

**ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССОБМЕНА
НА ПРОНИЦАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ГИПЕРЗВУКОВЫХ
ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ.
I. О НЕКОТОРЫХ ПОСТАНОВКАХ И ВОЗМОЖНОСТИ
ВОССТАНОВЛЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ**

Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко

*Казанский национальный исследовательский технический университет
(КНИТУ-КАИ) им. А. Н. Туполева (г. Казань)*

Поступила в редакцию 20.09.2016 г.

Аннотация. Рассматриваются задачи математического моделирования эффективной тепловой защиты проницаемых цилиндрических и сферических поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов. Приведены постановки прямых и обратных задач тепло-массообмена. Обсуждаются различия между интерполяционной и аппроксимационной постановками обратной задачи. Найдены условия (диапазоны значений как неизменяемых, так и управляющих параметров) достаточные для восстановления управления в точке торможения. Приводятся результаты вычислительных экспериментов. В основу расчётов положен метод обобщённых интегральных соотношений А. А. Дородницына.

Ключевые слова: теплообмен, гиперзвуковые течения, ламинарный пограничный слой, управление, прямая задача, обратная задача, интерполяционная постановка, аппроксимационная постановка, обобщённые интегральные соотношения.

Annotation. The hypersonic aircraft permeable cylindrical and spherical surfaces effective heat protection mathematical modeling problems are considered. The statements of direct and inverse problems of heat and mass transfer are given. The differences between the interpolation and the approximation statements of inverse problem are discussed. The conditions (the diapasons of values of both the unchangeable and controlling parameters) sufficient for control restoration in the stagnation point are found. The computational experiments results are presented. The A. A. Dorodnicyn's generalized integral relations method has been used as calculation basis.

Keywords: heat and mass transfer; hypersonic flows; laminar boundary layer; control; direct problem; inverse problem; interpolation statement; approximation statement, generalized integral relations.

ВВЕДЕНИЕ

Возникновение интереса к постановке и решению обратных задач теплообмена в гиперзвуковой аэродинамике связано с имеющими высокую практическую ценность вопросами:

1) можно ли синтезировать законы управления, обеспечивающие заранее заданные

требования к термосиловому нагружению поверхности гиперзвукового летательного аппарата?

2) можно ли компенсировать нарушения в работе одной из систем управления (как крайний случай, рассматривается даже её отказ) с помощью изменения режима работы других?

Ответы на эти вопросы частично даёт данная работа, являющаяся расширенным вариантом первой части доклада [1], [2], представленного 13 сентября 2016 на секции

«Системный анализ и современные задачи управления. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент» Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», и продолжающая исследования [3]. Вторая часть доклада, посвящённая обсуждению результатов некоторых вычислительных экспериментов, содержится в [4].

1. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОМАССОБМЕНА

В работах [5]–[9] была рассмотрена следующая *прямая* задача. По заданным управлениям: $m(x)$ – вдуву в ламинарный пограничный слой (ПС), $\tau_w(x)$ – температурному фактору (ТФ) (или степени предварительной охлаждённости (СПО) поверхности): $\tau_w(x) = T_w(x)/T_{e_0}$, где T_w – температура стенки, а T_{e_0} – температура в точке торможения (ТТ) потока, и $s(x) = \sigma B_0^2(x)$ – магнитному полю (МП), где $x \in X = [0; 1]$, **требуется** рассчитать параметры модели ПС [5] и определить: локальный тепловой поток (ТП) $q(x; m, \tau_w, s)$ и напряжение трения (НТ) $f(x; m, \tau_w, s)$, интегральные ТП $Q(m, \tau_w, s)$ и силу трения $F(m, \tau_w, s)$, а также мощность $N(m, \tau_w, s)$ системы, обеспечивающей вдув:

$$(m, \tau_w, s) \rightarrow (q, f; Q, F, N). \quad (1)$$

В работах [5]–[8] для заданных $\tau_w(x)$ и $s(x)$ оптимальное управление $m(x)$ (среди непрерывных функций) было построено, как решение экстремальной задачи

$$Q(m, \tau_w, s) \rightarrow \inf_m \quad (2)$$

при наличии ограничения

$$N(m, \tau_w, s) \leq N_{\max}. \quad (3)$$

Экстремальные значения Q и соответствующие управления $m(x)$ были построены в пределах машинной точности. Были предложены [8] специальные виды $m(x)$, дающие достаточно хорошие приближения к экстремальным значениям Q .

