УДК 519.112.71

ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТНОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ ЦЕЛЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Г. Д. Чернышова, А. С. Чигодаева

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 30.03.2016 г.

Аннотация. Рассматриваются производственные задачи оптимизации транспортного типа с целочисленными переменными, а также задачи с разрывными целевыми функциями. Предлагаются приближённые алгоритмы решения задач, возникающих, например, при закреплении поставщиков за потребителями. Кроме того предложены математическая модель и алгоритм решения трёхиндексной транспортной задачи с фиксированными доплатами.

Ключевые слова: задача оптимизации, транспортная задача (ТЗ), целевая функция, математическая модель, метод потенциалов, приближённый алгоритм решения.

Annotation. We consider the production optimization tasks of transport-typed with discrete variables. The tasks with discontinuous objective functions are considered too. There are proposed the approximate algorithms for solving tasks such as consolidation of suppliers for consumers. Moreover, the mathematical model and the algorithm for solving three-index transport task of fixed surcharges are proposed too.

Keywords: an optimization task, a transport task, the objective function, a math model, a potential method, the approximate algorithm.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из транспортных задач с разрывной целевой функцией является известная *задача с фиксированными доплатами*, изложенная, например, в [1].

В задаче ищутся величины x_{ij} (объёмы перевозок из пункта i в пункт j), удовлетворяющие естественным транспортным ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ x_{ij} \geq 0,$$

$$i = 1,\dots,m,\quad j = 1,\dots,n,$$

и минимизирующие функцию

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x_{ij}).$$

В этом случае целевая функция является разрывной, так как каждое $c_{ij}(x_{ij})$ имеет вид:

$$c_{ij}(x_{ij}) = \begin{cases} 0, & x_{ij} = 0 \\ c_{ij}x_{ij} + d_{ij}, & x_{ij} > 0 \end{cases},$$

$$i = 1,\dots,m,\quad j = 1,\dots,n,$$

где c_{ij} – затраты на перевозку единицы груза из i-го пункта производства в j-ый пункт потребления, $i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n;$

d_{ij} – фиксированные доплаты (например, плата за аренду ТС), $i = 1,\dots,m,\quad j = 1,\dots,n.$ В [1] предложены приближённые алгоритмы решения таких задач.

На практике часто возникают ситуации, отличающиеся от рассмотренной, например, тем, что ТЗ может быть многопродуктовой (трёхиндексной). Такая задача, в частности, рассматривается в данной работе.

1. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ВЫБОРА ПОСТАВЩИКОВ

Задача такого типа может быть формализована в виде многокритериальной транспортной задачи с дискретными переменными.

Рассматривается задача со следующей исходной информацией:

m – количество поставщиков;

n – количество потребителей;

a_i – объём производства i-го поставщика, $i = 1,\ldots,m$;

b_j – объём потребления, необходимый j-му потребителю, $j = 1,\ldots,n$;

Требуется определить план перевозок таким образом, чтобы минимизировать количество поставщиков у каждого потребителя. Для простоты будем считать, что условие разрешимости закрытой ТЗ выполнено, т. е. имеет место равенство (*условие баланса*):

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} b_j,\ I \subset \{1\ldots m\},\ J \subset \{1\ldots n\}.$$

Введём переменные следующим образом:

x_{ij} – количество единиц продукта, перевозимого из i-го пункта производства в j-й пункт потребления, $i = 1,\ldots,m,\ \ j = 1,\ldots,n$;

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й поставщик закреплен за} \\ & j\text{-м потребителем,} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$i = 1,\ldots,m,\ \ j = 1,\ldots,n.$$

Математическая модель задачи при этом будет иметь следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} \to \min,\ j = 1,\ldots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ \ i = 1,\ldots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ \ j = 1,\ldots,n,$$

$$x_{ij} \ge 0,\ \ i = 1,\ldots,m,\ \ j = 1,\ldots,n,$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{ij} > 0 \\ 0, & \text{если } x_{ij} = 0 \end{cases},$$

$$i = 1,\ldots,m,\ \ j = 1,\ldots,n.$$

Рассмотрим переход к одноцелевой задаче, используя суммарную свёртку критериев (такой приём является разумным, в частности, в случае, если у всех предприятий-потребителей один владелец). Задача примет следующий вид

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} y_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ \ i = 1,\ldots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ \ j = 1,\ldots,n,$$

$$x_{ij} \ge 0,\ \ i = 1,\ldots,m,\ \ j = 1,\ldots,n,$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{ij} > 0 \\ 0, & \text{если } x_{ij} = 0 \end{cases}, \qquad (*)$$

$$i = 1,\ldots,m,\ \ j = 1,\ldots,n.$$

Из условия (*) видно, что чем меньше положительных координат имеет допустимый вектор X, тем больше нулевых значений принимает переменная Y и следовательно, тем меньшее значение имеет целевая функция.

