УДК 519.85

СУЖЕНИЕ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО НА ОСНОВЕ ИНФОРМАЦИИ О ПРЕДПОЧТЕНИЯХ ЛПР

Ю. В. Бугаев, Б. Е. Никитин, А. Диоп

Воронежский государственный университет инженерных технологий

Поступила в редакцию 10.05.2016 г.

Аннотация. Рассматривается задача сужения множества Парето большой мощности. Предложена и обоснована процедура сужения, являющаяся обобщением метода экстраполяции экспертных оценок на случай представления предпочтений ЛПР в виде конусного антирефлексивного транзитивного бинарного отношения.
Ключевые слова: многокритериальный выбор, множество Парето, предпочтения ЛПР, бинарное отношение.
Annotation. The problem of narrowing the Pareto set of high power. Proposed and justified the restriction procedure, which is a generalization of the method of extrapolation of expert assessments in the event of submission of the decision-maker preferences in the form of a cone antireflexive transitive binary relation.
Keywords: multi-criteria selection, Pareto set, the decision-maker preferences, the binary relation.

ВВЕДЕНИЕ

Идея построить алгоритм сужения множества Парето на основе экспертной информации высказывалась многими авторами. В [1–5] рассматривались способы идентификации предпочтений ЛПР на основе предположения о существовании скалярной функции полезности, определяющей эти предпочтения. Очевидно, что это условие является достаточно жёстким и трудно обеспечиваемым. В данной работе предлагается обобщение метода экстраполяции экспертных оценок (МЭЭО) на случай, когда предпочтения ЛПР определяются некоторым бинарным отношением, удовлетворяющим определённой системе аксиом. Предлагается соответствующий метод сужения множества Парето на основе экспертной информации.

1. ИСХОДНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ

Пусть X – исходное множество альтернатив, качество которых характеризуется набором числовых критериев $\{f_j(x),\ \ j = 1,\ldots,s\}$, причём

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y), \tag{1}$$

т. е. различным альтернативам соответствуют разные критериальные векторы.

Определение 1 [6]. Будем говорить, что критерий $f_j(x)$, *согласован* с некоторым бинарным отношением предпочтения P, определённым на множестве альтернатив X, если для любых двух альтернатив $u,v \in X$, различающихся значением только j-го критерия из $f_j(u) > f_j(v)$ следует $(u,v) \in P$.

Важную роль в теории принятия решений играют так называемые конусные отношений.

Определение 2. Бинарное отношение $P \subset X \times X$ называется *конусным отношением*, если существует такой конус $K \subset E^s$, что для произвольных альтернатив u и v справедлива эквивалентность

$$(u,v) \in P \Leftrightarrow f(u) - f(v) \in K.$$

Конусное отношение P с конусом K будем обозначать P_K.

Определение 3. Конус K называется *острым* (*заострённым*), если не существует ненулевого вектора $z \in K$, такого что $-z \in K$.

Известно следующее свойство конусных отношений.

Теорема 1 (Теорема 2.3, [6], стр. 55). Для того чтобы конусное отношение R_K было антирефлексивным, транзитивным и инвариантным относительно конусного преобразования, необходимо и достаточно, чтобы $K \subset E^s$ был острым конусом без нулевой точки.

Следуя [6], примем следующее допущение о структуре предпочтений ЛПР.

Допущение 1. Отношение предпочтения ЛПР $R^{ЛПР}$ является сужением некоторого заданного на всем критериальном пространстве антирефлексивного, транзитивного и инвариантного относительно положительного линейного преобразования бинарного отношения, с которым согласован каждый критерий.

Согласно теореме 1, отношение предпочтения ЛПР $R^{ЛПР}$ является конусным бинарным отношением с некоторым острым конусом без нулевой точки. Изначально ни само $R^{ЛПР}$, ни соответствующий ему конус K неизвестен. Принадлежность некоторой пары альтернатив (u, v) отношению $R^{ЛПР}$ можно зафиксировать только на основе их экспертного сравнения. Предлагаемый в работе метод сужения множества Парето основан на построении по результатам такой экспертизы некоторого бинарного отношения, аппроксимирующего $R^{ЛПР}$ сверху.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА

В качестве аппроксимации $R^{ЛПР}$ будем использовать следующий специальный тип бинарных отношений.