Замечание. При расчётах на ЭВМ законы $m(x)$, $\tau_w(x)$ и $s(x)$ задавались, а $q(x)$ и $f(x)$

вычислялись [10] на сетках $X = (x_j)_{j=0, \dots, n}$ вида

$$x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1.$$

2. ОБРАТНЫЕ ПО ВДУВУ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССОБМЕНА

Аналогично [3] сформулируем **обратную** по управлению $m(x)$ в (1) задачу (ОЗ). Пусть **заданы**:

- 1) непрерывно-дифференцируемое управление $\tau_w(x)$, $x \in X = [0; 1]$;
- 2) непрерывное управление $s(x)$, $x \in X$;
- 3) сетка *управления* $X_1 = (x_j^\wedge)_{j=0, \dots, n_1}$;
- 4) сетка *наблюдения* $X_2 = (x_j^\vee)_{j=0, \dots, n_2}$;
- 5) ограничения $I_{j,k} = [b_{j,k}; t_{j,k}]$, $j = 1, \dots, n_1$, $k = 0, \dots, \nu_1$, $\nu_1 \geq 0$;

- 6) «контрольные» значения $q^\vee = (q_j^\vee)_{j=0, \dots, n_2}$.

Требуется **найти** непрерывное на $X = [0; 1]$ управление $m^\sim(x)$, задаваемое [10] элементами $m^\sim(x) = m_j^\sim(x)$ для $x \in [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge]$, $j = 1, \dots, n_1$, удовлетворяющими условиям

$$(m^\sim)^{(k)}(x) \in I_{j,k} \text{ для } x \in [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge], \\ j = 1, \dots, n_1, \quad k = 0, \dots, \nu_1, \quad (4)$$

такое, что вычисленные на X_2 значения $q^\sim = (q_j^\sim)_{j=0, \dots, n_2}$, $q_j^\sim = q(x_j^\vee; m^\sim, \tau_w, s)$, должны быть близкими к q^\vee , т. е.

$$q^\vee \rightarrow m^\sim,$$

$$(m^\sim, \tau_w, s) \rightarrow (q^\sim \approx q^\vee, f^\sim; Q^\sim, F^\sim, N^\sim). \quad (5)$$

Замечание. Вместо совокупности значений q^\vee могут быть заданы «контрольные» значения $f^\vee = (f_j^\vee)_{j=0, \dots, n_2}$:

$$f^\vee \rightarrow m^\sim,$$

$$(m^\sim, \tau_w, s) \rightarrow (q^\sim, f^\sim \approx f^\vee; Q^\sim, F^\sim, N^\sim), \quad (6)$$

где, в свою очередь, $f^\sim = (f_j^\sim)_{j=0, \dots, n_2}$, $f_j^\sim = f(x_j^\vee; m^\sim, \tau_w, s)$.

3. ОБРАТНЫЕ ПО ТЕМПЕРАТУРНОМУ ФАКТОРУ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССОБМЕНА

Аналогично п. 2 сформулируем **обратную** по управлению $\tau_w(x)$ в (1) задачу. Пусть **заданы**:

- 1) непрерывное управление $m(x)$, $x \in X = [0; 1]$;

- 2) непрерывное управление $s(x)$, $x \in X$;
- 3) сетка управления $X_1 = (x_j^\wedge)_{j=0, \dots, n_1}$;
- 4) сетка наблюдения $X_2 = (x_j^\vee)_{j=0, \dots, n_2}$;
- 5) ограничения $I_{j,k} = [b_{j,k}; t_{j,k}]$, $j = 1, \dots, n_1$, $k = 0, \dots, \nu_1$, $\nu_1 \geq 1$;
- 6) «контрольные» значения $q^\vee = (q_j^\vee)_{j=0, \dots, n_2}$.

Требуется **найти** непрерывно дифференцируемое на $X = [0; 1]$ управление $\tau^\sim(x)$ (в контексте ОЗ по ТФ индекс w у $\tau_w^\sim(x)$ писать не будем, чтобы освободить место для перечислительного индекса j), задаваемое [10] элементами $\tau^\sim(x) = \tau_j^\sim(x)$ для $x \in [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge]$, $j = 1, \dots, n_1$, удовлетворяющими условиям

$$(\tau^\sim)^{(k)}(x) \in I_{j,k} \text{ для } x \in [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge], \\ j = 1, \dots, n_1, \quad k = 0, \dots, \nu_1, \quad (7)$$

такое, что вычисленные на X_2 значения $q^\sim = (q_j^\sim)_{j=0, \dots, n_2}$, $q_j^\sim = q(x_j^\vee; m, \tau^\sim, s)$, должны быть близкими к q^\vee , т. е.

