УДК 519.86; 510; 514

СТРУКТУРА АТТРАКТОРА РАНДОМИЗИРОАННЫХ СИСТЕМ ИТЕРИРОВАННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

А. Г. Буховец, Т. Я. Бирючинская

Воронежский государственный аграрный университет им. Императора Петра I

Поступила в редакцию 11.05.2016 г.

Аннотация. В статье рассматриваются свойства множеств, полученных в результате выполнения рандомизированных систем итерированных линейных функций. Показывается, что структура аттрактора, определяемая свойствами итерированных линейных функций, приводит к тому, что для заданной на нем метрике выполняется усиленное неравенство треугольника. Фактически это означает, что на аттракторе может быть определена ультраметрика, что в свою очередь делает очевидным многие фрактальные свойства аттрактора.
Ключевые слова: рандомизированне системы итерированных функций, аттрактор, фрактальные свойства аттрактора, ультраметрическое пространство.
Annotation. The article deals with the properties of the sets obtained as a result of randomized systems iterated linear functions. It is shown that the attractor structure defined properties of the iterated linear functions, leads to the fact that for a given metric, it performed the strong triangle inequality. Practically, this means that the attractor can be defined ultrametric, which in turn makes it obvious many fractal properties of the attractor.
Keywords: randomized iterated function systems, attractor, fractal properties of the attractor, ultrametric space.

ВВЕДЕНИЕ. СИСТЕМЫ ИТЕРИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ

Системы итерированных функций (СИФ) представляют собой в самом общем виде определенный набор функций $\{f_i\}_{i=1}^{K}$, выполняемых в заданной последовательности. Результатом выполнения СИФ является некоторое компактное множество, как правило (но не обязательно), обладающее фрактальными свойствами [1]. Однако более удобным с точки зрения программной реализации является подход, при котором на каждой итерации реализуется только одна из функций f_i, взятая в соответствии с заданным вероятностным распределением $\{f_i / p_i\}_{i=1}^{K}$, $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{K} p_i = 1$. Такой подход к выполнению набора функций носит название рандомизированного, а сама система – рандомизированной системы итерированных функций (РСИФ).

Практика показала достаточно высокую эффективность использования РСИФ в различных технических задачах распознавания образов, построения классификаций, прогнозировании (см., например, [1], [5]–[8]). Особый интерес, на наш взгляд, представляет использование РСИФ в классификационных задачах [5], и задачах моделирования ментальных процессов [9]. В этих случаях построение (выбор) следующего объекта производится из некоторого множества объектов на основе заданного вероятностного распределения. Эффективность такой модели до некоторой степени можно объяснить линейным характером человеческой речи, который исключает возможность произнесения двух слов одновременно (Ф. де Соссюр).

РАНДОМИЗИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ИТЕРИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ

Наиболее простой вид функций $\left\{f_i\right\}_{i=1}^{K}$, составляющих систему – линейный, и при дополнительных ограничениях функция представляет собой выпуклую комбинацию

$$f^{(j)}\left(x_i\right)=\left(1-\xi\right)x_i+\xi Z_j^{(i)}, \qquad (1)$$

где ξ – фиксированное значение (параметр) и $\left\{Z_j\right\}_{j=1}^{K}$ – параметры, определяющие вид линейной функции; i – номер итерации.

Результат выполнения N итераций вида $x_{i+1}=f^{(j)}(x_i),\ \ j=1,\dots,N$ представляет совокупность точек $\left\{X_i\right\}_{i=1}^{N}$, называющихся протофракталом. Предельное множество, называемое аттрактором РСИФ, как было показано [3], является компактным, замкнутым и открытым, имеет нулевую лебегову меру и дробную фрактальную размерность [2]. В общем случае аттрактор РСИФ является гомоморфным отображением канторова множества. Такой способ построения аттрактора РСИФ будем обозначать F1.

