wedge]$, производится построение множеств $X_{1,j}^+ = X_1^+ \cap [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge]$ и проверяется соответствие возможной $\mu_1 \geq \nu_1 + 1$ и необходимой $\nu_{2,j} + 1$ (для Утверждения 4.1) степени

искового полинома для полученного множества $X_{1,j}^+$. Если заранее не задано общее для всех интервалов значение μ_1 , и выполнено $\nu_{2,j} \geq \nu_1$, то искомая степень берётся равной $\mu_{1,j} = \nu_{2,j} + 1$. Если общее значение μ_1 задано, но не совпадает с $\mu_{1,j} = \nu_{2,j} + 1$, или если $\nu_{2,j} < \nu_1$, то процесс завершается с сообщением, что на интервале $[x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge]$ задача переопределена.

Далее, для каждого интервала $[x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge]$, начиная с $[x_0^\wedge; x_1^\wedge]$, производится (последовательными приближениями) поиск параметров многочлена, задающего элемент $m_{j,(i)}^\sim(x)$ так, чтобы на $[x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge]$ выполнялись условия (10) и (4). В процессе приближений каждый раз приходится интегрировать на $[x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge]$ систему ОДУ (13) или (29) из [5] с начальными условиями, полученными **либо** (для x_0^\wedge) при решении нелинейной системы, **либо** (для $x_{j-1}^\wedge \neq x_0^\wedge$) после завершения поиска параметров элемента $m_{j-1,(i_{final}(j-1))}^\sim(x)$. Если в процессе приближений при выполнении (4) удаётся достичь требуемой точности ε_1 , то для $[x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge]$ процесс считается *завершённым успешно*, и (при $j < n_1$) происходит переход к интервалу $[x_j^\wedge; x_{j+1}^\wedge]$. Если в процессе приближений установлено, что одновременное удовлетворение условий (10) и (4) невозможно, то процесс завершается с указанием: номера j интервала, где построение было прервано, и достигнутого значения $|q_{j,(i)}^\sim - q_j^\vee|$. Процесс может (также, как и в точке x_0^\wedge) завершиться при достижении предела машинного представления.

Замечания. 1) Если общее значение μ_1 не задано, то на $[x_0^\wedge; x_1^\wedge]$ предусмотрена возможность контроля-коррекции степени $\mu_{1,0}$ для учёта обнуления нечётных производных.

2) Для недоопределённой задачи имеется возможность поиска решения с обнулением (лишних) старших коэффициентов.

3) Использование R_∞ в (10) в интерполяционной постановке позволяет строить $m^\sim(x)$ «интервал за интервалом», поскольку (для $j = 1, \dots, n_2$)

$$\begin{aligned} & \max_{k=0, \dots, j} |q_k^\sim - q_k^\vee| = \\ & = \max \left\{ |q_j^\sim - q_j^\vee|, \max_{k=0, \dots, j-1} |q_k^\sim - q_k^\vee| \right\}. \end{aligned}$$

4) Для $f^\vee = (f_j^\vee)_{j=0,\dots,n_2}$ с учётом $\lim_{x \rightarrow 0} f(x; m_0, \tau_0, s_0) = 0$ для нелинейной системы используется аппроксимация:

$$\bar{f}(m_0, \tau_0, s_0) \approx \frac{f(x_1^\vee; m_0, \tau_0, s_0)}{(x_1^\vee)^k}.$$

2. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ В АППРОКСИМАЦИОННОМ СЛУЧАЕ

Решение задачи (12) содержит в себе два этапа – построение начального приближения, удовлетворяющего всем условиям (4), и последовательное его улучшение.