$$q^\vee \rightarrow \tau^\sim,$$

$$(m, \tau^\sim, s) \rightarrow (q^\sim \approx q^\vee, f^\sim; Q^\sim, F^\sim, N^\sim). \quad (8)$$

Замечание. Для «контрольных» значений $f^\vee = (f_j^\vee)_{j=0, \dots, n_2}$:

$$f^\vee \rightarrow \tau^\sim,$$

$$(m, \tau^\sim, s) \rightarrow (q^\sim, f^\sim \approx f^\vee; Q^\sim, F^\sim, N^\sim), \quad (9)$$

где, в свою очередь, $f^\sim = (f_j^\sim)_{j=0, \dots, n_2}$, $f_j^\sim = f(x_j^\vee; m, \tau^\sim, s)$.

4. ОДНОЗНАЧНОСТЬ В СЛУЧАЕ МНОГОЧЛЕНОВ

Приведённые выше постановки ОЗ предполагают уточнение – в каком классе требуется найти решение $m^\sim(x)$ или $\tau^\sim(x)$. По условиям (4) и (7) элементы $m^\sim(x) = m_j^\sim(x)$ и $\tau^\sim(x) = \tau_j^\sim(x)$ на $[x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge]$ должны иметь производную порядка ν_1 , где $\nu_1 \geq 0$ для $m_j^\sim(x)$ и $\nu_1 \geq 1$ для $\tau_j^\sim(x)$. Среди представимых на ЭВМ функций, одним из наиболее простых вариантов, обладающих такими свойствами, являются *многочлены* степени $\mu_1 \geq \nu_1 + 1$ (отметим, что степень увеличена на единицу по сравнению с необходимым значением). Поэтому, в данной работе в качестве класса, в котором производится построение управления, будем рассматривать кусочно-полиномиальные с

точками стыка X_1 функции, при этом, $m^\sim(x)$ предполагается непрерывной, а $\tau^\sim(x)$ – непрерывно-дифференцируемой на $X = [0; 1]$.

Для интервалов («окон») $[x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge]$ сетки X_1 представление элемента $m_j^\sim(x)$ или $\tau_j^\sim(x)$ в виде многочлена степени μ_1 потребует определения $(\mu_1 + 1)$ параметра. Общее их количество для X_1 равно $(\mu_1 + 1) \cdot n_1$. Из условий непрерывности $m^\sim(x)$ в узлах x_j^\wedge , $j = 1, \dots, n_1 - 1$, следует, что имеется $(n_1 - 1)$ соотношение, т. е. остаётся $(\mu_1 + 1) \cdot n_1 - (n_1 - 1) = \mu_1 \cdot n_1 + 1$ параметр. Из условий непрерывной дифференцируемости $\tau^\sim(x)$ в узлах x_j^\wedge , $j = 1, \dots, n_1 - 1$, следует, что имеется $(n_1 - 1) \cdot 2$ соотношений, т. е. остаётся $(\mu_1 + 1) \cdot n_1 - (n_1 - 1) \cdot 2 = (\mu_1 - 1) \cdot n_1 + 2$ параметра.

Замечание. С учётом того, что рассматривается обтекание симметричных в окрестности ТТ потока тел (либо боковой поверхности кругового цилиндра, либо поверхности сферического носка), можно рассматривать симметричные относительно ТТ управления (это предполагалось, в частности, при выводе алгебраических систем (15) и (31) [9]). Если это так, то количество свободных параметров окажется ещё меньшим: как у элемента $m_0^\sim(x)$, так и у элемента $\tau_0^\sim(x)$, в ТТ $x_0 = 0$ должны обращаться в ноль производные нечётных порядков.

В работе [3] приведены постановки ОЗ по вдуву для $\mu_1 = 1$ (т. е. кусочно-линейный случай). Предварительная оценка количеств данных $q^\vee = (q_j^\vee)_{j=0, \dots, n_2}$ или $f^\vee = (f_j^\vee)_{j=0, \dots, n_2}$ необходимых и достаточных для однозначного определения $m^\sim(x)$ приводит к выводу о равенстве $n_1 = n_2$. Однако, равенства $n_1 = n_2$ – недостаточно, более точным является требование на взаимное расположение точек сеток X_1 , X_2 . В [3] в качестве таких условий предложены случаи: 1) $X_1 = X_2$; 2) $X_1 \subseteq X_2$ при $X_1 \neq X_2$; 3) $X_1 \supseteq X_2$ при $X_1 \neq X_2$. В этих случаях (при введении определённого типа близости) задача оказывается *однозначно определённой, пере- и недоопределённой*, соответственно.

