УДК 519.112.71

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ТРЕБОВАНИЕМ

О. А. Медведева, А. Ю. Полетаев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 12.03.2016 г.

Аннотация. В статье рассмотрена двухкритериальная модель задачи о назначениях с дополнительным требованием: для каждого претендента известна система предпочтений на множестве работ. Предложен алгоритм решения, основанный на использовании метода гарантированного результата с последующим переходом к двойственной задаче и применением алгоритма Удзавы.

Ключевые слова: задача о назначениях, венгерский метод, дискретная оптимизация, многокритериальность, двойственный алгоритм Удзавы.

Annotation. The paper describes a model of assignment problem with the additional requirement: for each applicant the system of preferences on the set of works is known. The decision algorithm is proposed. It based on the method of guaranteed result with a subsequent transition to the dual problem and with using Udzawa algorithm.

Keywords: assignment problem, Hungarian method, discrete optimization, multi-criteriality, dual Udzawa algorithm.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи комбинаторной оптимизации обычно рассматриваются в однокритериальной постановке. Менее изученными, но важными в приложениях являются такие задачи, в которых множество допустимых решений соответствует классическому варианту, но выбор оптимального решения предполагает учет более одного критерия. К последним относится многокритериальная задача о назначениях (ЗОН).

Методы многокритериальной оптимизации для подобных задач можно условно разделить на две группы. Методы первой группы сводят многокритериальную задачу к однокритериальной путём свёртки векторного критерия в суперкритерий, который затем оптимизируется одним из методов однокритериальной оптимизации [1, 2, 3]. Ко второй группе относятся такие методы как метод компромисса, последовательных уступок, анализа иерархий [3, 4, 5] и т. д.

Особый интерес представляет метод гарантированного результата, достоинством которого является сведение задачи к однокритериальной и получение компромиссного решения. При этом в математическую модель задачи добавляются дополнительные ограничения, которые не позволяют применять к ней стандартные методы решения ЗОН.

Для получения субоптимального решения модифицированной ЗОН предлагается перейти к двойственной задаче с последующим использованием метода Удзавы. Он состоит в решении двойственной задачи с помощью лагранжева ослабления определенных ограничений исходной задачи, что особенно оправдано структурными особенностями модели. Для получения хорошей аппроксимации оптимального значения двойственной задачи будем применять алгоритмы субградиента вследствие эффективности и простоты их работы.

Преимущество данного подхода в том, что двойственная задача проще исходной, так как исходная задача дискретная, а двойственные переменные могут принимать любые вещественные значения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Классическая задача о назначениях в известной постановке заключается в распределении претендентов по рабочим местам с целью минимизации суммарных затрат. ЗОН является хорошо изученной и для нее разработаны многочисленные алгоритмы решения, самый известный из которых – венгерский метод. Математическая модель классической ЗОН имеет вид

$$L(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to \min \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\ \ j=\overline{1,n}, \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\ \ i=\overline{1,n}, \qquad (3)$$

$$x_{ij}=\{0,1\},\ \ i=\overline{1,n},\ \ j=\overline{1,n}, \qquad (4)$$

где c_{ij} – стоимость затрат, связанных с назначением i-го претендента на j-е место.

В данной статье рассмотрим модель классической задачи, в которой каждый претендент умеет выполнять все предложенные предприятием работы, но имеет предпочтения по выбору работы.

Содержательная постановка задачи имеет вид:

Пусть имеются m претендентов на n мест работы (для определенности $m>n$). Каждый претендент формирует список своих предпочтений, упорядочивая работы по приоритетности. Введем матрицу предпочтений $\{b_{ij}\}_{m\times n}$, где b_{ij} – номер j-й работы в списке предпочтения i-го претендента, т. е. чем меньше коэффициент b_{ij}, тем предпочтительней j-я работа для i-го претендента. Будем считать, что претенденты умеют делать все виды работ. При этом известна стоимость затрат – c_{ij}, связанных с назначением i-го претендента на j-е место. Требуется распределить претендентов по рабочим местам так, чтобы каждый принятый претендент занял одно место, а каждое место было занято одним претендентом, и так, чтобы связанные с этим распределением затраты были минимальными, а предпочтения претендентов были максимально учтены.

