# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА И УПРАВЛЕНИЯ

## УДК 517.97: 532.526

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОМАССООБМЕНОМ НА ПРОНИЦАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ В ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА

#### Н. Г. Бильченко

Казанский национальный исследовательский технический университет (КНИТУ-КАИ) им. А. Н. Туполева (г. Казань)

#### Поступила в редакцию 27.09.2016 г.

Аннотация. Рассматриваются задачи математического моделирования оптимальной тепловой защиты проницаемых цилиндрических и сферических поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов в потоке ионизированного газа. В основу расчётов положен метод обобщённых интегральных соотношений А. А. Дородницына. Проводится сравнение результатов вычислительных экспериментов по построению оптимального управления ламинарным пограничным слоем электропроводящего газа в аналитическом виде (в первом приближении) с законами управления, близкими к оптимальным.

Ключевые слова: оптимальное управление, тепломассообмен, ламинарный пограничный слой, гиперзвуковые течения, ионизация, обобщённые интегральные соотношения, аппроксимирующая система.

**Annotation.** The hypersonic aircraft permeable cylindrical surfaces in ionized gas flow optimal heat protection mathematical modeling problems are considered. A. A. Dorodnitsyn's method of generalized integral relations is taken as a basis of calculations. The results of computation experiments on the optimal control construction carried out in analytical form (in the first approximation) are compared with the close to optimal control laws.

**Keywords:** optimal control; heat and mass transfer; laminar boundary layer; hypersonic flows; ionization; generalized integral relations, approximating system.

#### введение

Данная работа представляет собой продолжение статьи [1], в которой приводятся

1) постановки задач оптимального управления тепломассообменом в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа на проницаемых цилиндрических и сферических поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА), рассчитанных на вход в атмосферу;

2) аппроксимирующие системы второго приближения обыкновенных дифференци-

альных уравнений (ОДУ) для исходной и сопряжённой систем уравнений;

3) алгебраические системы второго приближения для определения параметров пограничного слоя в окрестности точки торможения;

4) формула для определения оптимального управления в первом приближении в аналитическом виде;

5) алгоритм поиска оптимального управления.

В данной работе на основе результатов вычислительных экспериментов, проведённых с помощью программ, реализующих пункты «2)»–«5)»:

<sup>©</sup> Бильченко Н. Г., 2016

 а) исследуется влияние магнитного поля и степени предварительной охлаждённости поверхностей ГЛА на теплообмен и трение в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа;

6) изучается поведение функций  $\theta_0$ ,  $\theta_1$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  – решений систем ОДУ, аппроксимирующих описывающие гиперзвуковые течения электропроводящего газа исходные системы дифференциальных уравнений в частных про-изводных (ДУЧП);

в) анализируется поведение функций  $\theta_0$ ,  $\overline{\theta_1}$ ,  $\overline{\omega}_0$ ,  $\overline{\omega}_1$  – решений алгебраических систем в окрестности точки торможения;

г) проводится сравнение результатов вычислительных экспериментов по построению оптимального управления в аналитическом виде (в первом приближении) [2, 3] с полученными по законам управления, близким к оптимальным, аналогичным предложенным в [4].

В качестве примера (для удобства сравнения с [2–4]) рассмотрен случай числа Маха  $M_{\infty} = 10$ , высоты полёта  $H = 10 \ [\kappa m]$ , радиуса (как цилиндра, так и сферы)  $R = 0,1 \ [m]$ . Аналогичные вычислительные эксперименты были проведены и для других высот, скоростей полёта и геометрических характеристик ГЛА.

#### **1. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ** ТЕМПЕРАТУРНОГО ФАКТОРА

Рассматривается случай отсутствия вдува m = 0 и магнитного поля  $\sigma B_0^2 = 0$ . Степень предварительной охлаждённости поверхности (или температурный фактор)  $\tau_w = T_w/T_{e0}$ , где  $T_w$  – температура стенки, а  $T_{e0}$  – температура в точке торможения потока, предполагается постоянной и изменяется в пределах от 0,1 до 0,9.

Следует отметить, что рассмотрение предельных случаев  $\tau_w \to 0$  и  $\tau_w \to 1$  интересно лишь с математической точки зрения, так как в первом случае мгновенное охлаждение стенки технически не реализуемо, а во втором поддержание температуры обшивки на уровне точки торможения нецелесообразно (и даже вредно с точки зрения создания угрозы турбулизации пограничного слоя).

На рис. 1 представлены графики зависимости локального теплового потока и локального напряжения трения от координаты для цилиндрического и сферического случаев.



и магнитного поля)

Рис. 2 иллюстрирует поведение функций  $\theta_0$ ,  $\theta_1$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  – решений систем ОДУ ((13) – для цилиндрических поверхностей, (29) – для сферических), аппроксимирующих исходные системы ДУЧП. Здесь и далее в тексте номера формул соответствуют статье [1].