Проведём аналогичные построения для задач (5) и (6) настоящей работы. Для определения близости используем обозначения

$$R_\infty(q^\sim; q^\vee) = \max_{j=0, \dots, n_2} |q_j^\sim - q_j^\vee|$$

и

$$R_p(q^\sim; q^\vee) = \left(\sum_{j=0}^{n_2} |q_j^\sim - q_j^\vee|^p \right)^{1/p} \text{ при } p \in [1; +\infty).$$

Будем предполагать, что элемент $m_j^\sim(x)$ может быть задан своими значениями в $(\mu_1 + 1)$ точке интервала $[x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge]$, в частности, точки $x_{j-1}^\wedge, x_j^\wedge$ для этого используются. Поскольку, в отличие от [3], значение $\mu_1 \geq 1$, то интерес представляет вариант $X_1 \subseteq X_2$, т. е. $X_2 = X_1 \cup X_1^+$, где $X_1^+ = X_2 \setminus X_1$. Для простоты будем предполагать, что множества $X_{1,j}^+ = X_1^+ \cap [x_{j-1}^\wedge; x_j^\wedge]$ содержат одинаковые количества $\nu_2 \geq 0$ различающихся точек, т. е. можно считать, что для некоторого $\nu_2 \geq 0$ вводятся *дополнительные* сетки (при $\nu_2 = 0$ – они пусты)

$$X_{1,j}^+ = (x_{j,k}^+)_{k=1, \dots, \nu_2}, \text{ где } x_{j-1}^\wedge < x_{j,k}^+ < x_j^\wedge$$

для $j = 1, \dots, n_1$ и $k = 1, \dots, \nu_2$.

Обозначим $X_1^+ = \bigcup_{j=1}^{n_1} X_{1,j}^+$. Точки

$X_{1,j}^+ = (x_{j,k}^+)_{k=1, \dots, \nu_2}$ вместе с $x_{j-1}^\wedge, x_j^\wedge$ и есть *точки задания* элемента $m_j^\sim(x)$.

1) **Случай** $X_2 = X_1 \cup X_1^+, \mu_1 = \nu_2 + 1$ (т. е. если $\mu_1 = \nu_1 + 1$, то $\nu_1 = \nu_2$).

Близость q^\sim к q^\vee следует понимать в *интерполяционном* смысле: в узлах X_2 значения q^\sim с *заданной* точностью $\varepsilon_1 > 0$ должны совпадать с q^\vee :

$$R_\infty(q^\sim; q^\vee) \leq \varepsilon_1. \quad (10)$$

При реализации на ЭВМ величина ε_1 ограничена снизу величиной $\varepsilon_{\min} > 0$, зависящей от *точности представления вещественных чисел* и от применяемых численных методов.

Корректность. Пусть существуют $(m^\sim; q^\sim)$ и $(m^\approx; q^\approx)$ – два решения (5). Очевидно, что (неравенство треугольника)

$$\begin{aligned} \text{если } R(q^\sim; q^\vee) \leq \varepsilon_1 \text{ и } R(q^\approx; q^\vee) \leq \varepsilon_1, \\ \text{то } R(q^\sim; q^\approx) \leq \varepsilon_2 = 2\varepsilon_1, \end{aligned} \quad (11)$$

т. е. в пределах точности ε_2 решения можно не различать.

Утверждение 4.1. Если для $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_{\min}$ решение задачи (5), (10) – многочлен степени $\mu_1 = \nu_2 + 1$, удовлетворяющее (4), существует, то оно *единственно* (в смысле (11)).

2) **Случай** $X_2 = X_1 \cup X_1^+, \mu_1 < \nu_2 + 1$. Задача является переопределённой, и решение (5), (10) для малых значений $\varepsilon_1 > 0$ может не существовать. Близость q^\sim к q^\vee следует понимать лишь в *аппроксимационном* смысле: для заданного $p \in [1; +\infty]$ требуется найти пару $(m^\sim; q^\sim)$, где m^\sim является приближённым решением экстремальной задачи

$$R_p^*(q^\vee) = \inf_{m^\sim} R_p(q^\sim; q^\vee). \quad (12)$$

При реализации построения на ЭВМ величина $R_p^*(q^\vee) \geq \varepsilon_{\min}$ зависит от X_1, X_2, q^\vee, p .

Утверждение 4.2. Решение задачи (5), (12) – *многочлен степени* $\mu_1 < \nu_2 + 1$, удовлетворяющее (4), для заданного $\varepsilon_1 \geq R_p^*(q^\vee)$ может быть построено *единственным* (в смысле (11)) образом.