Пусть B – некоторое множество в пространстве E^s. На основе его элементов построим следующее бинарное отношение $R(B) \subset X \times X$, *порождённое* B и позволяющее сравнивать между собой две произвольные альтернативы $x, y \in X$ с векторными критериями $f(x)$ и $f(y)$, соответственно:

$$(x, y) \in R(B) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, b \in B \qquad b^T f(x) \ge b^T f(y) \\ \exists\, b^0 \in B: \ (b^0)^T f(x) > (b^0)^T f(y)\,. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 2. При любом $B \subset E^s$ и X, удовлетворяющего соотношению (1), порождённое B бинарное отношение $R(B) \subset X \times X$ обладает свойствами антирефлексивности, транзитивности и инвариантности относительно линейного положительного (конусного) преобразования.

Доказательство.

1) Антирефлексивность $R(B)$, очевидно, следует из невозможности выполнения строгого неравенства в формуле (2) при $x = y$.

2) Докажем транзитивность. Пусть для альтернатив $x, y, z \in X$ выполняются отношения: $(x, y) \in R(B)$; $(y, z) \in R(B)$. Это означает, что

$$\forall b \in B \ \ b^T (f(x) - f(y)) \ge 0;$$
$$\exists b^1 \in B: \left(b^1\right)^T (f(x) - f(y)) > 0;$$
$$\forall b \in B \ \ b^T (f(y) - f(z)) \ge 0;$$
$$\exists b^2 \in B: \left(b^2\right)^T (f(x) - f(y)) > 0.$$

Зафиксируем произвольный вектор $b \in B$ и определим знак выражения

$$\begin{aligned} &b^T (f(x) - f(z)) = \\ &= b^T (f(x) - f(y)) + b^T (f(y) - f(z)). \end{aligned} \tag{3}$$

Очевидно, (3) неотрицательно как сумма неотрицательных слагаемых. Кроме того, при $b = b^1$ или $b = b^2$ хотя бы одно слагаемое в правой части (3) строго положительно. Это означает, что существуют, по крайней мере, два вектора b, при которых (3) строго положительно.

Следовательно, выполняется включение $(x, z) \in R(B)$, а значит, $R(B)$ транзитивно.

3) Для доказательства инвариантности $R(B)$ относительно конусного преобразования достаточно заметить, что применение данного преобразования к критериям $f_j(x)$ никак не повлияет на выполнение неравенств (2). Следовательно, инвариантность также имеет место.

Теорема полностью доказана.

Допущение о согласованности критериев с $R^{ЛПР}$ означает, что при прочих равных условиях для ЛПР желательно получение по возможности больших значений каждого критерия. Покажем, что данное условие определяет тесную связь между $R^{ЛПР}$ и отношением Парето Par.

Лемма 1. 1) Каждый критерий согласован с отношением Парето.

2) Если для некоторого отношения P выполняется включение $Par \subseteq P$, то каждый критерий согласован с P.

3) Обратно, если каждый критерий согласован с транзитивным отношением P, то $Par \subseteq P$.

Доказательство. Пусть для пары альтернатив u, v и произвольного номера критерия i выполняется соотношение: $f_i(u) > f_i(v)$ и $f_j(u) = f_j(v)$ для всех $j \neq i$. Тогда, очевидно, $(u,v) \in Par$. В силу произвольности номера i, это означает, что с отношением Парето согласован каждый критерий. Отсюда из $Par \subseteq P$ следует $(u,v) \in P$. Значит с отношением P также согласован каждый критерий.

Обратно, пусть каждый критерий согласован с неким транзитивным отношением P и пусть для пары альтернатив u, v выполняется $(u,v) \in Par$. Тогда $f_j(u) \geq f_j(v)$ для всех j. Следовательно,

$$f(u) = (f_1(u), f_2(u), \dots, f_s(u))^T$$
$$P(f_1(v), f_2(u), \dots, f_s(u))^T$$
$$P(f_1(v), f_2(v), \dots, f_s(u))^T \dots$$
$$P(f_1(v), f_2(v), \dots, f_s(v))^T = f(v).$$

В этой цепочке опущены совпадающие пары.

Следовательно, $(u,v) \in P$, а, значит $Par \subseteq P$.

Лемма полностью доказана.

