
СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

УДК 519.834

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВОЗНАГРАЖДЕНИЙ В ПРОЕКТАХ

А. В. Копытин, Д. И. Соломатин, Е. А. Копытина

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 22.03.2016 г.

Аннотация. Рассматривается ситуация, в которой проект, состоящий из нескольких работ, завершается раньше запланированного срока. Внимание сосредоточено на том, как распределить общее вознаграждение между работами проекта: ядро соответствующей кооперативной проектной игры определяет множество устойчивых распределений общего вознаграждения. Оказывается, что проектную игру можно свести к известной игре банкротства, откуда следует, что ядро проектной игры не пусто.

Ключевые слова: проект, досрочное завершение, кооперативная игра, ядро, задача о банкротстве.

Annotation. This paper analyzes a situation in which a project consisting of several activities is expedited. Attention is focused on how to divide the total reward among the activities: the core of a corresponding cooperative project game determines a set of stable allocations of the total reward. It turns out that a project game can be reduced to a bankruptcy game and therefore the core of a project game is not empty.

Keywords: project, expedition, cooperative game, core, bankruptcy problem.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время многие проекты, будь то создание высокотехнологичных устройств или строительство сооружений и объектов инфраструктуры, требуют участия и координации усилий различных компаний. Благодаря своей высокой социальной и экономической значимости управление проектами стало важной и актуальной дисциплиной. Качественное планирование проекта имеет большое значение для сокращения времени проекта. Двумя основными методами планирования и координации работ проекта являются PERT (Program Evaluation Review Technique) и метод критического пути.

Вместе с тем важной проблемой управления проектами является задержка проекта. Во многих странах, когда общественный проект

задерживается, власти по закону имеют право оштрафовать осуществляющую его компанию. Также и в частных проектах в контракте есть пункт, предусматривающий штраф в случае, если проект завершается позже запланированного времени. Во всех этих случаях, если компания, ответственная за проект, заключила субдоговора с другими фирмами, выполнявшими отдельные виды работ, и эти фирмы внесли свой вклад в задержку проекта, то важно знать, за какую часть штрафа они могли бы нести ответственность.

В то же время возможно дополнительное вознаграждение за досрочное выполнение проекта. В качестве примера можно привести разработку новых высокотехнологичных устройств. Компании обычно борются за то, чтобы их новая продукция оказалась на рынке раньше продукции конкурентов, и, поэтому, обещают бонус своим сотрудникам, если изготовление устройства завершится раньше запланированного времени. Следующий во-

© Копытин А. В., Соломатин Д. И., Копытина Е. А., 2016

прос состоит в том, как разделить этот бонус между сотрудниками, чьими усилиями проект завершился раньше намеченного срока.

Впервые теоретико-игровой подход к анализу обозначенных проблем был предложен в [1]. Этот подход состоит в построении кооперативной игры, связанной с проектной проблемой и рассмотрении ее ядра как соответствующего множества решений. В [2] результаты [1] обобщаются путем рассмотрения произвольной неубывающей функции вознаграждения, а также принятием во внимание того, могут ли работы начинаться раньше своего запланированного времени.

В настоящей статье рассматривается ситуация, когда проект завершается раньше запланированного времени. Проблема распределения вознаграждения в этом случае сводится к известной по Талмуду проблеме банкротства.

ПОНЯТИЕ ПРОЕКТА

Проект – это множество работ с известными взаимосвязями. Эти работы выполняются в течение определенного промежутка времени и направлены на достижение конкретной цели. Пусть N обозначает множество всех работ проекта. Для произвольной работы $i \in N$ пусть P_i обозначает множество всех предшествующих работ, т. е. тех работ, которые должны быть завершены до начала выполнения работы i , а F_i – множество всех следующих за i работ, т. е. тех, для начала выполнения которых, необходимо завершение работы i . Проект определяется как набор упорядоченных подмножеств N или путей, $\{N_1, \dots, N_m\}$, где биекция $\sigma_\tau : \{1, \dots, |N_\tau|\} \rightarrow N_\tau$ задает порядок в N_τ , $\tau \in \{1, \dots, m\}$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$1) N = \bigcup_{\tau=1}^m N_\tau;$$