Заметим, что в случае $m>n$, ограничения (2)–(3) классической задачи изменяются следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=1,\ \ j=\overline{1,n}, \qquad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le 1,\ \ i=\overline{1,m}. \qquad (6)$$

Для задачи с предпочтениями рассмотрим два варианта математической модели, которые между собой будут отличаться видом целевых функций.

ВАРИАНТ 1

Так как минимальное значение произведения достигается при минимальных значениях множителей и ввиду того, как были введены коэффициенты предпочтения, целевую функцию возможно ввести следующим образом

$$L(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}b_{ij}x_{ij}\to \min, \qquad (7)$$

где $b_{ij}\in\{1,\ldots,n\}, i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$

Предложенный вид целевой функции позволяет решать задачу венгерским методом с предварительным внесением изменений в исходную информацию. А именно, каждый элемент матрицы затрат $\{c_{ij}\}_{m\times n}$ умножается на соответствующий элемент матрицы предпочтений $\{b_{ij}\}_{m\times n}$ [6, 7].

ВАРИАНТ 2

Задачу с предпочтениями можно представить как двухкритериальную, если непосредственно учитывать постановку задачи. Предприятие стремится минимизировать суммарные затраты, связанные с назначением претендентов, а претенденты, в свою очередь, желают удовлетворить свои предпочтения в выборе должности.

Пусть первая целевая функция отвечает за минимизацию суммарных затрат предприятия

$$L_1(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to \min,$$

а вторая целевая функция связана с учетом предпочтений претендентов по выбору работы

$$L_2(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_{ij}\to\min.$$

Заметим, что предпочтения претендентов не всегда совпадают с реальными возможностями по выполнению той или иной работы. Отсюда возникает конфликт целевых функций.

Математическая модель задачи при этом будет иметь вид

$$L_1(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min, \quad (8)$$

$$L_2(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_{ij}\to\min, \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=1,\quad j=\overline{1,n}, \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le 1,\quad i=\overline{1,m}, \quad (11)$$

$$x_{ij}=\{0,1\},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}, \quad (12)$$

где $b_{ij}\in\{1,\dots,n\}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Рассмотрим алгоритм решения, основанный на применении двойственного метода Удзавы [8, 9].

Через S обозначим множество переменных $\{x_{ij}\}$, удовлетворяющих ограничениям (10)–(12).

Для решения векторной оптимизации используем метод гарантированного результата, а именно минимаксный критерий. Для успешного применения данного критерия необходимо, чтобы обе целевые функции имели одинаковые единицы измерения. Нормализуем целевые функции следующим образом:

$$\overline{L_1}(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{c_{ij}x_{ij}}{L_1^{\max}-L_1^{\min}}-\frac{L_1^{\min}}{L_1^{\max}-L_1^{\min}}\to\min,$$

$$\overline{L_2}(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}x_{ij}}{L_2^{\max}-L_2^{\min}}-\frac{L_2^{\min}}{L_2^{\max}-L_2^{\min}}\to\min,$$

где $L_1^{\min}$, $L_2^{\min}$ – решения ЗОН для целевых функций $L_1(x)$ и $L_2(x)$ на множестве S на минимум, а $L_1^{\max}$ и $L_2^{\max}$ – решения на максимум.

Рассмотрим задачу с целевой функцией вида:

$$\min\left\{\max\left(\overline{L_1}(x),\overline{L_2}(x)\right)\right\}.$$

Обозначим через μ выражение: $\mu=\max\left(\overline{L_1}(x),\overline{L_2}(x)\right)$.

Задача при этом примет вид:

$$\mu\to\min, \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{c_{ij}x_{ij}}{L_1^{\max}-L_1^{\min}}-\frac{L_1^{\min}}{L_1^{\max}-L_1^{\min}}-\mu\le 0, \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}x_{ij}}{L_2^{\max}-L_2^{\min}}-\frac{L_2^{\min}}{L_2^{\max}-L_2^{\min}}-\mu\le 0, \quad (15)$$

$$x_{ij}\in S,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}, \quad (16)$$

$$\mu\ge 0. \quad (17)$$

Функция Лагранжа для данной задачи может быть записана в виде:

$$\Phi(x,\mu,u,v)=$$

$$=\mu+v\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{c_{ij}x_{ij}}{L_1^{\max}-L_1^{\min}}-\frac{L_1^{\min}}{L_1^{\max}-L_1^{\min}}-\mu\right)+$$