3) **Случай** $X_2 = X_1 \cup X_1^+, \mu_1 > \nu_2 + 1$. Если интерполяционное на X_2 решение $(m^\sim; q^\sim)$ задачи (5), (10), удовлетворяющее условию (4), существует, то оно уже не обязано быть *единственным*. Для сужения пространства решений можно на класс $m(x)$ наложить дополнительные ограничения и/или поставить дополнительное экстремальное условие.

Замечания. 1) В случае использования предположения об обнулении нечётных производных $m_0^\sim(x)$ в ТТ $x_0 = 0$ следует скорректировать содержание Утверждений (для $[x_0^\wedge; x_1^\wedge], X_{1,0}^+$ и $m_0^\sim(x)$) и, возможно, поменять тип близости на аппроксимационный, поскольку задача может оказаться переопределённой. Например, уже для $\mu_1 = 1$ при $X_{1,0}^+ = \emptyset$ значения q_0^\vee и q_1^\vee должны быть согласованы.

2) Использование R_∞ в (10) не является существенным, выбор сделан в силу того, что $R_\infty(q^\sim; q^\vee) \leq R_p(q^\sim; q^\vee) \leq R_1(q^\sim; q^\vee)$ при $p \in (1; +\infty)$.

3) В случае (12) более «правильным» является использование R_p для $p \in [1; +\infty)$, поскольку обеспечивает «размазывание ошибок» между различными точками.

4) В перечисленных определениях и Утверждениях использованы q^\vee . При решении задачи (6) следует помнить, что $f_0 = f(x=0; m, \tau, s) = 0$, поэтому в f^\vee содержится на один параметр меньше.

5) Если известно, что значения q^\vee или f^\vee заданы с погрешностями, то даже при

$\mu_1 \geq \nu_2 + 1$ следует рассматривать ОЗ в аппроксимационной постановке (12).

б) В данной работе ограничимся только постановками (8) и (9) ОЗ по ТФ. Подробный анализ условий однозначности и особенностей реализации является предметом отдельного исследования.

5. О ВОЗМОЖНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ В ТОЧКЕ ТОРМОЖЕНИЯ

Сформулируем справедливые как для цилиндрических, так и для сферических поверхностей утверждения (обозначения по [9] и [11]) о монотонной зависимости локальных ТП и НТ в ТТ от вдува, от ТФ и от МП. Пусть фиксированы значения неизменяемых параметров: число Маха $M_\infty \in [10; 40]$, высота полёта $H \in [10; 30]$ [км], радиус тела $R \in [0,1; 1]$ [м]. Пусть диапазоны изменения управляющих параметров в ТТ ограничены следующим образом:

$$m_0 = m(0) \in [0; 1], \quad \tau_0 = \tau_w(0) \in [0,15; 0,9],$$

$$s_0 = \sigma B_0^2(0) \in [0; 5 \cdot 10^4] \text{ [Тл/Ом}\cdot\text{м]}.$$

Тогда функция $q_0 = q(0; m_0, \tau_0, s_0)$, определяющая значения локального ТП в малой окрестности ТТ, является однозначной функцией от m_0, τ_0, s_0 в условиях Утверждений 1, 2, 3 из [11], соответственно. Более точно, верны следующие утверждения.

Утверждение 5.1. Для любого сочетания (фиксированных) значений τ_0, s_0 функция $q(0; m_0, \tau_0, s_0)$ строго монотонно убывает по m_0 .

Утверждение 5.2. Для любого сочетания (фиксированных) значений m_0, s_0 функция $q(0; m_0, \tau_0, s_0)$ строго монотонно убывает по τ_0 .

Утверждение 5.3. Для любого сочетания (фиксированных) значений m_0, τ_0 функция $q(0; m_0, \tau_0, s_0)$ строго монотонно убывает по s_0 .

На рис. 1 представлены зависимости локального ТП в ТТ при обтекании боковой поверхности кругового цилиндра от величины вдува $m_0 \in [0; 1]$ при $H = 10$ [км], $R = 0,1$ [м], $M_\infty = 10$ для удобства сравнения с результа-

тами [6–8]. Здесь $\tau_0 = 0,1$ соответствуют кривые 1 и 2; $\tau_0 = 0,5$ – кривые 3 и 4; $\tau_0 = 0,9$ – кривые 5 и 6. Применению МП с $s_0 = 5 \cdot 10^4$ [Тл/Ом·м] соответствуют кривые 2, 4, 6, отсутствию МП – кривые 1, 3, 5.

