УДК 681.32

ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

А. В. Дылевский, О. О. Власова, Д. А. Ракитин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 04.07.2016 г.

Аннотация. Решается задача построения переходных процессов в распределенных системах управления. Для решения поставленной задачи применяются частотные характеристики. Предлагаемый метод может применяться как для устойчивых, так и для неустойчивых систем. В случае устойчивых систем приводятся формулы для построения импульсной и переходной характеристик, а также рассматривается вычислительный метод построения переходных процессов.
Ключевые слова: система управления с распределенными параметрами, дифференциальное уравнение в частных производных, передаточная функция, частотная характеристика, переходный процесс, импульсная характеристика, переходная характеристика.
Annotation. The problem of calculation of transient processes in distributed control systems is solved. Frequency characteristics are applied to solve this problem. The proposed method can be used for stable and for unstable systems. In case of stable systems are given formulas for calculation of pulse and transient characteristics, and also the computing method of calculation of transient processes is considered.
Keywords: distributed control systems, class of signals, partial diffrential equation, transfer function, frequency characteristic, transient processes, pulse response, transient response.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование систем автоматического управления включает анализ устойчивости, качества и переходных процессов. Каждая из этих задач является достаточно сложной и может быть решена различными методами. Эффективность метода решения задачи анализа во многом определяется видом системы: является ли данная система линейной или нелинейной, дискретной или непрерывной, сосредоточенной или распределенной и т. д.

Рассмотрим более подробно проблему анализа переходных процессов в системах с распределенными параметрами. С математической точки зрения эта проблема сводится к поиску общего решения некоторого интегро-дифференциального уравнения, описывающего систему автоматического управления, при заданных начальных и граничных условиях, а также при заданных воздействиях. При достаточно сложной структуре системы автоматического управления не всегда возможно получить решение в явном виде или установить явную зависимость между параметрами системы и видом решения. Поэтому в теории автоматического управления широко используются приближенные методы анализа переходных процессов [1]. В частности, применение частотных методов позволяет без нахождения собственных значений и собственных функций дифференциальных уравнений осуществлять анализ переходных процессов сосредоточенных систем высокого порядка и систем с распределенными параметрами. Частотный метод анализа переходных процессов основан на использовании частотных характеристик, которые могут быть определены по передаточной функции системы или из эксперимента. При этом передаточная функция системы может являться не только дробно-рациональной, но и трансцендентной функцией [2]. Поэтому данный метод позволяет решать многие задачи анализа и синтеза систем управления, содержащих как сосредоточенные, так и распределенные параметры.

1. ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Пусть $\Phi(p)$, $p \in \mathrm{C}$, – передаточная функция исследуемой системы управления, $g(t)$ – задающее воздействие системы, для которого существует изображение по Лапласу. Тогда изображение по Лапласу для переходного процесса определяется формулой

$$X(p) = \Phi(p)G(p). \qquad (1)$$

При этом выражение для переходного процесса $x(t)$ имеет вид [3]

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} X(p)e^{pt}dp,\ \ t \ge 0, \qquad (2)$$

где

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt}dt, \qquad (3)$$

α – абсцисса абсолютной сходимости функции $X(p)$; в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$ изображение $X(p)$ – аналитическая функция.

Из формулы (2) после элементарных преобразований получаем следующее выражение для переходного процесса:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha + j\omega)e^{(\alpha+j\omega)t}d\omega,\ \ t \ge 0. \qquad (4)$$

Формула (4) удобна для анализа переходных процессов в системах, для которых $X(p)$ является аналитической в правой полуплоскости комплексной плоскости и на мнимой оси, т. е. если $X(p)$ содержит в указанной области конечное число полюсов, расположение которых на комплексной плоскости известно.

Если $\alpha = 0$, то формула (4) приобретает вид

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega,\ \ t \ge 0. \qquad (5)$$

Так как $x(t) = 0$ при $t < 0$, то из (5) получаем

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{-j\omega t}d\omega. \qquad (6)$$

Пусть $X(j\omega) = X_R(\omega) + jX_I(\omega)$, где $X_R(\omega)$ и $X_I(\omega)$ – соответственно вещественная и мнимая частотные характеристики. При этом, $X_R(\omega)$ – четная, а $X_I(\omega)$ – нечетная функции аргумента ω. Тогда, складывая формулы (5) и (6), получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\cos\omega t d\omega = \qquad (7) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} X_R(\omega)\cos\omega t d\omega. \end{aligned}$$

Вычитая из выражения (5) выражение (6), имеем

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})d\omega = \\ &= \frac{j}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\sin\omega t d\omega = \qquad (8) \\ &= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} X_I(\omega)\sin\omega t d\omega. \end{aligned}$$