На рис. 1 и 2 приведены графики функций, соответствующие значениям температурного фактора  $\tau_w \in \{0,1;0,2;...;0,9\}$  (указано положение кривых, соответствующих  $\tau_w = 0,1$ ).

**Вывод 1.** Очевидно, что с увеличением температурного фактора  $\tau_w$  интенсивность поглощения тепла стенкой уменьшается, а ло-кальное напряжение трения возрастает.





Рис. 2. Графики зависимости функций  $\theta_0$ ,  $\theta_1$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  от координаты (в отсутствии вдува и магнитного поля)

В данной серии вычислительных экспериментов рассматривался **постоянный** (по координате) температурный фактор. Подробный анализ влияния **переменного** температурного фактора на теплообмен и трение на поверхностях ГЛА является предметом отдельного исследования.

#### 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

2.1. Случай различных  $\tau_w$  в отсутствии вдува (m = 0).

На рис. 3 представлены графики зависимости локального теплового потока и локального напряжения трения от координаты для случаев сильно ( $\tau_w = 0,1$ ), умеренно ( $\tau_w = 0,5$ ) и слабо ( $\tau_w = 0,9$ ) охлаждённых цилиндрической и сферической поверхностей.

На рис. 3: кривые 1 и 2 соответствуют  $\tau_w = 0,1$ ; кривые 3 и 4 соответствуют  $\tau_w = 0,5$ ; кривые 5 и 6 соответствуют  $\tau_w = 0,9$ ; кривым с нечётными номерами соответствует  $\sigma B_0^2 = 10^4 [T_{\pi} / O_M \cdot M]$ , а кривым с чётными номерами соответствует  $\sigma B_0^2 = 5 \cdot 10^4 [T_{\pi} / O_M \cdot M]$ .

На рис. 4 представлены графики зависимости интегрального теплового потока и суммарного напряжения трения от температурного фактора  $\tau_w \in [0,1;0,9]$  для цилиндрической и сферической поверхностей при наличии и в отсутствии магнитного поля:  $\sigma B_0^2 \in \{0;1\cdot10^4;2\cdot10^4;...;5\cdot10^4\}$ . Положение



Рис. 3. Графики зависимости локальных тепловых потоков и напряжений трения от координаты (в отсутствии вдува и при наличии магнитного поля)



Рис. 4. Графики зависимости интегрального теплового потока и суммарного напряжения трения от температурного фактора

кривых, соответствующих случаю отсутствия магнитного поля ( $\sigma B_0^2 = 0$ ) и случаю  $\sigma B_0^2 = 5 \cdot 10^4 [T_{\pi} / O_{M} \cdot M]$ , обозначено.

На рис. 5 представлены графики зависимости интегрального теплового потока и суммарного напряжения трения от магнитного поля  $\sigma B_0^2 \in [0; 5 \cdot 10^4] [T_{\pi} / O_M \cdot M]$  для цилиндрической и сферической поверхностей при различных значениях температурного фактора  $\tau_w \in \{0,1;0,2;...;0,9\}$  (указано положение кривых, соответствующих  $\tau_w = 0,1$ ).

Вывод 2. В отсутствии вдува влияние магнитного поля, проявляющееся начиная со значений  $\sigma B_0^2 \approx 10^4 [T_{\pi}/O_{M} \cdot M]$ , приводит к следующим результатам:



Рис. 5. Графики зависимости интегрального теплового потока и суммарного напряжения трения от магнитного поля  $\sigma B_0^2 \cdot 10^{-4} \left[ T_{\pi} / O_{M} \cdot M \right]$ 

 локальный тепловой поток для сильно охлаждаемой поверхности снижается на всём участке теплообмена;

2) для умеренно и слабо охлаждаемых поверхностей, начиная с некоторой точки  $x_{sep}$ участка теплообмена, зависящей от конкретного сочетания параметров  $\tau_w$  и  $\sigma B_0^2$ , наблюдается **повышение** локального теплового потока;

3) для *любого*  $\tau_w$  происходит снижение локального напряжения трения;

4) существуют разделяющее значение  $au_{sep}$  температурного фактора и малое значение  $\delta > 0$  такие, что

**при**  $\tau_w < \tau_{sep} - \delta$  приложение магнитного поля приводит к снижению интегрального теплового потока Q,

при  $\tau_w > \tau_{sep} + \delta$  к его увеличению,

**при**  $\tau_{w} \in [\tau_{sep} - \delta; \tau_{sep} + \delta]$  величина Q почти не зависит от  $\sigma B_{0}^{2}$ .

Так, для числа Маха  $M_{\infty} = 10$ , высоты полёта H = 10 [км], радиуса тела R = 0,1 [м], разделяющие значения  $\tau_{sep}^{cyl} \approx 0,8$  и  $\tau_{sep}^{sph} \approx 0,7$ .