На рис. 2 представлены зависимости локального ТП в ТТ от ТФ $\tau_0 \in [0,1; 0,9]$ в тех же условиях. Здесь $m_0 = 0$ соответствуют кривые 1 и 2; $m_0 = 0,5$ – кривые 3 и 4; $m_0 = 1$ – кривые 5 и 6. Применению МП с $s_0 = 5 \cdot 10^4$ [Тл/Ом·м] соответствуют кривые 2, 4, 6, отсутствию МП – кривые 1, 3, 5.

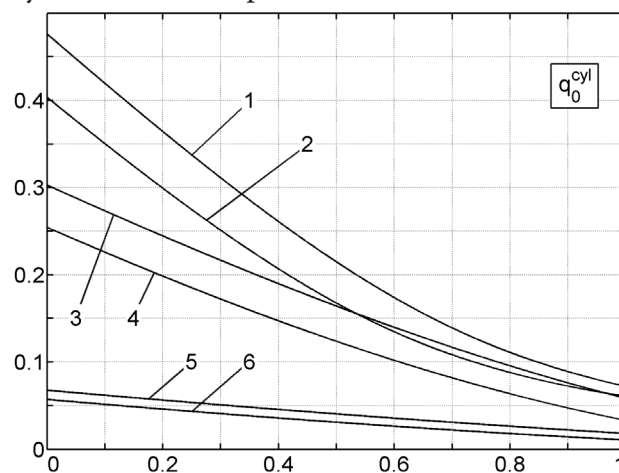


Рис. 1. Зависимости q_0 от вдува m_0

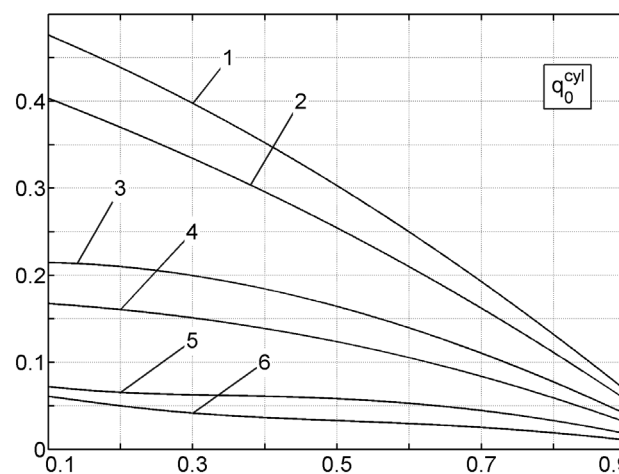


Рис. 2. Зависимости q_0 от ТФ τ_0

На рис. 3 представлены зависимости локального ТП в ТТ от МП $s_0 \cdot 10^{-4} \in [0; 5]$ [Тл/Ом·м] в тех же условиях. Здесь $m_0 = 0$ соответствуют кривые 1, 2, 3; $m_0 = 0,5$ – кривые 4, 5, 6; $m_0 = 1$ – кривые 7, 8, 9. Значению ТФ $\tau_0 = 0,1$ соответствуют кривые 1, 4, 7; $\tau_0 = 0,5$ – кривые 2, 5, 8; $\tau_0 = 0,9$ – кривые 3, 6, 9.

Зависимости локального ТП в ТТ при обтекании сферического носка имеют подобный характер.

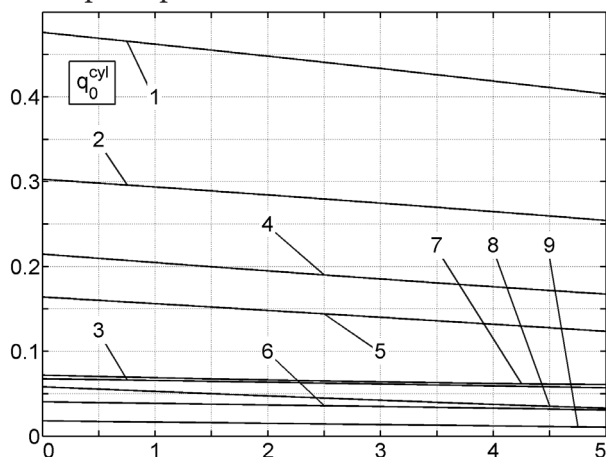


Рис. 3. Зависимости q_0 от МП $s_0 \cdot 10^{-4}$ [Тл / Ом · м]

Далее, учтём, что $\lim_{x \rightarrow 0} f(x; m_0, \tau_0, s_0) = 0$, и используем в окрестности ТТ представление $f(x; m_0, \tau_0, s_0) = x^k \cdot \bar{f}(m_0, \tau_0, s_0) + o(x^k)$, т. е. аналогично $\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_1, \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1$ в (14) и (30) в [9] функция $\bar{f}_0 = \bar{f}(m_0, \tau_0, s_0)$ – коэффициент при значащей степени x . Наконец, поскольку локальное НТ f однозначно зависит от параметра θ_0 модели ПС [9], то верны [11] следующие утверждения.