Первый этап не относится напрямую к обратным задачам тепломассообмена, однако является неотъемлемой частью решения. Будем предполагать, что набор интервалов-ограничений $I_{j,k} = [b_{j,k}; t_{j,k}]$ из условий (4), а также требование непрерывности $m^\sim(x)$, не являются противоречивыми. Более того, будем предполагать, что множества коэффициентов искомым элементов $m_j^\sim(x)$ являются выпуклыми для каждого $[x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge]$. По набору нижних и верхних ограничений $b_{j,0}$ и $t_{j,0}$ построим кусочно-линейные функции (использованы приёмы из [6], [7]). Для этого определим (при $j = 1, \dots, n_1 - 1$) набор значений

$$b_j \uparrow = \max(b_{j-1,0}; b_{j,0}), \quad t_j \downarrow = \min(t_{j-1,0}; t_{j,0}).$$

По предположению $b_j \uparrow \leq t_j \downarrow$ для $j = 1, \dots, n_1 - 1$. Обозначим

$$b_0 \uparrow = b_{0,0}, \quad t_0 \downarrow = t_{0,0},$$

$$b_{n_1} \uparrow = b_{n_1,0}, \quad t_{n_1} \downarrow = t_{n_1,0}.$$

Для $x \in [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge]$, $j = 1, \dots, n_1$ введём

$$b_0(x) = b_{j-1} \uparrow \cdot (x - x_{j-1}^\wedge) + b_j \uparrow \cdot (x - x_j^\wedge),$$

$$t_0(x) = t_{j-1} \downarrow \cdot (x - x_{j-1}^\wedge) + t_j \downarrow \cdot (x - x_j^\wedge).$$

Функция

$$a(x; \lambda) = b_0(x) \cdot \lambda + t_0(x) \cdot (1 - \lambda)$$

при всех $\lambda \in [0; 1]$ удовлетворяет всем условиям нулевого порядка, т. е.

$$a(x; \lambda) \in I_{j,0} = [b_{j,0}; t_{j,0}], \quad x \in [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge],$$

$$j = 1, \dots, n_1.$$

Будем предполагать, что существует, по крайней мере, одно значение $\lambda^* \in [0; 1]$, при котором $a(x; \lambda^*)$ удовлетворяет всем условиям (4).

При описании второго этапа решения в аппроксимационном случае, будем обозначать номер итерации при построении последовательностей приближённых решений $(m_{(i)}^\sim(x))_{i=1,\dots,i_{final}}$ и вычисляемых значений $(q_{(i)}^\sim)_{i=1,\dots,i_{final}}$ индексом в скобках.

В качестве начального приближения используем $m_{(1)}^\sim(x) = a(x; \lambda^*)$.

В виде программы реализован алгоритм нахождения последовательных приближений к решению экстремальной задачи (12), который для задачи аппроксимации (при заданных $p \in [1; +\infty]$ и $\varepsilon_1 > 0$) строит последовательные приближения $m_{(j)}^\sim(x)$ решения задачи (12), удовлетворяющие (4). Если для пары $(m_{(i)}^\sim; q_{(i)}^\sim)$ значение $R_p(q_{(i)}^\sim; q^\vee) > \varepsilon_1$, то осуществляется построение направления наискорейшего уменьшения функции $R_p(q_{(i)}^\sim; q^\vee)$. Далее осуществляется продвижение в соответствии с заданными ограничениями (как в [8], [9]). При нахождении решения $(m_{(i)}^\sim; q_{(i)}^\sim)$ со значением $R_p(q_{(i)}^\sim; q^\vee) \leq \varepsilon_1$ поиск завершается. Если окажется, что заданное $\varepsilon_1 < R_p^*(q^\vee)$, то процесс завершается при обнаружении прекращения изменений в $R_p(q_{(i)}^\sim; q^\vee)$, что расценивается, как построенное приближённое решение $(m_{(i)}^\sim; q_{(i)}^\sim)$ задачи (12) в пределах машинной точности (i_{final} полагается равным i). Значение $R_p(q_{(i_{final})}^\sim; q^\vee)$ может быть использовано в качестве оценки для $R_p^*(q^\vee)$.

Замечания. 1) В процессе поиска приближения приходится многократно интегрировать ОДУ (13) или (29) из [5] по всему интервалу $X = [0; 1]$ (на каждой итерации необходимо $(n_1 + 1)$ раз произвести такое интегрирование). Поскольку в пределах одной итерации эти действия могут быть выполнены независимо друг от друга, в дальнейшем планируется проверить, насколько использование современного графического процессора общего назначения, содержащего несколько ядер для вычислений с плавающей точкой, может ускорить вычисления.