Из включения $Par \subseteq P$, по известному свойству бинарных отношений получим $Ndom^P(X) \subseteq Ndom^{Par}(X)$, где обозначено $Ndom^P(X)$ – множество альтернатив из X, недоминируемых по отношению P. Иными словами, получаем:

Следствие. Множество альтернатив, недоминируемых по транзитивному отношению P, с которым согласован каждый критерий, будет сужением множества Парето.

Рассмотрим ещё некоторые свойства конусов в пространстве критериев.

Обозначим $E^s_{\geq 0}$ – неотрицательный ортант без нулевой точки в пространстве критериев $f_j(x)$. Очевидны следующие утверждения.

Лемма 2. Отношение Парето является конусным отношением с конусом $E^s_{\geq 0}$.

Лемма 3. Конус K отношения $R^{ЛПР}$ удовлетворяет условию $E^s_{\geq 0} \subseteq K$.

Определение 4. Если H – конус, то множество векторов

$$H^* = \{b \mid x \in H \Rightarrow b^T x \geq 0\}$$

называется *конусом, сопряжённым с* H.

Перечислим основные свойства сопряжённого конуса [7]: конус H^* всегда замкнут; если конус H выпуклый, то H^* тоже выпуклый.

Кроме того, справедливы следующие два утверждения [7].

Обозначим $[H]$ – замыкание конуса H.

Лемма 4 (Лемма 3.4, [7], стр. 25). Если H – выпуклый замкнутый конус, и $(x^*)^T x \geq 0$ для любого $x^* \in H^*$, то $x \in H$.

Лемма 5 (Лемма 3.5, [7], стр. 26). Если H – замкнутый конус, то $H^{**} = H$. В общем случае $H^{**} = [H]$.

Докажем также новую лемму о сопряжённых конусах.

Лемма 6. Если $H_1 \subseteq H_2$ – конусы и H_1 замкнут, то $H_2^* \subseteq H_1^*$.

Доказательство. Пусть $x^* \in H_2^*$. Тогда $(x^*)^T x \geq 0$ для любого $x \in H_2$. Но в силу включения $H_1 \subseteq H_2$ также будет $(x^*)^T y \geq 0$ для любого $y \in H_1$.

По лемме 5 в силу замкнутости H_1 имеем равенство $H_1 = H_1^{**}$, а значит $y \in H_1^{**}$. Но отсюда по лемме 4 следует, что $x^* \in H_1^*$. Лемма доказана.

Приступим теперь к доказательству основных утверждений.

Теорема 3. Пусть $H \subset E^s$ – выпуклый замкнутый острый конус, H^* – конус, сопряжённый с H, а $H \setminus \{0\}$ – конус, полученный из H удалением нулевой точки. Тогда $R_{H \setminus \{0\}} = R(H^*) \subset X \times X$.

Доказательство. Пусть $(u,v) \in R_{H \setminus \{0\}}$, а, следовательно, $f(u) - f(v) \in H \setminus \{0\}$ и $f(u) - f(v) \in H$. Тогда по определению сопряжённого конуса $b^T(f(u) - f(v)) \geq 0$ для любого b из H^*. Если при этом существует $b^0 \in H^*$, для которого последнее неравенство становится строгим, то $(u,v) \in R(H^*)$.

Предположим, однако, что не нашлось такого b^0, и для любого $b \in H^*$ будет $b^T(f(u)-f(v))=0$. Но такое же равенство справедливо и для вектора $-(f(u)-f(v))$ и при этом $f(u)-f(v)\neq 0$. Это означает, что условия леммы 4 выполнены и ненулевые векторы $\pm(f(u)-f(v))$ принадлежат конусу H. Это, очевидно, противоречит условиям теоремы, по которому H – острый. Значит $b^0 \in H^*$ существует и $(u,v)\in R(H^*)$.

Обратно, пусть $(u,v)\in R(H^*)$. Это означает справедливость формулы (2) при $B=H^*$. В силу леммы 4 отсюда следует $(f(u)-f(v))\in H$.

По теореме 2 отношение $R(H^*)$ антирефлексивно, значит $f(u)-f(v)\neq 0$. То есть $(f(u)-f(v))\in H\setminus\{0\}$ и $(u,v)\in R_{H\setminus\{0\}}$.

Теорема полностью доказана.