Если функция $X(p)$ содержит полюсы на мнимой оси или в правой полуплоскости комплексной плоскости, то применять формулы (7) и (8) нельзя. В этом случае, следуя [4], представим функцию $X(p)$ в виде суммы двух слагаемых

$$X(p) = X_0(p) + X_1(p), \qquad (9)$$

где первое слагаемое $X_0(p)$ содержит все полюсы $X(p)$, расположенные в левой полуплоскости, а второе слагаемое $X_1(p)$ содержит все полюсы $X(p)$, расположенные в правой полуплоскости и на мнимой оси. При этом будем считать полюсы $X_1(p)$ известными, а полюсы $X_0(p)$ неизвестными, но расположенными в левой полуплоскости. В этом случае функция $x_1(t)$ может быть найдена одним из известных способов. Тогда

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(t) + x_1(t) = \\ &= \frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} X_0(p)e^{pt}dp + \qquad (10) \\ &+ \frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} X_1(p)e^{pt}dp. \end{aligned}$$

Так как по определению все полюсы $X_0(p)$ расположены в левой полуплоскости, то в первом интеграле можно положить $\alpha = 0$. Поэтому

$$x_0(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} X_0(p)e^{pt}dp = \\ = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} X_0(p)e^{pt}dp = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_0(j\omega)e^{j\omega t}d\omega. \quad (11)$$

Пусть $X_{0R}(\omega)$ и $X_{0I}(\omega)$ – вещественная и мнимая частотные характеристики $X_0(j\omega)$. Тогда выражение для переходного процесса примет вид

$$x(t) = x_1(t) + \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} X_{0R}(\omega)\cos\omega t\,d\omega, \quad (12)$$

или

$$x(t) = x_1(t) - \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} X_{0I}(\omega)\sin\omega t\,d\omega. \quad (13)$$

Следует отметить, что при нахождении переходного процесса по формулам (12) или (13) правые полюсы $X(p)$ предполагаются известными. В ряде случаев, особенно при исследовании систем с трансцендентными передаточными функциями, точно найти все правые полюсы не представляется возможным. В этом случае предпочтительнее использовать непосредственно формулу (4) при известной абсциссе абсолютной сходимости α.

2. ПОСТРОЕНИЕ ИМПУЛЬСНОЙ И ПЕРЕХОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИК

Как известно, импульсная характеристика $w(t)$ – реакция системы на входной сигнал в виде дельта-функции Дирака при нулевых начальных условиях; переходная функция $h(t)$ – реакция системы на входной сигнал в виде функции Хевисайда при нулевых начальных условиях. Импульсная и переходная характеристики относятся к типовым и позволяют анализировать поведение систем управления.

Для построения импульсной и переходной характеристик воспользуемся полученными выше формулами. В частности, для нахождения импульсной характеристики положим $g(t) = \delta(t)$, где $\delta(t)$ – дельта-функции Дирака. Так как изображение по Лапласу для дельта-функции Дирака определяется формулой

$$\delta(t) \div 1, \quad (14)$$

то формула (1) принимает вид

$$X(p) = \Phi(p). \quad (15)$$

Если $\Phi(p)$ – передаточная функция устойчивой системы управления, то $X(p)$ является аналитической функцией в правой полуплоскости комплексной плоскости и на мнимой оси и поэтому можно положить $\alpha = 0$. Тогда импульсная характеристика $w(t)$ может быть найдена по формулам (7) или (8), т. е.

$$w(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} R(\omega)\cos\omega t\,d\omega = \\ = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} I(\omega)\sin\omega t\,d\omega, \quad (16)$$

где $R(\omega)$ и $I(\omega)$ – соответственно вещественная и мнимая частотные характеристики $\Phi(j\omega)$.

Найдем теперь формулы для вычисления переходной характеристики. Согласно определению переходной характеристики положим $g(t) = 1(t)$, где $1(t)$ – функция Хевисайда (функция единичного скачка). Тогда изображение выходного сигнала системы в силу формулы (1) имеет вид

$$X(p) = \frac{\Phi(p)}{p}. \quad (17)$$

В данном случае функция $X(p)$ имеет нулевой полюс на мнимой оси. Поэтому воспользуемся формулами (12) или (13). С этой целью представим $X(p)$ в виде (9)

$$X(p) = \frac{\Phi(p)}{p} = \frac{\Phi(0)}{p} + \frac{\Phi(p) - \Phi(0)}{p}. \quad (18)$$

В результате получаем

$$X_0(p) = \frac{\Phi(p) - \Phi(0)}{p}, \; X_1(p) = \frac{\Phi(0)}{p}. \quad (19)$$

Учитывая, что

$$\Phi(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega) \quad (20)$$

и $R(\omega)$ – четная, а $I(\omega)$ – нечетная функции аргумента ω, находим

$$\Phi(0) = R(0). \quad (21)$$

Отсюда сразу следует, что

$$x_1(t) = R(0), \; t \ge 0. \quad (22)$$

Принимая во внимание формулы (12), (19)–(21), получаем выражение для переходной характеристики

$$x(t) = \\ = R(0) + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left(\frac{\Phi(j\omega) - \Phi(0)}{j\omega}\right)\cos\omega t\, d\omega = \\ = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty I(\omega)\frac{\cos\omega t}{\omega}d\omega. \quad (23)$$

Аналогично, с помощью формул (12), (19)–(21), и соотношения

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega = 1, \quad (24)$$

получаем

$$x(t) = \\ = R(0) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Im}\left(\frac{\Phi(j\omega) - \Phi(0)}{j\omega}\right)\sin\omega t\, d\omega = \\ = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty R(\omega)\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega. \quad (25)$$

Таким образом, для вычисления переходной характеристики устойчивой системы можно использовать вещественную или мнимую частотную характеристики согласно формулам (23) и (25).