2) Программа позволяет использовать f^\vee вместо q^\vee .

3) Реализованы варианты с изменением некоторых и с добавлением новых контрольных значений.

4) Отметим, что описанный алгоритм аппроксимационного решения осуществляет в общем случае изменения приближения по всем окнам X_1 (в отличие от описанного выше варианта решения интерполяционного случая). Разрешение изменений только в некоторых окнах не ускоряют процесса построения аппроксимационного решения, поскольку, во-первых, интегрирование ОДУ в любом случае потребует провести от изменённого участка до $x_n^{\wedge} = 1$ (вниз по потоку), во-вторых, после изменений в одном окне следует проверить возможность изменений в остальных.

3. О ВЛИЯНИИ ТЕМПЕРАТУРНОГО ФАКТОРА НА ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВДУВА

Приведём два примера интерполяционных восстановлений вдувов для локальных ТП и НТ, аналогичных рассмотренным в [10], при различных постоянных законах ТФ $\tau_w \in \{0,10; 0,15; \dots; 0,85; 0,90\}$ с ограничением $I_{j,0} = [0;1]$ для случая обтекания боковой поверхности кругового цилиндра при $H = 10$ [км], $R = 0,1$ [м], $M_\infty = 10$.

Для **постоянного вдува** $m \equiv 0,3$ при $\tau_w \equiv 0,25$ с помощью программы, реализующей прямую задачу, были получены последовательности значений локальных ТП и НТ. К ним была применена процедура интерполяционного восстановления вдува при $\tau_w \in \{0,10; 0,15; \dots; 0,85; 0,90\}$. На рис. 1 представлены законы \tilde{m} , построенные по ТП, на рис. 2 – соответственно – по НТ. Для значений $\tau_w \geq 0,534$ из-за ограничения $b_{j,0} = 0$ на вдув – построение по ТП невозможно. Аналогично, при $\tau_w \geq 0,755$ для НТ – срабатывает ограничение $t_{j,0} = 1$.

Для закона «**вертикальная трапеция**»