Теорема 4. Пусть $B_1 \subseteq B_2 \subset E^s$ – два конуса, а R_1, R_2 – бинарные отношения на множестве альтернатив X, порожденные B_1 и B_2, соответственно. Предположим также, что в X не существует альтернативы x^0, для которой тождественно для всех $b\in B_1$ и для всех $y\in X$ выполняется равенство

$$b^T\left[f(y)-f\left(x^0\right)\right]=0. \tag{4}$$

Тогда $Ndom^{R_1}(X)\subseteq Ndom^{R_2}(X)$.

Доказательство. Пусть $x\in Ndom^{R_1}(X)$ и при этом $x\notin Ndom^{R_2}(X)$. Это должно означать, что существует такая альтернатива $y\in X$, что $(y,x)\in R_2$, т. е.

$$\forall b\in B_2 \quad b^T\left[f(y)-f(x)\right]\geq 0.$$

В силу включения $B_1\subseteq B_2$ имеем для любого $b\in B_1$

$$b^T\left[f(y)-f(x)\right]\geq 0. \tag{5}$$

Предположим, что нашёлся вектор $b^0\in B_1$, делающий неравенство (5) строгим. Тогда $(y,x)\in R_1$, а этого не может быть, поскольку $x\in Ndom^{R_1}(X)$. Получаем противоречие.

Теперь предположим, что такого вектора $b^0\in B_1$ не нашлось. Это может означать, что мы неудачно выбрали y, и при другом его выборе нужный b^0 найдётся. Тогда мы получим предыдущий случай.

Но возможно, наши попытки окажутся тщетными и при любом $y\in X$ будет выполняться равенство (4) тождественно для всех $b\in B_1$. Но это будет означать нарушение условия теоремы. Снова получаем противоречие. Теорема доказана.

Теперь опишем процесс построения аппроксимации отношения предпочтения ЛПР. Пусть предпочтение ЛПР выражается конусным бинарным отношением $R^{ЛПР}$ с конусом K без вершины, таким что $E^s_{\geq 0}\subseteq K\subset E^s$. Пусть имеется набор s-мерных векторов (*обучающая выборка*) $v^1,\ v^2,\dots,\ v^m,\ m\geq 0$, для которых экспертно установлена принадлежность $v^1,\ v^2,\dots,\ v^m\in K\setminus E^s_{\geq 0}$. Образуем конус M без нулевой точки, натянутый на координатные орты критериального пространства $e^1,\ e^2,\dots,\ e^s$ и векторы обучающей выборки. Пусть, далее, M^* – конус, сопряжённый к M, а $R(M^*)$ – бинарное отношение, порождённое M^* в соответствии с формулой (2).

Теорема 5. Если конус M построен описанным выше способом и является острым, то справедливо соотношение

$$Ndom^{R^{ЛПР}}(X)\subseteq Ndom^{R(M^*)}(X)\subseteq P(X),$$

где $P(X)$ – множество парето-оптимальных альтернатив набора X.

Доказательство. По построению, $E^s_{\geq 0}\subseteq M$. Оба конуса отличаются от своего замыкания лишь на нулевую точку. Следовательно, $\left[E^s_{\geq 0}\right]\subseteq[M]$, кроме того $\left(E^s_{\geq 0}\right)^*=\left[E^s_{\geq 0}\right]$. Отсюда, по лемме 6, $M^*\subseteq\left[E^s_{\geq 0}\right]$. Следовательно, по теореме 4, $Ndom^{R(M^*)}(X)\subseteq$ $\subseteq Ndom^{R\left([E^s_{\geq 0}]\right)}(X)$.

Но по теореме 3 и лемме 2 $R_{E^s_{\geq 0}}=R\left([E^s_{\geq 0}]\right)=Par$. Следовательно,

$$Ndom^{R(M^*)}(X)\subseteq P(X).$$

Далее, $[M]\subseteq[K]$. Значит, по лемме 4, $K^*\subseteq M^*$. Отсюда, по теореме 4

$$Ndom^{R^{ЛПР}}(X)\subseteq Ndom^{R(M^*)}(X).$$

Теорема полностью доказана.

3. АЛГОРИТМ СУЖЕНИЯ

Для построения выбора на основе бинарного отношения, описанного в тереме 5, нам понадобится проверять справедливость соотношений (2) для различных пар альтернатив. Поэтому позаботимся об алгоритмическом описании способа проверки.