2.2. Случай фиксированного  $\tau_w$  при различных законах вдува.

Зафиксируем температурный фактор, взяв для определённости случай сильно охлаждаемой поверхности ( $\tau_w = 0, 25$ ), и рассмотрим различные законы вдува. На рис. 6 представлены графики зависимости локального теплового потока и локального напряжения трения от координаты для сильно охлаждаемых цилиндрической и сферической поверхностей при наличии магнитного поля и различных законах вдува.



Рис. 6. Графики зависимости локальных теплового потока и напряжения трения от координаты (при наличии вдува и магнитного поля)

Рис. 7 иллюстрирует поведение функций  $\theta_0$ ,  $\theta_1$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  – решений систем ОДУ ((13) – для цилиндрических поверхностей, (29) – для сферических), аппроксимирующих исходные системы ДУЧП, описывающих гиперзвуковые течения электропроводящего газа.

На рис. 6 и 7 кривые 1, 2, 3 соответствуют отсутствию вдува m = 0; кривые 4, 5, 6 соответствуют m = const = 0, 3; кривые 7, 8, 9 соответствуют оптимальному вдуву  $m_{opt}$ , полученному по аналитической формуле (в первом приближении) [2, 3], где  $N(m_{opt}) = N(m = const = 0, 3)$ ; кривым с номерами 1, 4, 7 соответствует слу-





Рис. 7. Графики зависимости функций  $\theta_0$ ,  $\theta_1$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  от координаты (при наличии вдува и магнитного поля)

чай отсутствия магнитного поля  $\sigma B_0^2 = 0$ ; кривым с номерами 2, 5, 8 соответствует  $\sigma B_0^2 = 10^4 [T_{\pi} / O_{M} \cdot M]$ ; кривым с номерами 3, 6, 9 соответствует  $\sigma B_0^2 = 3 \cdot 10^4 [T_{\pi} / O_{M} \cdot M]$ .

**Вывод 3.** Применение магнитного поля в качестве дополнительного средства управления ламинарным пограничным слоем электропроводящего газа для сильно охлаждаемой поверхности позволяет добиться дополнительного **снижения** локальных теплового потока и напряжения трения как в случае постоянного, так и в случае оптимального вдува.

Следует отметить, что результаты вычислительных экспериментов по построению управлений, близких к оптимальным, с помощью «простых» законов (треугольник, трапеция), проведённых аналогично рассмотренным в [4] для случая равновесно диссоциирующего газа, но с учётом магнитного поля, показали, во-первых, что графики зависимостей, построенные для них, настолько близки к кривым 7, 8 и 9 на рис. 6 и 7, что приводить их на отдельных рисунках нецелесообразно; во-вторых, подтвердили вывод 3 и в отношении «простых» законов.

### 3. О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ТОРМОЖЕНИЯ

Пусть фиксированы значения неизменяемых параметров: число Маха  $M_{\infty} \in [10; 40]$ , высота полёта  $H \in [10;30]$  [км], радиус тела  $R \in [0,1;1]$  [м], а диапазоны изменения управляющих параметров в точке торможения ограничены следующим образом:  $m_0 = m(0) \in [0;1], \qquad \tau_0 = \tau_w(0) \in [0,1;0,9], s_0 = \sigma B_0^2(0) \in [0;5\cdot10^4]$  [ $T\pi / OM \cdot M$ ].

Тогда для функций  $\overline{\Theta}_0(m_0, \tau_0, s_0)$ ,  $\overline{\Theta}_1(...)$ ,  $\overline{\omega}_0(...)$ ,  $\overline{\omega}_1(...)$ , представляющих собой решения алгебраических систем (15) и (31) – для цилиндрических и сферических поверхностей, соответственно, и определяющих параметры пограничного слоя в малой окрестности точки торможения потока, установлены следующие свойства.

**Утверждение 1.** Для любого сочетания (фиксированных) значений  $\tau_0$ ,  $s_0$  функции  $\overline{\theta}_0$ ,  $\overline{\theta}_1$ ,  $\overline{\omega}_0$ ,  $\overline{\omega}_1$  строго монотонно возрастают по  $m_0$ .

**Утверждение 2.** Для любого сочетания (фиксированных) значений  $m_0$ ,  $s_0$  функции  $\overline{\theta}_0$ ,  $\overline{\theta}_1$ ,  $\overline{\omega}_0$ ,  $\overline{\omega}_1$  строго монотонно убывают по  $\tau_0$ .

**Утверждение 3.** Для любого сочетания (фиксированных) значений  $m_0$ ,  $\tau_0$  функции  $\overline{\theta}_0$ ,  $\overline{\theta}_1$ ,  $\overline{\omega}_0$ ,  $\overline{\omega}_1$  строго монотонно возрастают по  $s_0$ .