Было показано [2], что в случае, когда значение параметра ξ постоянно и одинаково для всех функций, получить аттрактор РСИФ можно посредством разбиения на K классов множества слагаемых, определяемых соотношением

$$\mu\sum_{i=1}^{\infty}\xi^i=1, \qquad (2)$$

где μ – нормировочная константа, связанная со значением параметра ξ и равная $\mu=\xi^{-1}(1-\xi)$. Получаемые в этом случае на каждом шаге разбиения суммы подмножеств ряда (2) записываются в виде строки $A_l=\{a_{l1},a_{l2},\dots,a_{lK}\}$, причем каждый элемент a_{lj} является суммой взятых из ряда (2) членов в соответствии с заданным вероятностным распределением $\left\{f_i/p_i\right\}_{i=1}^{K}$. Очевидно, что $a_{lj}\ge 0;\ \sum_{j=s}^{K}a_{lj}=1$. В этом случае результат выполнения процедуры будет представлен в виде произведения $X=AZ$. Такой способ построения аттрактора РСИФ будем обозначать F2. Одновременное рассмотрение процедур F1 и F2 позволяет получить оценки параметров РСИФ в решениях прикладных задач.

Замечание. Пространство, образованное вектор-строками исходных данных, обычно называют **признаковым** пространством, а построенное с помощью F2 пространство A будем называть **классификационным** пространством [5]. Очевидно, что множество строк матрицы A не зависит от значений признаков объектов, а характеризует структурные особенности исходных данных X, и в этом смысле является инвариантом классификационной задачи.

Разделение пространств решения классификационной задачи на два отдельных, но взаимосвязанных пространства, как считают некоторые авторы, может иметь обоснование и в дальнейшем служить математической моделью теории о бессознательном и сознательном Фрейда [9].

Признаковое пространство X и классификационное A изоморфны, т. е. идентичны по своей внутренней структуре – они реализуют одни и те же свойства в различных математических построениях.

Построенное множество A обладает следующими свойствами ([3], [5]): оно является вполне не связным; несчетным (потенциально); ограниченным, и, следовательно, компактным; имеющим нулевую лебеговскую меру. В целом это множество является, как уже было ранее отмечено, гомоморфным отображением канторова множества, и как канторово множество является совершенным.

При этом, как и все фрактальные множества, построенное множество имеет дробную фрактальную размерность [6], и обладает свойством самоподобия [8]. Ниже будет показано наличие этих свойств построенного отображения, а также отображение всего множества A на отдельный фрагмент с помощью преобразований подобия.

Относительно природы множеств A и X можно сказать следующее. Множество A классификационного пространства, обладающее всеми перечисленными выше свойствами, возникает в результате ментальных (мыслительных) процессов, которые можно моделировать, как было показано [9], посредством случайных динамических систем. В то же время, признаковое множество X является пространством эмпирически полученных измерений в натуральном масштабе единиц. Это пространство отражает непосредственные результаты измерений, и в некотором смысле является объективной стороной процесса классификации, в то время как классификационное пространство представляет результаты восприятия (отражения, воображения) наших когнитивных процессов.

ПРОСТРАНСТВО СЛУЧАЙНЫХ РАЗБИЕНИЙ СОВОКУПНОСТИ $\left\{\xi^i\right\}_{i=1}^{\infty}$

Рассмотрим совокупность членов ряда

$$\mu\sum_{i=1}^{\infty}\xi^i = \mu\left(\xi+\xi^2+\xi^3+\ldots+\xi^s+\ldots\right)=1 \quad (3)$$

как множество чисел, заданных над полем чисел вида ξ^s с известными способами сложения и умножения.

На множестве объектов $A_l=\left\{a_{l1},a_{l2},\cdots,a_{lK}\right\}$, где $a_{lj}\ge 0$; $\sum_{j=s}^{K}a_{lj}=1$, а элементы $a_{lj}=\mu\sum_{i'}\xi^{i'}$ получаются путем составления случайной суммы членов ряда (3), т. е. путем построения случайного разбиения ряда на K – заранее заданных классов, суммы элементов которых и представляют $A_l=\left\{a_{l1},a_{l2},\cdots,a_{lK}\right\}$.

Обозначим через $\left\{S_i\right\}_{i=1}^{K}$ разбиение совокупности элементов ряда (3) на K классов (подмножеств) множества (1). Тогда

$$S=\coprod_{i=1}^{K}S_i,$$

где символ $\coprod$ означает дизъюнктное объединение, т. е. объединение непересекающихся множеств [11]. Как было указано выше, через a_{ls} будем обозначать сумму элементов ряда, отнесенных к S_s на -ом шаге выполнения процедуры F2.