Таким образом, задача сводится к отысканию допустимого вектора с минимальным числом положительных координат.

Из теории транспортных задач известно, что любая невырожденная базисная точка имеет $k = m + n - 1$ положительную координату. Меньше положительных координат имеют *вырожденные* базисные точки. На этом факте основывается предлагаемый приближённый алгоритм решения, который состоит из следующих этапов.

Алгоритм 1.

1. Определить наличие вырожденности в транспортной задаче проверкой равенств

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} b_j,\ \ I \subset \{1\ldots m\},\ J \subset \{1\ldots n\}.$$

Поскольку количество таких равенств равно 2^{m+n}, то возможно осуществляется проверка только некоторых равенств (в зависимости от размеров задач).

2. Перенумеровать данные для работы метода северо-западного угла в порядке, соответствующем найденным суммам.

3. Использовать метод северо-западного угла для отыскания вырожденной базисной точки.

4. Полученный план перевозок считать решением задачи (возможно приближённым).

Рассмотрим работу данного алгоритма на примере. Исходные данные имеют следующий вид:

$$a_1 = 40,\ \ a_2 = 15,\ \ a_3 = 10$$

$$b_1 = 10,\ \ b_2 = 20,\ \ b_3 = 20,\ \ b_4 = 15$$

1) При проверке условия вырожденности получим:

$$a_2 = b_4,\ \ a_3 = b_1,\ \ a_1 = b_2 + b_3.$$

2) Перенумеруем исходные данные следующим образом:

$$a_1^{\acute{\imath}} = a_2,\ a_2^{\acute{\imath}} = a_3,\ a_3^{\acute{\imath}} = a_1$$
$$b_1^{\acute{\imath}} = b_4,\ b_2^{\acute{\imath}} = b_1,\ b_3^{\acute{\imath}} = b_2,\ b_4^{\acute{\imath}} = b_3.$$

3) Решаем задачу методом северо-западного угла с новыми данными и получаем в результате матрицу

$$X = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \end{pmatrix}.$$

Количество положительных координат равно четырём, в то время как невырожденный план перевозок имеет $3+4-1=6$ положительных координат. Так как осуществляется проверка всех возможных равенств, то можно утверждать, что получено точное решение задачи с минимальным значением целевой функции, равным 4.

2. ТРЁХИНДЕКСНАЯ ЗАДАЧА ЗАКРЕПЛЕНИЯ ПОСТАВЩИКОВ ЗА ПОТРЕБИТЕЛЯМИ

Как правило, возникает необходимость составления плана перевозок нескольких видов продукции. При этом необходимо найти такой план перевозок, который обеспечивает каждому потребителю минимальное число поставщиков.

Введём следующие обозначения:

m – количество поставщиков;

n – количество потребителей;

K – количество видов продукции;

a_i^k – объём производства k-го вида продукции i-го поставщика,

$i=1,\dots,m,\ k=1,\dots,K$;

b_j^k – объём k-го вида продукции, необходимый j-му потребителю,

$j=1,\dots,n,\ k=1,\dots,K$;

y_{ij} – наличие связи между i-м поставщиком и j-м потребителем,

$i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n$;

x_{ij}^k – количество k-го продукта, перевозимого от i-го поставщика j-му потребителю, $i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n,\ k=1,\dots,K$.

Задача в этом случае формализуется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} \to \min,\ j=1,\dots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^k = a_i^k,\ i=1,\dots,m,\ k=1,\dots,K,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^k = b_j^k,\ j=1,\dots,n,\ k=1,\dots,K,$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{k=1}^{K} x_{ij}^k > 0 \\ 0, & \text{если } \sum_{k=1}^{K} x_{ij}^k = 0 \end{cases},$$

$$i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n,$$

$$x_{ij}^k \ge 0,\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n,\ k=1,\dots,K.$$

Для перехода к одноцелевой задаче, в качестве критерия рассматривается суммарное число связей «поставщик – потребитель», т. е. целевая функция вида:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} y_{ij} \to \min.$$

Предлагается следующий алгоритм решения задачи.