Пусть замкнутый конус $B \subset E^s$ представлен системой линейных однородных неравенств

$$Ab \ge 0, \tag{6}$$

где A – некоторая матрица, и при этом удовлетворяет соотношению $B \subseteq \left[E^s_{\ge 0}\right]$, или, что то же самое,

$$b_j \ge 0,\ \ j = 1,\dots,s. \tag{7}$$

Очевидно, что решения однородной системы (6) определены с точностью до положительного множителя, поэтому для получения однозначных решений на переменные b_j целесообразно наложить некоторое нормирующее условие, например

$$\sum_{j=1}^{s} b_j = 1. \tag{8}$$

Данное условие, очевидно, не противоречит (7). Тогда вместо конуса B будем говорить о многограннике $\tilde{B}$.

Пусть теперь имеем некоторую пару альтернатив (x, y) с векторными критериями $f(x)$ и $f(y)$, которую необходимо проверить на предмет выполнения соотношения (2), в котором коэффициенты b_j должны удовлетворять условиям (6)–(8). Очевидно, в силу замкнутости $\tilde{B}$, соотношение (2) можно также представить в следующем виде:

$$(x,y) \in R(B) \Leftrightarrow \begin{cases} \max\limits_{b\in\tilde{B}} b^T(f(x)-f(y)) > 0 \\ \min\limits_{b\in\tilde{B}} b^T(f(x)-f(y)) \ge 0\ . \end{cases} \tag{9}$$

Проверку условия (9) легко свести к решению соответствующих задач линейного программирования.

Метод сужения может быть разработан на основе известного алгоритма построения множества альтернатив, недоминируемых по бинарному отношению $R(\tilde{B})$ (см., например, [6]). Для этого необходимо организовать проверку включения $(x, y) \in R(\tilde{B})$ для всевозможных пар альтернатив. Для этого необходимо, как было сказано выше, решить для каждой пары (x, y) две задачи линейного программирования для поиска и проверки знака $\max\limits_{b\in\tilde{B}} b^T(f(x)-f(y))$ и $\min\limits_{b\in\tilde{B}} b^T(f(x)-f(y))$. Более эффективный алгоритм сравнения альтернатив можно построить, если предварительно найти базисные решения системы

$$b^T\left(v^k\right) \ge 0,\ \ k = 1,2,\dots,m. \tag{10}$$

При дополнительных условиях (7), (8).

Теорема 6. Пусть $\tilde{B}$ – выпуклый многогранник, определяемый системой неравенств (7), (8), (10). Обозначим b^i, $i = 1,\dots,p$ – векторы базисных решений системы. Тогда отношение $R(\tilde{B})$ можно представить в следующем виде

$$(x,y) \in R(\tilde{B}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \quad (b^i)^T(f(x)-f(y)) \ge 0 \\ \exists\ j : (b^j)^T(f(x)-f(y)) > 0\ . \end{cases} \tag{11}$$

Доказательство. Поскольку $\forall i\ \ b^i \in \tilde{B}$, то из (2) следует (11).

Покажем обратное следование. Пусть выполнено (11). Выберем любой вектор $b \in \tilde{B}$. Имеем соотношение

$$b = \sum b^i \tau_i,\ \tau_i \ge 0, \sum \tau_i = 1. \tag{12}$$

Тогда для любых $x, y \in X$

$$b^T[f(x)\ - f(y)] = \sum_u b_u[f_u(x) - f_u(y)] =$$
$$= \sum_u (\sum_i b_u^i \tau_i)[f_u(x) - f_u(y)] =$$
$$= \sum_i \tau_i \sum_u b_u^i [f_u(x) - f_u(y)].$$

Так как, согласно (11), при любом i внутренняя сумма в последнем выражении неотрицательна, а $\tau_i \ge 0$, то $b^T[f(x) - f(y)] \ge 0$.

Следовательно, верно первое из условий (2). Второе неравенство в (2) совпадает со вторым неравенством из (11), т. к. $b^j \in \tilde{B}$. Теорема доказана.

Таблица 1

Исходное множество альтернатив				
	A_1	A_2	A_3	A_4
$f_1(x)$	1	2	3	5
$f_2(x)$	4.5	3	2	1.5
$f_3(x)$	2	1	1.5	2

Следствие. Координаты базисных точек b^i могут быть использованы в качестве коэффициентов новых критериальных функций $r_i(x) = (b^i)^T f(x)$, а выбор $Ndom^{R(\tilde{B})}(X)$ будет совпадать с множеством $P_r(X)$ – множеством Парето на наборе критериальных функций $r_i(x)$.