На множестве элементов a_{ls} определим норму следующим образом

$$\left|a_{ls}\right|_{\hat{\imath}}=\left|\mu\left(\xi^s+\xi^{s'}+\xi^{s''}+\ldots+\xi^{s'''}+\ldots\right)\right|_{\hat{\imath}}=\xi^s, \quad (4)$$

где $s=\min\{s,s',s'',s''',\ldots\}$.

Выполнение свойств однородности и мультипликативности над указанным числовым полем очевидны.

Проверка выполнения неравенства треугольника следует из следующих преобразований

$$\left|a_s+a_t\right|_\xi=\left|\mu\left(\xi^s+\xi^{s'}+\xi^{s''}+\ldots+\xi^{s'''}+\ldots\right)+\right.$$

$$\left.+\mu\left(\xi^t+\xi^{t'}+\xi^{t''}+\ldots+\xi^{t'''}+\ldots\right)\right|_\xi=$$

$$=\left|\mu\xi^s\left(1+\xi^{s'-s}+\xi^{s''-s}+\ldots+\xi^{s'''-s}+\ldots+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\xi^{t-s}+\xi^{t'-s}+\xi^{t''-s}+\ldots+\xi^{t'''-s}+\ldots\right)\right|_\xi=$$

$$=\xi^s\le\max\left\{\xi^s,\xi^t\right\}=$$

$$=\max\left\{\left|a_s\right|_\xi,\left|a_t\right|_\xi\right\}\le\left|a_s\right|_\xi+\left|a_t\right|_\xi.$$

Аналогично доказывается соотношение $\left|a_s\cdot a_t\right|_\xi=\left|a_s\right|_\xi\cdot\left|a_t\right|_\xi$.

На множестве элементов $\left\{a_s\right\}$ сложение определяет коммутативную группу, а умножение ассоциативно и согласованно со сложением по закону дистрибутивности.

Таким образом, введенное соотношение (4) будет обладать всеми свойствами нормы, т. е.

1. $\left|a_{ls}\right|_\xi\ge 0$, причем $\left|a_{ls}\right|_\xi=0\Leftrightarrow\left|a_{ls}\right|_\xi=0$
2. $\left|a_s\cdot a_t\right|_\xi=\left|a_s\right|_\xi\cdot\left|a_t\right|_\xi$;
3. $\left|a_s+a_t\right|_\xi\le\max\left\{\left|a_s\right|_\xi,\left|a_t\right|_\xi\right\}$;

3а. $\left|a_s+a_t\right|_\xi=\max\left\{\left|a_s\right|_\xi,\left|a_t\right|_\xi\right\}$, если $\left|a_s\right|_\xi\ne\left|a_t\right|_\xi$.

Неравенства 3 (в совокупности с 3а) называется усиленным неравенством треугольника. Введенная норма, как легко заметить, может принимать лишь счетное множество значений ξ^s, $(s\in\mathbb{Z})$.

Полученное множество чисел является полем, которое будем называть полем ξ-адических чисел и обозначать $\mathbb{Q}_\xi$ (по аналогии с p-адическимим числами [10]). Построенное пространство $\mathbb{Q}_\xi$ будет включать в себя множество A, т. е. классификационное пространство: $A\in\mathbb{Q}_\xi$.

На множестве ξ-адических чисел арифметические операции вводятся аналогично операциям со степенными рядами.