Из установленных утверждений следует, что определяющие локальные значения теплового потока и трения функции  $\overline{q}(m_0, \tau_0, s_0), \overline{f}(...)$  в окрестности точки торможения являются

однозначными функциями *m*<sub>0</sub> в условиях Утверждения 1,

однозначными функциями  $au_0$  в условиях Утверждения 2,

**однозначными** функциями *s*<sub>0</sub> в условиях Утверждения 3.

Рис. 8, 9 и 10 иллюстрируют поведение функций  $\overline{\theta_0}$ ,  $\overline{\theta_1}$ ,  $\overline{\omega_0}$ ,  $\overline{\omega_1}$  – решений алгебраических систем (15) и (31) – для цилиндрических и сферических поверхностей, соответственно, в зависимости от величины вдува  $m_0$ , температурного фактора  $\tau_0$  и магнитного поля  $s_0$  в окрестности точки торможения.

На рис. 8: кривые 1 и 2 соответствуют  $\tau_w = 0,1$ ; кривые 3 и 4 соответствуют  $\tau_w = 0,5$ ; кривые 5 и 6 соответствуют  $\tau_w = 0,9$  (кривые 6 проходят выше, чем кривые 5, в выбранном



Рис. 8. Графики зависимости функций  $\theta_0, \ \theta_1, \ \overline{\omega}_0, \ \overline{\omega}_0$  от величины  $m_0$ 

масштабе они почти сливаются для функций  $\overline{\omega}_0$ ,  $\overline{\omega}_1$ ); кривым с нечётными номерами соответствует случай отсутствия магнитного поля  $\sigma B_0^2 = 0$ , а кривым с чётными номерами соответствует  $\sigma B_0^2 = 5 \cdot 10^4 [T_{\pi} / O_{M} \cdot M]$ .

На рис. 9 кривые 1, 2, 3 соответствуют отсутствию вдува m = 0; кривые 4, 5, 6 соответствуют m = const = 0, 5; кривые 7, 8, 9 соот-





ветствуют m = const = 1; кривым с номерами 1, 4, 7 соответствует случай отсутствия магнитного поля  $\sigma B_0^2 = 0$ ; кривым с номерами 2, 5, 8 соответствует  $\sigma B_0^2 = 2,5 \cdot 10^4 [T_{\pi} / O_{M} \cdot m]$ ; кривым с номерами 3, 6, 9 соответствует  $\sigma B_0^2 = 5 \cdot 10^4 [T_{\pi} / O_{M} \cdot m]$ .



На рис. 10 кривая 1 соответствует случаю отсутствия вдува m = 0 и  $\tau_w = 0,9$ ; кривые 2, 3, 4 соответствуют  $\tau_w = 0,5$  в условиях нарастания вдува  $m = \{0; 0,5; 1\}$ ; кривая 5 соответствует случаю m = 1 и  $\tau_w = 0,1$ .

Вывод 4. Установленный в Утверждениях 1-3 монотонный характер зависимости решения алгебраических систем от величин параметров управления позволяет решать обратные задачи тепломассообмена (аналогичные рассмотренной в [5]) – о «восстановлении» управления по локальным характеристикам пограничного слоя (по локальному тепловому потоку q или по локальному напряжению трения f).

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ результатов вычислительных экспериментов подтверждает целесообразность применения предложенного в [1] подхода, а также позволяет изучить характер влияния магнитного поля и температурного фактора на теплообмен и трение в ламинарном пограничном слое ионизированного воздуха на проницаемых цилиндрических и сферических поверхностях ГЛА и учесть его при проведении дальнейших исследований.

Автор выражает глубокую благодарность к.ф.-м.н. Бильченко Григорию Григорьевичу за конструктивную критику и ценные советы.

Бильченко Наталья Григорьевна – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теплотехники и энергетического машиностроения Казанского национального исследовательского технического университета (КНИТУ-КАИ) им. А. Н. Туполева. Тел.: +7-905-319-1842 E-mail: <bilchnat@gmail.com>

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бильченко Н. Г. Метод А. А. Дородницына в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 1. – С. 5–14.

2. Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. унта. Сер. Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 83–94.

3. Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2015. – № 1. – С. 5–8.

4. Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения «простых» законов вдува / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 95–102.

5. Бильченко Г. Г. Об одной обратной задаче тепломассообмена / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения - 2016». Материалы научной конференции, 11–15 апреля 2016 г. – СПб. : Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2016. – С. 45–49.

Bilchenko Natalya Grigorievna – Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Heat Engineering and Power Engineering Machinery, Kazan National Research Technical University (KNRTU-KAI) named after A. N. Tupolev. Tel.: +7-905-319-1842 E-mail: <bilchnat@gmail.com>