Пример. Исходное множество X альтернатив приведено в табл. 1.

В качестве обучающей выборки возьмём две пары критериальных векторов

$$(p^1, q^1) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \in R^{ЛПР};$$

$$(p^2, q^2) = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \in R^{ЛПР}$$

Отсюда $v^1 = p^1 - q^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix};$

$$v^2 = p^2 - q^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, система (10) имеет вид

$$\begin{cases} -2b_1 + 3b_2 + b_3 \ge 0 \\ 4b_1 - b_2 + b_3 \ge 0 \\ b_1 \ge 0,\ b_2 \ge 0,\ b_3 \ge 0 \end{cases}. \qquad (13)$$

Её базисные решения, соответствующие (8), приведены в табл. 2.

Таблица 2

Базисные решения системы (8), (13)					
$f_1(x)$	0.2	0.6	0	0.33333	0
$f_2(x)$	0.8	0.4	0.5	0	0
$f_3(x)$	0	0	0.5	0.66667	1

Следовательно, предлагаются 5 новых критериев:

$$r_1(x) = 0.2f_1(x) + 0.8f_2(x);$$

$$r_2(x) = 0.6f_1(x) + 0.4f_2(x);$$

$$r_3(x) = f_3(x);$$

$$r_4(x) = 0.5f_2(x) + 0.5f_3(x);$$

$$r_5(x) = 0.33333f_1(x) + 0.6667f_3(x).$$

Множество Парето, соответствующее новым критериям, будет состоять только из альтернатив A_1 и A_4.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 14–01–00653 (а)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вилюмс Э. Р.* Определение системы предпочтений лица, принимающего решение по апостериорной информации / Э. Р. Вилюмс, В. И. Коркоц // Методы и системы принятия решений. – Рига : РПИ, 1979. – С. 51–56.

2. *Киселёв Н. И.* Экспертно-статистический метод определения функции предпочтений по результатам парных сравнений объектов / Н. И. Киселёв // Алгоритмическое и программное обеспечение прикладного статистического анализа. – М. : Наука, 1980. – С. 111–123.

3. *Сысоев В. В.* Автоматизированное проектирование линий и комплектов оборудования полупроводникового и микроэлектронного производства / В. В. Сысоев. – М. : Радио и связь, 1982. – 120 с.

4. *Бугаев Ю. В.* Алгоритм бисекции в экстраполяции экспертных оценок / Ю. В. Бугаев // Экономика и математические методы. – 2002. – т. 38, № 3. – С. 121–125.

5. *Бугаев Ю. В.* Приближенный метод синтеза моделей выбора на основе экстраполяции экспертных оценок / Ю. В. Бугаев, И. Е. Медведкова, Б. Е. Никитин, А. С. Чайковский // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2009. – Т. 15, № 4. – С. 766–776.

6. *Ногин В. Д.* Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход / В. Д. Ногин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 176 с.

7. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б. Н. Пшеничный. – М. : Наука, 1980. – 320 с.

Бугаев Ю. В. – д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры информационных технологий моделирования и управления, факультет управления и информатики в технологических системах, Воронежский государственный университет инженерных технологий.
E-mail: y_bugaev52@mail.ru.

Никитин Б. Е. – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры информационных технологий моделирования и управления, факультет управления и информатики в технологических системах, Воронежский государственный университет инженерных технологий.
E-mail: nbe6419@mail.ru

Диоп А. – магистрант кафедры информационных технологий моделирования и управления, факультет управления и информатики в технологических системах, Воронежский государственный университет инженерных технологий.
E-mail: diopameth@mail.ru

Bugaev Yuri Vladimirovich – Dr. Sc. (Phis. & Math.), Full Prof., Dept. of Information Technology modeling and management, Faculty of Management and Informatics in technological systems, Voronezh State University of Engineering Technologies.
E-mail: y_bugaev52@mail.ru

Nikitin Boris Yegorovich – Ph. D. (Phis. & Math.), Ass. Prof., Dept. of In-formation Technology modeling and management, Faculty of Management and Informatics in technological systems, Voronezh State University of Engineering Technologies.
E-mail: nbe6419@mail.ru

Diop A. – student of magistracy, Dept. of Information Technology modeling and management, Faculty of Management and Informatics in technological systems, Voronezh State University of Engineering Technologies.
E-mail: diopameth@mail.ru