Естественным образом в этом пространстве вводится метрика

$$d_\xi\left(a_s,a_t\right)=\left|a_s-a_t\right|_\xi. \quad (5)$$

Первые два свойства однородности и симметричности метрики очевидны и легко проверяются. Рассмотрим третье свойство, связанное с выполнением неравенства треугольника

$$d_\xi\left(a_s,a_t\right)=\left|a_s-a_t\right|_\xi=\left|\left(a_s-a_q\right)-(a_t-a_{q)}\right|_\xi\le$$
$$\le\max\left\{\left|a_s-a_q\right|_\xi,\left|a_t-a_q\right|_\xi\right\}=$$
$$=\max\left\{d_\xi\left(a_s,a_q\right),d_\xi\left(a_t,a_q\right)\right\}<$$
$$<d_\xi\left(a_s,a_q\right)+d_\xi\left(a_t,a_q\right).$$

Как можно заметить, в данном случае выполняется не только неравенство треугольника, но и более сильное неравенство – ультраметрическое

$$d_\xi\left(a_s,a_t\right)\le\max\left\{d_\xi\left(a_s,a_q\right),d_\xi\left(a_t,a_\text{q}\right)\right\}. \quad (6)$$

Определенная таким образом норма задает ультраметрику в указанном поле $\mathbb{Q}_\xi$.

Следовательно, пространство элементов a_{ls} с введенной метрикой (4) будет ультраметрическим.

Замечание. Представим:

$$-1=(\xi-1)+(\xi-1)\xi+(\xi-1)\xi^2+\ldots=$$
$$=\left(\xi-1\right)\left(\xi+\xi^2+\xi^3+\ldots+\xi^s+\ldots\right).$$

Это позволяет определить вычитание в множестве объектов, полученных из (3).

Получаемые в результате выполнения процедуры F2 строки будем рассматривать как элементы пространства $\mathbb{Q}_\xi^K=(\mathbb{Q}_\xi\times\mathbb{Q}_\xi\times\cdots\times\mathbb{Q}_\xi)$. В этом пространстве введем норму

$$\left|A_i\right|_\xi=\max_j\left|a_{ij}\right|_\xi,\text{ где } a_{ij}\in\mathbb{Q}_\xi.$$

Проверим выполнение неравенства треугольника для этой нормы

$$\left|A_s+A_t\right|_\xi=\max_j\left\{\left|a_{sj}+a_{tj}\right|_\xi\right\}\le$$
$$\le\max_j\left\{\max(\left|a_{sj}\right|_\xi,\left|a_{sj}\right|_\xi)\right\}=$$
$$=\max\left\{\max_j(\left|a_{sj}\right|_\xi,\left|a_{sj}\right|_\xi)\right\}=$$
$$=\max\left\{\max_j\left(\left|a_{sj}\right|_\xi\right),\max_j\left(\left|a_{tj}\right|_\xi\right)\right\}=$$
$$=\max\left(\left|A_s\right|_\xi,\left|A_t\right|_\xi\right)\le\left|A_s\right|_\xi+\left|A_t\right|_\xi.$$

Таким образом, пространство $\mathbb{Q}_\xi^K$ будет ультраметрическим.

СВОЙСТВА УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ФРАКТАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА

Построенное классификационное пространство $\mathbb{Q}_\xi^K$ будет ультраметрическим. Это означает, что многие свойства этого пространства будут вступать в противоречия с традиционными представлениями о геометрических свойствах объектах в привычных, например, евклидовых пространствах. Поэтому имеет смысл перечислить основные из них. Доказательства можно найти в [10], [11].

1. В любом ультраметрическом пространстве все треугольники равнобедренные, т. е. для любого треугольника две стороны равны, а длина третьей стороны не превосходит дли этих двух равных сторон.

2. Множество точек $B_\rho\left(a_s\right)=\left\{a_i:\left|a_s-a_i\right|_\xi\le\rho\right\}$ называется шаром радиуса ρ в пространстве $\mathbb{Q}_\xi^n$.

Любые два шара в ультраметрическом пространстве либо не пересекаются, либо один содержится в другом.

Любая точка внутри ультраметрического шара является его центром.

3. Последовательность точек $a=a_0,\ a_1,\cdots,$ $a_n=b$ в метрическом пространстве называется ε-цепью, соединяющей точки a и b, если $d_\xi(a_k,a_{k+1})\le\varepsilon$. Точки a и b в этом случае называются ε-связными.

В ультраметрическом пространстве любые две точки a и b не будут ε-связными, если $d_\xi(a,b)>\varepsilon$.