$$+v\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}x_{ij}}{L_2^{\max}-L_2^{\min}}-\frac{L_2^{\min}}{L_2^{\max}-L_2^{\min}}-\mu\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{uc_{ij}}{L_1^{\max}-L_1^{\min}}+\frac{vb_{ij}}{L_2^{\max}-L_2^{\min}}\right)x_{ij}-$$

$$-\frac{uL_1^{\min}}{L_1^{\max}-L_1^{\min}}-\frac{vL_2^{\min}}{L_2^{\max}-L_2^{\min}}+\mu\left(1-(u+v)\right).$$

Тогда исходная задача переписывается следующим образом:

$$\min_{\substack{x\in S\\ \mu\ge 0}}\max_{u,v\ge 0}\Phi(x,\mu,u,v),$$

двойственная к ней имеет вид

$$\max_{u,v\ge 0}\min_{\substack{x\in S\\ \mu\ge 0}}\Phi(x,\mu,u,v)=\max_{u,v\ge 0}\omega(u,v).$$

В результате предлагается на каждой итерации алгоритма решать следующие задачи:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{u^N c_{ij}}{L_1^{\max}-L_1^{\min}}+\frac{v^N b_{ij}}{L_2^{\max}-L_2^{\min}}\right)x_{ij}\to\min_{x\in S}, \quad (18)$$

$$\mu\left(1-\left(u^N+v^N\right)\right)\to\min_{\mu\ge 0}, \quad (19)$$

где N – номер итерации.

Задача (18) является ЗОН с изменяемой в процессе работы алгоритма матрицей затрат. Анализ задачи (19) позволяет определить текущее значение μ^N на N-ой итерации следующим образом:

$$\mu^N = \begin{cases} 0, & \text{если } u^N + v^N < 1, \\ \text{любое}, & \text{если } u^N + v^N = 1, \\ \max\left(\overline{L_1}\left(X^N\right), \overline{L_2}\left(X^N\right)\right), & \text{если } u^N + v^N > 1. \end{cases} \quad (20)$$

Тогда алгоритм решения поставленной задачи будет следующим:

1. Ввести начальные данные

$$u^0 \geq 0,\ v^0 \geq 0,\ N = 0,\ \varepsilon \geq 0,$$

$$\alpha^N = \beta^N = \frac{1}{N+1}, N_{\max}.$$

2. Решить задачу о назначениях (18).

3. Определить текущее значение μ^N по формуле (20).

4. Для полученной матрицы назначений X^N проверить выполнение неравенств:

$$\left|\widehat{\nabla}_u \omega(u,v)\right| = \left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{c_{ij} x^N{}_{ij}}{L_1^{\max} - L_1^{\min}} - \frac{L_1^{\min}}{L_1^{\max} - L_1^{\min}} - \mu^N\right| \leq \varepsilon,$$

$$\left|\widehat{\nabla}_v \omega(u,v)\right| = \left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{b_{ij} x^N{}_{ij}}{L_2^{\max} - L_2^{\min}} - \frac{L_2^{\min}}{L_2^{\max} - L_2^{\min}} - \mu^N\right| \leq \varepsilon,$$

где через $\widehat{\nabla}\omega$ обозначено соответствующее значение субградиента двойственной функции $\omega(\cdot)$ [8].

Если неравенства выполняются, то X^N является оптимальным решением, в противном случае переход к пункту 5.

5. Проверить останов по числу операций $N < N_{\max}$. Если неравенство выполнено, то перейти к пункту 6, иначе перейти к пункту 7.

6. Пересчитать значения двойственных переменных по формулам

$$u^{N+1} = \left[u^N + \alpha^N\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{c_{ij} x^N{}_{ij}}{L_1^{\max} - L_1^{\min}} - \frac{L_1^{\min}}{L_1^{\max} - L_1^{\min}} - \mu^N\right)\right]^+,$$

$$v^{N+1} = \left[v^N + \beta^N\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{b_{ij} x^N{}_{ij}}{L_1^{\max} - L_1^{\min}} - \frac{L_1^{\min}}{L_1^{\max} - L_1^{\min}} - \mu^N\right)\right]^+.$$

$N = N + 1$. Перейти к пункту 2.