Алгоритм 2.

1. Используя исходные данные упорядочить номера k, например, следующим образом

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^{k_1} \ge \sum_{i=1}^{m} a_i^{k_2} \ge \dots \ge \sum_{i=1}^{m} a_i^{k_K}.$$

Результатом будет являться последовательность номеров $k_1, k_2, \dots, k_k$.

2. Решить методом потенциалов первую задачу (при $k=k_1$), используя любую имеющуюся целевую функцию. Например, минимизируя суммарную стоимость перевозок. Если данные для формирования целевой функции отсутствуют, то решить задачу, используя **Алгоритм 1**.

3. Сформировать множество

$$I^1 = \left\{ (i,j) : x_{ij}^{k_1} > 0 \right\}.$$

4. Перейти к $k=k_2$. Решить методом потенциалов ТЗ с запретами с целевой функцией вида:

$$c_{ij}^2 = \begin{cases} 0, & \forall (i,j) \in I^1 \\ M, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где M – любое положительное число.

5. Сформировать множество

$$I^2 = I^1 \cup \left\{ (i,j) : x_{ij}^{k_2} > 0 \right\}.$$

6. Решить ТЗ с запретами при $k=k_3$ с целевой функцией вида:

$$c_{ij}^3 = \begin{cases} 0, & \forall (i,j) \in I^2 \\ M, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Перейти к следующему номеру $k = k_4$ и т. д.

7. Решение заканчивается при $k = K$.

Ответом являются полученные значения переменных $x_{ij}^k > 0,\ k = 1,\dots,K,$ по которым определяются связи «поставщик – потребитель».

3. МНОГОПРОДУКТОВАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА С ФИКСИРОВАННЫМИ ДОПЛАТАМИ

Рассматривается многопродуктовая (3х-индексная) ТЗ, в которой коэффициенты целевой функции зависят от переменной x_{ij} нелинейно.

Фиксированные доплаты d_{ij} присутствуют в случае, если осуществляются перевозки из i-го пункта производства в j-й пункт потребления хотя бы одного вида продукта, и отсутствуют в противном случае.

Введём обозначения следующим образом:

m – количество поставщиков;

n – количество потребителей;

K – количество видов продукции;

a_i^k – наличие k-го вида продукции у i-го поставщика, $i = 1,\dots,m,\ k = 1,\dots,K$;

b_j^k – объём потребления k-го вида продукции j-го потребителя, $j = 1,\dots,n,$ $k = 1,\dots,K$;

c_{ij}^k – затраты на перевозку единицы k-го продукта от i-го поставщика j-му потребителю, $i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n,\ k = 1,\dots,K$;

d_{ij} – доплаты, возникающие при наличии ненулевых перевозок от i-го поставщика j-му потребителю, $i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n$;

x_{ij}^k – количество k-го продукта, перевозимого от i-го поставщика j-му потребителю, $i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n,\ k = 1,\dots,K.$

Будем считать, что выполнены условия баланса по каждому виду продукции, т. е. имеют место равенства

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^k = \sum_{j=1}^{n} b_j^k,\ k = 1,\dots,K.$$

В задаче требуется составить план перевозок, обеспечивающий удовлетворение всех потребителей за счёт имеющегося в пунктах производства продукта при минимальных суммарных расходах.