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ САМОПОДОБИЯ НА АТТРАКТОРЕ РСИФ

Результаты выполнения процедуры F2 представим в виде матрицы A, обозначив $A_l=\left\{a_{l1},a_{l2},\cdots,a_{lK}\right\}$ – l-ую строку. Будем рассматривать множество строк матрицы $\left\{A_l\right\}_{l=1}^N$ как порождающее множество симметрической группы подстановок порядка K. Другими словами, совокупность $\left\{a_{l1},a_{l2},\cdots,a_{lK}\right\}$ будет представлять множество элементов, на котором задана операция подстановок. Очевидно, с учетом стохастического характера построения строк матрицы A, полученные результаты подстановок также могут быть отнесены к множеству строк матрицы A, поскольку элементы a_{ij} получены суммированием некоторых членов абсолютно сходящегося ряда (2) и условие нормировки при этом не будет нарушено.

Как было показано [4], среди элементов множества A_l имеется доминирующий, т. е. $\exists \hat{a}_i \equiv a_{lm} > \sum_{j \neq m}^{K} a_{ls}$. Тогда на множестве строк матрицы A можно выделить K подгрупп, представляющих **кластеры** $\{S_k\}$, $(k = 1, 2, \ldots, K)$, задав отношение эквивалентности в соответствии с правилом: $A_i \in S_m \Leftrightarrow \hat{a}_m = \arg\max_m a_{im}$. Другими словами некоторая строка A_i входит в класс S_m тогда и только тогда, когда элемент $\hat{a}_m$, стоящий на m -ом месте, является доминирующим. Именно расположение этого элемент среди других определяет отнесение точки $X_1 = A_1 Z$ к классу S_j.

Рассмотрим подгруппу множества подстановок на множестве строк A, сохраняющую положения доминирующего элемента $\hat{a}_m$. Очевидно, что получающиеся $(K-1)!$ новых строк, которые будут принадлежать тому же классу S_m, что и исходная строка A_m. Определенные таким образом операции на множествах $\{S_m\}_{m=1}^{K}$ задают подгруппы на множестве A в количестве K штук, а само множество, с заданной на нем операцией подстановок, представляет собой конечную группу.

Если же выполнить преобразование P_m, переносящее доминирующие элементы в одну позицию, к примеру, в m -ую, то в этом случае все вновь полученные строки будут отнесены к классу S_m. Такое преобразование позволяет построить отображение $P : A \mapsto S_m$, которое переводит все элементы множества A в класс S_m.

В качестве примера приводим рисунок, на котором все множество A точек отражено в класс, определяемый правой точкой протофрактала Z.

Аналогичным образом можно построить преобразование, отображающее точки выделенного класса S_m на все множество A. Операция, позволяющая выполнять эти преобразования, может быть представлена в виде матрицы перестановок, состоящих из нулей и единиц и имеющих в каждой строке и каждом столбце ровно по одной единице. Такие преобразования, как известно, являются преобразованиями подобия. Это свойство самоподобия наглядно представлено на рис. 1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, задание множества аттрактора в пространстве $\mathbb{Q}_{\xi}$, генерируемого рандомизированной системой итерированных линейных функций, позволяет рассматривать его как некоторое подпространство ультраметрического пространства. Это позволяет в свою очередь в значительной степени упростить доказательства ряда свойств фрактальных объектов.

Линейный характер системы итерированных функций играет существенную роль в установлении свойств получаемого множества, чем отличается от множеств других аттракторов, например, множества Мандельброта [8].

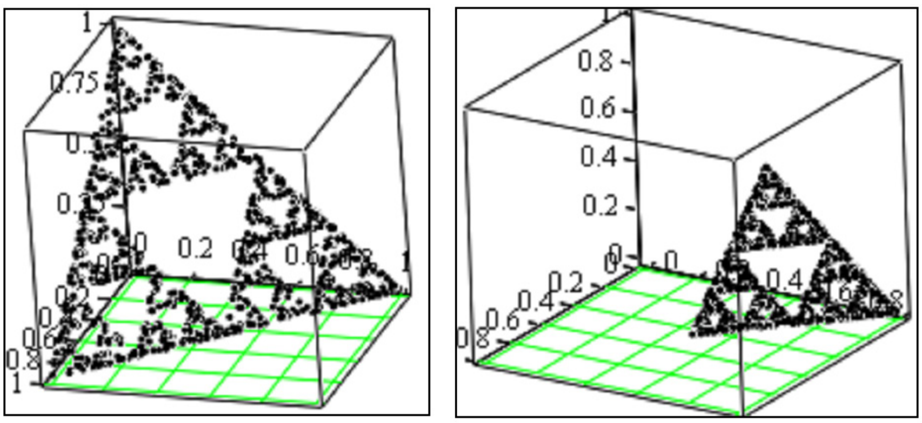

Рис. 1. Отображение(а) множества A (1000 точек) в класс S_m (б)