$$m(x; m_0, m_1) = m_0 \cdot (1 - x) + m_1 \cdot x$$

при $m_0 = 0$ и $m_1 = 0,3996$

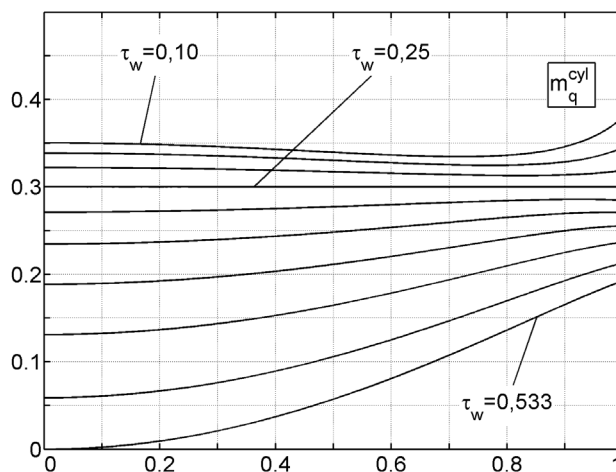


Рис. 1. Вдувы $\tilde{m}(x)$, восстановленные по локальным ТП

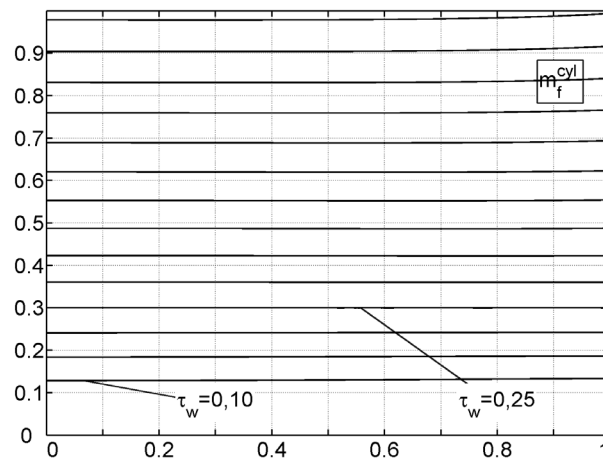


Рис. 2. Вдувы $\tilde{m}(x)$, восстановленные по локальным НТ

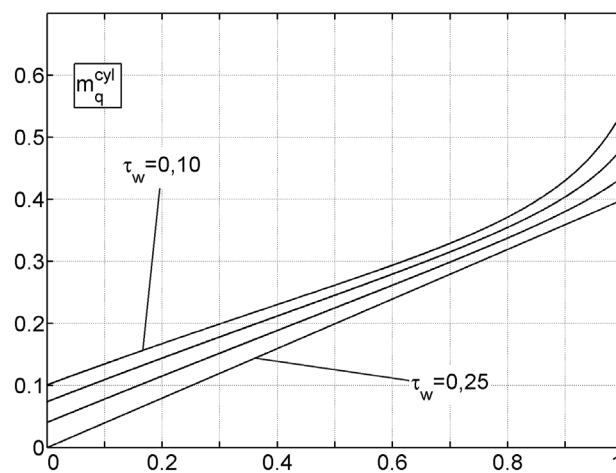


Рис. 3. Вдувы $\tilde{m}(x)$, восстановленные по локальным ТП

(кривая 7 в табл. 6 и на рис. 4 из [10], $\tau_w \equiv 0,25$) были проделаны те же операции: к полученным ТП и НТ была применена процедура интерполяционного восстановления вдува при

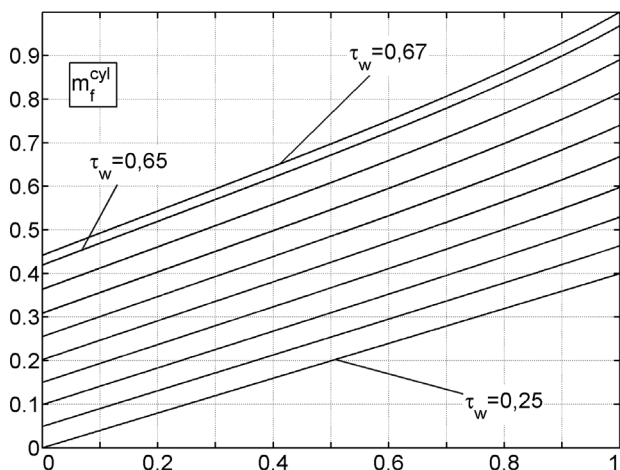


Рис. 4. Вдувы $\tilde{m}(x)$, восстановленные по локальным НТ

$\tau_w \in \{0,10; 0,15; \dots; 0,85; 0,90\}$. На рис. 3 и 4 представлены вдувы, построенные по ТП и по НТ.

Вдвух становится меньше $b_{j,0} = 0$ при $\tau_w > 0,25$ при восстановлении по ТП, а при $\tau_w < 0,25$ – по НТ. Кроме того, при $\tau_w \geq 0,67$ для НТ достигается ограничение $t_{j,0} = 1$.

4. ДОПУСТИМЫЕ ФОРМЫ ЛОКАЛЬНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ ТРЕНИЯ

Следует отметить различный характер чувствительности q и f к ступенчатому (дискретному) изменению управления $m(x)$. Чувствительность q существенно падает при приближении точки переключения x_* к 1, у f это менее заметно.

На рис. 5 приведены зависимости локальных ТП, на рис. 6 – локальных НТ (обтекание боковой поверхности цилиндра, параметры соответствуют п. 3) от локальной координаты.

Кривые соответствуют законам вдува, обобщающим закон «ступенька» [10]:

$$m(x) = m(x; m_1, m_2, x_*) = \begin{cases} m_1, & x \in [0; x_*); \\ m_2, & x \in (x_*; 1], \end{cases}$$