Утверждение 5.4. Для любого сочетания (фиксированных) значений τ_0, s_0 функция $\bar{f}(m_0, \tau_0, s_0)$ строго монотонно убывает по m_0 .

Утверждение 5.5. Для любого сочетания (фиксированных) значений m_0, s_0 функция $\bar{f}(m_0, \tau_0, s_0)$ строго монотонно возрастает по τ_0 .

Утверждение 5.6. Для любого сочетания (фиксированных) значений m_0, τ_0 функция $\bar{f}(m_0, \tau_0, s_0)$ строго монотонно убывает по s_0 .

На рис. 4, 5, 6 представлены зависимости коэффициента \bar{f}_0 локального НТ f в ТТ в условиях рис. 1, 2, 3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обратные задачи тепломассообмена приведены в данной работе в наиболее естественной для случая пористой поверхности поста-

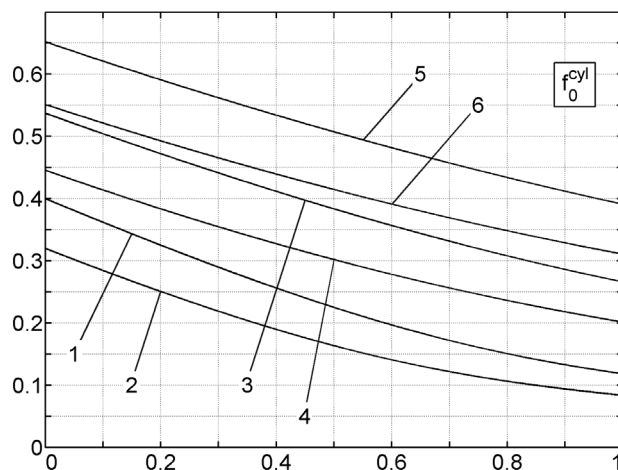


Рис. 4. Зависимости \bar{f}_0 от вдува m_0

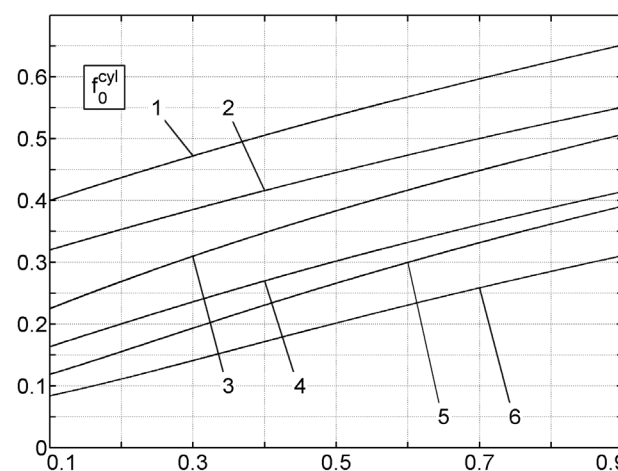


Рис. 5. Зависимости \bar{f}_0 от ТФ τ_0

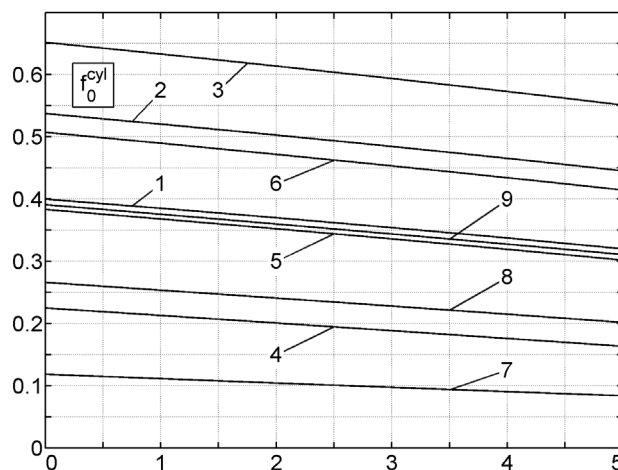


Рис. 6. Зависимости \bar{f}_0 от МП $s_0 \cdot 10^{-4}$ [Тл / Ом · м]

новке – для непрерывно дифференцируемых управлений. Вопросы восстановления управлений для случая перфорированной поверхности (для случая разрывных управлений – вдувов) являются предметом отдельного