В частности, линейный характер итерированных функций выполняемой процедуры проявляется в том, что преобразование подобия (в данном случае – автоморфизм), являющиеся одним из критериев фрактального характера построенных множеств, также будут линейными. Было показано, что свойство самоподобия будет определяться посредством задания группы подстановок во множестве, имеющем фрактальную структуру.

Приведенное в работе групповое преобразование хорошо демонстрирует масштабную инвариантность фрактальных структур.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кроновер Р. М.* Фракталы и хаос в динамических системах / Р. М. Кроновер – М. : ТЕХНОСФЕРА, 2006. – 488 с.

2. *Bukhovets A. G.* Modeling of fractal data structures / A. G. Bukhovets, E. A. Bukhovets // Automation and Remote Control. – Vol. 73, No. 2 (2012). – P. 381–385.

3. *Буховец А. Г.* Моделирование фрактальных свойств системных объектов / А. Г. Буховец, Т. Я. Бирючинская // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2011. – №2. – С. 22–26.

4. *Буховец А. Г.* Модели, учитывающие влияние доминирующего фактора / А. Г. Буховец, Т. Я. Бирючинская., Н. А. Кораблина // Экономическое прогнозирование: модели и методы. Материалы VI Международной научно-практической конференции 6 апреля 2010 г. – Воронеж : ВГУ, 2010. – Ч. 1, С. 61–66.

5. *Буховец А. Г.* Фрактальный подход к анализу данных в моделях многомерной классификации / А. Г. Буховец, Т. Я. Бирючинская // Современная экономика: проблемы и решения. – 2011. – №7(19). – С. 149–160.

6. *Буховец А. Г.* Определение фрактальной размерности данных в задачах многомерной классификации / А. Г. Буховец, М. Е. Семенов // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2006. – Т. 13, №1. – С. 86.

7. *Буховец А. Г.* Прогнозирование урожайностей озимой пшеницы и ячменя для районов Воронежской области на 2015 год / А. Г. Буховец, Е. А. Семин // Современная экономика: проблемы и решения. – 2015. – Т. 4. – С. 124–137.

8. *Мандельброт Б.* Фракталы, случай и финансы / Б. Мандельброт. – М. – Ижевск. – 2004. – 256 с.

9. *Хренников А. Ю.* Моделирование процессов мышления в р-адических системах координат / А. Ю. Хренников. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 296 с.

10. *Владимиров В. С.* р-Адический анализ и математическая физика / В. С. Владимиров, И. В. Волович, В. И. Зеленов. – М., 1994. – 325 с.

11. *Кириллов А. А.* Теоремы и задачи функционального анализа / А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани. – М. : Наука, 1979. – 381 с.

Буховец А. Г. – доктор технических наук, профессор кафедры Прикладной математики и математических методов в экономике, Воронежский государственный аграрный университет им. Императора Петра I.
E-mail: abuhovets@mail.ru

Бирючинская Т. Я. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Прикладной математики и математических методов в экономике Воронежский государственный аграрный университет им. Императора Петра I.
E-mail: bir_tat@mail.ru.

Bukhovets A. G. – Dr. Sc. (Eng.), Professor of the Department of Applied mathematics and mathematical methods in Economics, Voronezh state agricultural University named after Emperor Peter the great.
E-mail: abuhovets@mail.ru

Borucinska T. Y. – Cand. Sc. (Phys.-Math.), associate Professor, Department of Applied mathematics and mathematical methods in Economics, Voronezh state agricultural University named after Emperor Peter the great.
E-mail: bir_tat@mail.ru