где $x_* \in \{0,01; 0,05; 0,10; 0,15; \dots; 0,95\}$,

$$\begin{cases} m_1 \equiv 0,3; \\ m_2 \in \{0; 0,3; 1\}. \end{cases}$$

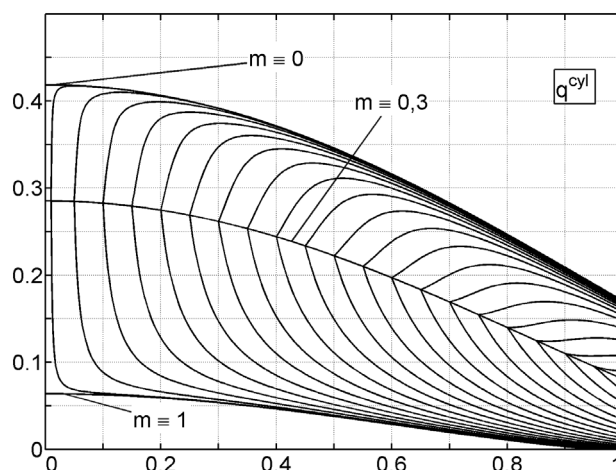


Рис. 5. Реакции локальных ТП q на ступенчатое изменение вдува

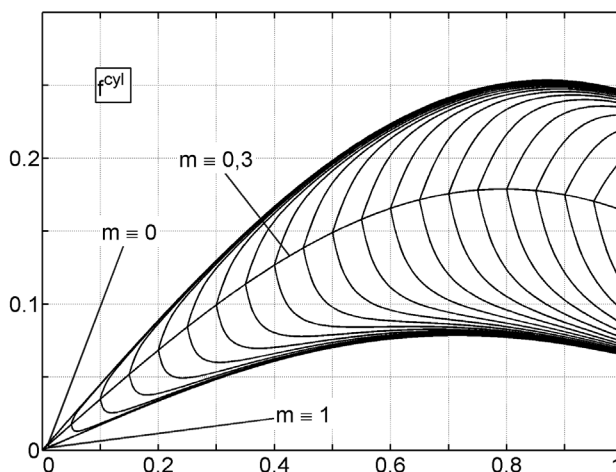


Рис. 6. Реакции локальных НТ f на ступенчатое изменение вдува

ВЫВОДЫ

1. Проведённые вычислительные эксперименты показали, что при восстановлении управления $\tilde{m}(x)$ по q^\vee (или f^\vee), вычисленным в прямой задаче по заданным законам $m(x)$, $\tau_w(x)$, $s(x)$, значения интегральных характеристик $Q(m, \tau_w, s)$, $F(m, \tau_w, s)$, $N(m, \tau_w, s)$ в общем случае отличаются от значений $\tilde{Q} = Q(\tilde{m}, \tau_w, s)$, $\tilde{F} = F(\tilde{m}, \tau_w, s)$, $\tilde{N} = N(\tilde{m}, \tau_w, s)$, даже при совпадении q^\vee с \tilde{q}^\vee (или f^\vee с \tilde{f}^\vee), хотя и незначительно. Отличие вызвано тем, что используемая для интегрирования ОДУ сетка $X_3 = (x_j^\vee)_{j=0, \dots, n_3}$ при получении q^\vee (или f^\vee) в прямой задаче не всегда совпадает с аналогичной в обратной, и, кроме того, является более частой, чем сетки управления и наблюдения. Для полного со-

впадения требуется, чтобы аппроксимации функций $m(x)$ и $\tilde{m}(x)$ в узлах X_3 осуществлялись по одним и тем же предположениям.

2. Анализ результатов вычислительных экспериментов выявил недостаток предложенного алгоритма решения для интерполяционного случая, связанный с отмеченным снижением чувствительности q и f к изменению управления $m(x)$: элемент \tilde{m}_j , найденный для $[x_{j-1}^{\wedge}; x_j^{\wedge}]$ с погрешностью, но объявленный приемлемым (для заданной точности $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_{\min}$) может привести к тому, что в следующих окнах (вниз по потоку) вычисленные \tilde{q} могут дать формы, недопустимые даже для ступенчатого (дискретного) изменения управления $m(x)$. Уменьшение значения ε_1 без изменения в алгоритме не всегда приводит к улучшению ситуации. Результатом явилась модификация алгоритма, в которой осуществляется возврат к уже обработанным окнам (вверх по потоку). В дальнейшем планируются изменения в программном обеспечении с целью увеличения точности по сравнению с применяемым сейчас 10-байтовым представлением вещественных чисел.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построенные программные реализации предложенных алгоритмов позволяют:

1) тестировать на реализуемость на поверхности ГЛА последовательности значений локальных ТП q^{\vee} или НТ f^{\vee} ;

2) исследовать влияние изменения ТФ на возможность поддержания заданных условий аэротермохимического и аэродинамического нагружения проницаемой поверхности ГЛА;

3) определять диапазон допустимых изменений ТФ, позволяющий реализовывать различные газодинамические и конструкционные ограничения;

4) синтезировать режим управления вдувом для компенсации изменения режима управления ТФ.