7. Проанализировать полученный результат. Выписать приближенное решение X^N.

Протестируем алгоритм на входных матрицах разной размерности и оценим следующие параметры: количество итераций и точность ε.

Рассмотрим вначале задачу размерности 5×5. Заданы матрицы затрат и предпочтений:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 9 & 10 & 9 \\ 4 & 10 & 6 & 7 & 4 \\ 6 & 7 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 7 & 6 \\ 4 & 8 & 8 & 8 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решением данной задачи является следующая матрица назначений

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значения целевых функций при этом равны $L_1(X) = 18,\ L_2(X) = 5.$

Применяя предложенный выше алгоритм для решения данной задачи получим следующие результаты: при $\varepsilon = 0,3$ алгоритм за 2 итерации достигает решения $L_1(X) = 23,$ $L_2(X) = 10,$ при $\varepsilon \leq 0,29$ алгоритм за 3 итерации достигает оптимального решения $L_1(X) = 18,\ L_2(X) = 5.$

Для матриц больших размерностей тенденция сходимости к одному решению сохраняется. Так для матрицы 300×300 вычислительный эксперимент показал следующие результаты (табл. 1).

Таким образом, предложенный алгоритм при небольших вычислительных затратах позволяет получить, вообще говоря, субоптимальное решение для матриц разных размерностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баева Н. Б.* Основы теории и вычислительные схемы векторной оптимизации: Учебное пособие / Н. Б. Баева, Ю. В. Бондаренко. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2003. – 87 с.

Таблица 1

Погрешность ε	Количество итераций N	$L_1(X)$	$L_2(X)$
0,1	3	326	3754
0,035	4	330	3631
0,034	7	332	3573
0,033	25	335	3493
0,032	95	339	3391
$\leq$ 0,031	$\geq$ 100	339	3391

2. *Никонов О. Я.* Математические методы решения многокритериальной задачи о назначениях / О. Я. Никонов, О. А. Подоляка, А. Н. Подоляка, Е. В. Скакалина // Вестник ХНАДУ. – Харьков: ХНАДУ, 2011. – Вып. 55. – С. 103-112.

3. *Штойер Р.* Многокритериальная оптимизация: теория, вычисления, приложения / Ральф Штойер [пер. с англ. Е. М. Столяровой]. – М.: Радио и связь, 1992. – 504 с.

4. *Каширина И. Л.* Генетический алгоритм решения многокритериальной задачи о назначениях / И. Л. Каширина, Б. А. Семенов // Информационные технологии. – М. : Новые технологии, 2007. – Вып. 5. – С. 62–68.

5. *Подиновский В. В.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. – М.: Наука, 2007. – 225 с.

6. *Малюгина О. А.* Использование задачи о назначениях при решении проблемы формирования штатов / О. А. Малюгина, Г. Д. Чернышова // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. – Воронеж : ИПЦ Воронеж. гос. ун-т., 2010. – Вып. 8. – С. 141–148.

7. *Медведева О. А.* Задача комплектования штатов / О. А. Медведева, С. Н. Медведев // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной конференции, Воронеж, 26-28 ноября 2012 г. : в 2 ч.Ч. 2. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. – С. 203–208.

8. *Мину М.* Математическое программирование: теория и алгоритмы / М. Мину [Пер. с фр. А.И. Штерна]. – М. : Наука, 1990. – 488 с.

9. *Медведева О. А.* Двойственный алгоритм решения многокритериальной задачи о назначениях / О. А. Медведева, С. Н. Медведев, Г. Д. Чернышова // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2013. – № 2. – С. 38–41.

Медведева О. А. – кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета. E-mail: s_n_medvedev@mail.ru.

Полетаев А. Ю. – магистр кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета. E-mail:27420@list.ru.

Medvedeva O. A. – Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Lecturer of the Department of Computing Mathematics and Applied Information Technology, Applied Mathematics, Informatics and Mechanics Faculty, Voronezh State University.
E-mail: s_n_medvedev@mail.ru.

Poletaev A. Yu. – master of the Department of Computing Mathematics and Applied Information Technology, Applied Mathematics, Informatics and Mechanics Faculty, Voronezh State University.
E-mail: 27420@list.ru.