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИМПУЛЬСНОЙ И ПЕРЕХОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИК

Для непосредственно вычисления импульсной и переходной характеристик в соответствии с формулами (23) и (25) следует использовать методы численного интегрирования несобственных интегралов. В частности, можно использовать следующий подход [5]. Для вычисления интеграла вида

$$J = \int_a^\infty f(z)dz$$

представим J как сумму определенно интеграла J_1 по конечному промежутку $[a,b]$ и несобственного интеграла J_2 по промежутку $[b,\infty)$, т. е.

$$J = \int_a^\infty f(z)dz = \int_a^b f(z)dz + \int_b^\infty f(z)dz = J_1 + J_2.$$

Здесь $b > a$ – некоторое число, которое следует выбирать из условия

$$|J_2| < \varepsilon$$

для произвольного наперед заданного числа ε. При этом можно использовать прием, который заключается в автоматическом изменении b, например, как b_0, $2b_0$, $4b_0$, $8b_0$ и т. д., где b_0 – начальное значение b, с контролем на каждой i-й стадии условия

$$|J_{2,i} - J_{2,i-1}| < \varepsilon.$$

Интеграл J_1 можно вычислять с помощью метода Гаусса. Метод Гаусса основан на интерполяции $f(z)$ полиномом Лагранжа, но абсциссы z_i выбираются из условия обеспечения минимума погрешности интерполяции. При этом интеграл J_1 подстановкой

$$z = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}y$$

сводится к виду

$$J_1 = \int_{-1}^{+1} f(y)dy = \sum_{i=1}^n A_i f(y_i).$$

Метод Гаусса обеспечивает повышенную точность – формула верна для полиномов до $(2n-1)$-й степени. Для $n = 3$ имеем

$$A_1 = 5/9,\ t_1 = -\sqrt{1/3},\ A_2 = 8/9,\ t_2 = 0, \\ A_3 = 5/9,\ t_3 = \sqrt{1/3}.$$

Остаточный член (погрешность) при этом равен

$$\Delta_3 = \frac{1}{15750}\left(\frac{b-a}{2}\right)^7 f^{(4)}(\xi).$$

Для повышения точности интегрирования отрезок $[a,b]$ дробится на m частей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Солодовников В. В.* О частотных условиях монотонности и об оценке погрешности в определении переходного процесса по частотным характеристикам // Автоматика и телемеханика. – 1950. – том 11, выпуск 1, С. 11–38.

2. *Дылевский А. В., Лозгачев Г. И., Малютина В. С.* Синтез конечномерных регуляторов для бесконечномерных объектов: учебное пособие. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. – 298 с.

3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М. : Наука, 1987. – 688 с.

4. Техническая кибернетика: Серия инженерных монографий. Теория автоматического регулирования. Книга 1. Математическое описание, анализ устойчивости и качества систем автоматического регулирования / Под редакцией В. В. Солодовникова. – М. : Машиностроение, 1967. – 770 с.

5. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. – М. : Наука, 1966. – 664 с.

Работа выполнена в соответствии с Госзаданием № 1.759.2016/ДААД "Проведение научно-исследовательских работ в рамках международного научно-образовательного сотрудничества по программе «Михаил Ломоносов» по теме: «Моделирование и регулирование линейных систем с распределёнными параметрами»"

Дылевский Александр Вячеславович – д-р техн. наук, профессор кафедры технической кибернетики и автоматического регулирования факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета.
E-mail: neft@yandex.com

Власова Ольга Олеговна – аспирантка кафедры технической кибернетики и автоматического регулирования факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета.
E-mail: vlasovamath@gmail.com

Ракитин Денис Андреевич – аспирант кафедры технической кибернетики и автоматического регулирования факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета.
E-mail: darakitin@gmail.com

Dylevskii Alexander Vyacheslavovich – Doctor of engineering sciences, Professor of the Department of technical cybernetics and automatic control, the Faculty of applied mathematics, information science, and mechanics at Voronezh State University.
E-mail: neft@yandex.com

Vlasova Olga Olegovna – Post-graduate student of the Department of technical cybernetics and automatic control, the Faculty of applied mathematics, information science, and mechanics at Voronezh State University.
E-mail: vlasovamath@gmail.com

Rakitin Denis Andreevich – Post-graduate student of the Department of technical cybernetics and automatic control, the Faculty of applied mathematics, information science, and mechanics at Voronezh State University.
E-mail: darakitin@gmail.com