Полученный в результате вычислительных экспериментов материал может быть использован для сравнения с данными натуральных экспериментов.

Изучение вопросов устойчивости решений ОЗ теплообмена составляет предмет отдельного исследования.

Работа выполнялась в рамках проектной части государственного задания №13.262.201.2014К.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Обратные задачи теплообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. I. О возможности восстановления управления / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». Сборник трудов Междунар. научно-технической конф., Воронеж, 12–15 сентября 2016 г. – Воронеж : Научно-исследовательские публикации, 2016. – С. 193–196.

2. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Обратные задачи теплообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. II. Вычислительные эксперименты / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». Сборник трудов Междунар. научно-технической конф., Воронеж, 12–15 сентября 2016 г. – Воронеж : Научно-исследовательские публикации, 2016. – С. 197–199.

3. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Об одной обратной задаче теплообмена / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Герценовские чтения 2016. Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования» в электронном журнале Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2016. – № 2. – Ч. 2. – С. 50–56. – URL: <http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/herzen2016.pdf> (дата обращения: 12.07.2016).

4. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Обратные задачи теплообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. I. О некоторых постановках и возможности восстановления управления / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник

Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 4. – С. 5–12.

5. Бильченко Н. Г. Метод А. А. Дородницына в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 1. – С. 5–14.

6. Бильченко Г. Г. Листность обобщённых интегралов Чизотти / Г. Г. Бильченко // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ-2011): материалы IV Международной научной конференции, Воронеж, 12–17 сентября 2011 г. – Воронеж: Издательско-полиграф. центр Воронежского гос. ун-та, 2011. – С. 31–33.

7. Бильченко Г. Г. Звездообразное изменение строго почти-выпуклого интеграла Чизотти / Г. Г. Бильченко // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». Сборник трудов Международной конференции, Воронеж, 26–28 сентября 2011 г. – Воронеж: Издательско-полиграф. центр Воронежского гос. ун-та, 2011. – С. 69–71.

Бильченко Григорий Григорьевич – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории № 16 (при кафедре теплотехники и энергетического машиностроения) Казанского национального исследовательского технического университета (КНИТУ-КАИ) им. А. Н. Туполева.
Тел.: +7-905-319-1843
E-mail: ggbil2@gmail.com

Бильченко Наталья Григорьевна – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории № 16 (при кафедре теплотехники и энергетического машиностроения) Казанского национального исследовательского технического университета (КНИТУ-КАИ) им. А. Н. Туполева.
Тел.: +7-905-319-1842
E-mail: bilchnat@gmail.com

8. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Сравнительный анализ применения некоторых специальных законов вдува в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых пористых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики»: Сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 16–18 декабря 2015 г. – Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2015. – С. 137–139.

9. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Классы решений задач оптимального управления пограничным слоем на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «ВЗМШ С. Г. Крейна-2016»: Материалы междунар. конф. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – С. 82–86.

10. Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения «простых» законов вдува / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 95–102.

Bilchenko Grigoriy Grigorievich – Candidate of Science in Physics and Mathematics, Researcher of Research Laboratory #16, Department of Heat Engineering and Power Engineering Machinery, Kazan National Research Technical University (KNRTU-KAI) named after A. N. Tupolev.
Tel.: +7-905-319-1843
E-mail: ggbil2@gmail.com

Bilchenko Natalya Grigorievna – Candidate of Science in Physics and Mathematics, Researcher of Research Laboratory #16, Department of Heat Engineering and Power Engineering Machinery, Kazan National Research Technical University (KNRTU-KAI) named after A. N. Tupolev.
Tel.: +7-905-319-1842
E-mail: bilchnat@gmail.com