исследования. Отметим, что для прямой задачи тема разрывных управлений обсуждалась в докладе [12], а различные конструкторские и газодинамические ограничения на управление для случая пористой поверхности – в [13]. Особенности программной реализации и применяемых методов математического моделирования для интерполяционной и аппроксимационной постановок обратных задач, а также обобщения постановок комбинированных задач [3] планируется детально обсудить в последующих публикациях.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают глубокую благодарность руководителю секции № 3 «Системный анализ и современные задачи управления. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент» д. т. н., проф., зав. каф. вычислительной математики и информационных технологий ВГУ Леденёвой Татьяне Михайловне и участникам заседания секции д. т. н., проф. Буховцу Алексею Георгиевичу и д. ф.-м. н., проф. Тимошенко Юрию Константиновичу за проявленный интерес к докладу и за вопросы, ответы на которые позволили оптимизировать форму изложения материала в данной статье.

Работа выполнялась в рамках проектной части государственного задания №13.262.201.2014К.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. I. О возможности восстановления управления / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». Сборник трудов Междунар. научно-технической конф., Воронеж, 12–15 сентября 2016 г. – Воронеж : Научно-исследовательские публикации, 2016. – С. 193–196.

2. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных

аппаратов. II. Вычислительные эксперименты / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики». Сборник трудов Междунар. научно-технической конф., Воронеж, 12–15 сентября 2016 г. – Воронеж : Научно-исследовательские публикации, 2016. – С. 197–199.

3. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Об одной обратной задаче тепломассообмена / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Герценовские чтения 2016. Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования» в электронном журнале Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2016. – № 2. – Ч. 2. – С. 50–56. – URL: <http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/herzen2016.pdf> (дата обращения: 12.07.2016).

4. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. II. О некоторых вычислительных экспериментах / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 4. – С. 13–19.

5. Гараев К. Г., Овчинников В. А., Бильченко Н. Г. Инвариантные вариационные задачи ламинарного пограничного слоя при различных режимах течения: Монография. – Казань : Изд-во КГТУ, 2003. – 123 с.

6. Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика и математика. – 2015. – № 1. – С. 83–94.

7. Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2015. – № 1. – С. 5–8.

8. Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управ-

ления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения «простых» законов вдува. / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 95–102.

9. Бильченко Н. Г. Метод А. А. Дородницына в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 1. – С. 5–14.

10. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Классы решений задач оптимального управления пограничным слоем на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «ВЗМШ С. Г. Крейна-2016»: Материалы междунар. конф. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2016. – С. 82–86.

11. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Об однозначной зависимости параметров пограничного слоя от управляющих воздействий в точке торможения гиперзвукового потока / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Современные методы теории краевых задач: материалы междунар. конф.: ВВМШ «Понтрягинские

чтения – XXVII» (3 мая – 9 мая 2016 г.) / Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2016. – С. 44–46.

12. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Сравнительный анализ применения некоторых специальных законов вдува в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых перфорированных поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики»: Сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 16–18 декабря 2015 г. – Воронеж : Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2015. – С. 134–136.

13. Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г. Сравнительный анализ применения некоторых специальных законов вдува в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых пористых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики»: Сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 16–18 декабря 2015 г. – Воронеж : Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2015. – С. 137–139.

Бильченко Григорий Григорьевич – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории № 16 (при кафедре теплотехники и энергетического машиностроения) Казанского национального исследовательского технического университета (КНИТУ-КАИ) им. А. Н. Туполева.
Тел.: +7-905-319-1843
E-mail: ggbil2@gmail.com

Бильченко Наталья Григорьевна – канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории № 16 (при кафедре теплотехники и энергетического машиностроения) Казанского национального исследовательского технического университета (КНИТУ-КАИ) им. А. Н. Туполева.
Тел.: +7-905-319-1842
E-mail: bilchnat@gmail.com

Bilchenko Grigoriy Grigorievich – Candidate of Science in Physics and Mathematics, Researcher of Research Laboratory #16, Department of Heat Engineering and Power Engineering Machinery, Kazan National Research Technical University (KNRTU-KAI) named after A. N. Tupolev.
Tel.: +7-905-319-1843
E-mail: ggbil2@gmail.com

Bilchenko Natalya Grigorievna – Candidate of Science in Physics and Mathematics, Researcher of Research Laboratory #16, Department of Heat Engineering and Power Engineering Machinery, Kazan National Research Technical University (KNRTU-KAI) named after A. N. Tupolev.
Tel.: +7-905-319-1842
E-mail: bilchnat@gmail.com