Математическая модель данной транспортной задачи будет иметь следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}^k\left(x_{ij}^k\right) \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^k = a_i^k,\ i = 1,\dots,m,\ k = 1,\dots,K,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^k = b_j^k,\ j = 1,\dots,n,\ k = 1,\dots,K,$$

$$x_{ij}^k \ge 0,\ i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n,\ k = 1,\dots,K,$$

где

$$c_{ij}^k(x_{ij}^k) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{K} c_{ij}^k x_{ij}^k + d_{ij}, & \text{если } \sum_{k=1}^{K} x_{ij}^k > 0 \\ 0, & \text{если } \sum_{k=1}^{K} x_{ij}^k = 0 \end{cases},$$

$i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n.$

Приближённый алгоритм для отыскания решения многопродуктовой задачи с доплатами основывается на последовательном решении аналогичных задач при фиксированных k (так как при каждом зафиксированном k возникает однопродуктовая транспортная задача с фиксированными доплатами). Для получения приближённого решения однопродуктовой задачи используется один из алгоритмов решения ТЗ с фиксированными доплатами, описанный в [1]. Этот алгоритм предполагает переход к решению стандартной ТЗ с целевой функцией вида:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(c_{ij} + {d_{ij}}/{M_{ij}}\right)x_{ij} \to \min,$$

где $M_{ij} = \min\left\{a_i, b_j\right\}$.

Алгоритм 3.

1. Упорядочить продукты, например, по востребованности у потребителей

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^{k_1} \ge \sum_{j=1}^{n} b_j^{k_2} \ge \dots \ge \sum_{j=1}^{n} b_j^{k_K}.$$

2. Зафиксировать $k = k_1$. Определить величину

$$M_{ij}^{k_1} = \min\left\{a_i^{k_1}, b_j^{k_1}\right\},\ i = 1,\dots,m,\ \ j = 1,\dots,n.$$

Решить методом потенциалов транспортную задачу вида

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(c_{ij}^{k_1}+d_{ij}/M_{ij}^{k_1})x_{ij}^{k_1}\to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^{k_1}=a_i^{k_1},\ \ i=1,\dots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}^{k_1}=b_j^{k_1},\ \ j=1,\dots,n,$$

$$x_{ij}^{k_1}\ge 0,\ \ i=1,\dots,m,\ \ j=1,\dots,n.$$

3. Сформировать множество $I_1=\{(i,j):x_{ij}^{k_1}>0\}$. Перейти к следующему номеру $k=k_2$.

Пусть решены задачи при $k=k_1,\dots,k_{k-1}$ и зафиксировано множество I_{k-1}.

4. Сформировать целевую функцию с новыми коэффициентами c_{ij}^k следующим образом:

$$\overline{c_{ij}^k}=\begin{cases} c_{ij}^k, & \forall(i,j):x_{ij}\in I_{k-1}\\ \left(c_{ij}^k+\dfrac{d_{ij}}{M_{ij}^k}/+P^k\right), & \text{в противном случае}\end{cases},$$

$$i=1,\dots,m,\ \ j=1,\dots,n,\ \ k=1,\dots,K,$$

где число $P^k>0$ играет роль штрафа.

5. Решить ТЗ с запретами с целевой функцией вида

$$\sum_{j=1}^{n}\overline{c_{ij}^k}\left(x_{ij}^k\right).$$

6. Сформировать множество

$$I_k=I_{k-1}\cup\{(i,j):x_{ij}^k>0\}.$$

7. Зафиксировать следующий номер k. Перейти к пункту 4.

Алгоритм заканчивает работу при $k=K$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корбут А. А.* Дискретное программирование / А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. – 368 с.

2. *Гольштейн Е. Г.* Задачи линейного программирования транспортного типа / Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин – М. : Наука, 1969. – 304 с.

3. *Осыкина Ю. А.* Многокритериальная транспортная задача с разрывной целевой функцией / Ю. А. Осыкина, Г. Д. Чернышова // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2008. – № 2. – С. 10–12.

Чернышова Галина Дмитриевна – к.т.н., доцент кафедры математических методов исследования операций факультета ПММ, Воронежский государственный университет.
Тел.: 8-903-854-70-78
E-mail: chern@vsau.ru

Чигодаева Александра Сергеевна – магистрант кафедры математических методов исследования операций факультета ПММ, Воронежский государственный университет.
Тел.: 8-920-446-25-68
E-mail: lady-alex3@mail.ru

Chernyshova G. D. – docent of the department of Mathematical Methods of Operations Research; the Faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics; Candidate of Technical Sciences; Voronezh State University.
Тел.: 8-903-854-70-78
E-mail: chern@vsau.ru

Chigodaeva A. S. – postgraduate of the department of Mathematical Methods of Operations Research; the Faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics; Voronezh State University.
Тел.: 8-920-446-25-68
E-mail: lady-alex3@mail.ru