$$2) F_{\sigma_\tau(i)} = \emptyset, P_{\sigma_\tau(i)} = \emptyset, \text{ и}$$

$$P_{\sigma_\tau(r)} = \{\sigma_\tau(1), \dots, \sigma_\tau(r-1)\} \text{ для каждого } \tau \in \{1, \dots, m\} \text{ и каждого } r \in \{2, \dots, |N_\tau|\};$$

$$3) \text{ для } \tau, \nu \in \{1, \dots, m\}, \text{ если } i, j \in N_\tau \cap N_\nu \text{ и } \sigma_\tau^{-1}(i) < \sigma_\tau^{-1}(j), \text{ то } \sigma_\nu^{-1}(i) < \sigma_\nu^{-1}(j).$$

Заметим, что проект может быть представлен в виде направленного графа, в котором множество дуг соответствует множеству работ. Для того чтобы избежать множественных дуг, в графе вводятся фиктивные работы, не расходующие ни времени, ни ресурсов. Фиктивные работы изображаются штрихованными дугами.

Пример 1. Табл. 1 задает множество работ проекта с соответствующими предшественниками.

Таблица 1

Предшественники работ из примера 1

Работа	Предшественники
A	–
B	–
C	A, B

Рассмотрим множество работ $N = \{A, B, C\}$ и набор путей $\{N_1, N_2\}$, где $N_1 = \{A, C\}$ и $N_2 = \{B, C\}$. Графическое представление этого проекта приведено на рис. 1.

Свяжем с проектом $\{N_1, \dots, N_m\}$ функцию продолжительности $l: N \rightarrow \mathbb{R}_+$, где $l(i)$ обо-

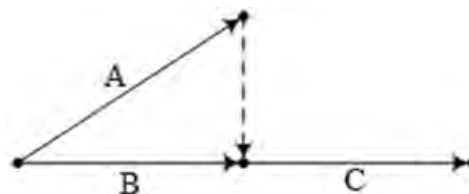


Рис. 1. Графическое представление проекта из табл. 1

значает длительность или продолжительность работы $i \in N$. Определим продолжительность $D(N_\tau, l)$ пути N_τ в соответствии с функцией l как сумму продолжительностей его работ, т. е. $D(N_\tau, l) = \sum_{i \in N_\tau} l(i)$. Продолжительность проекта $D(l)$ в соответствии с функцией l есть максимальная из продолжительностей его путей, т. е. $D(l) = \max_{1 \leq \tau \leq m} D(N_\tau, l)$. Путь N_τ будем называть критическим, если его продолжительность равна продолжительности проекта, т. е. $D(N_\tau, l) = D(l)$.

Пример 2. Рассмотрим проект из примера 1. Пусть $l: N \rightarrow \mathbb{R}_+$ задана следующим образом: $l(A) = 15$, $l(B) = 10$, $l(C) = 7$. Тогда продолжительность пути AC составляет 22, а продолжительность BC составляет 17. Та-

ким образом, продолжительность проекта равна 22.

Введем в рассмотрение функцию $p: N \rightarrow \mathbb{R}_+$, представляющую запланированное или оцениваемое время выполнения работ и функцию $r: N \rightarrow \mathbb{R}_+$, представляющую реальное время выполнения работ после завершения проекта. Определим функцию задержки $d: N \rightarrow \mathbb{R}_+$ как $d(i) = (r(i) - p(i))_+$ ($:= \max\{r(i) - p(i), 0\}$), т. е. $d(i)$ есть задержка работы i . Аналогично, определим функцию досрочного завершения $e: N \rightarrow \mathbb{R}_+$ как $e(i) = (p(i) - r(i))_+$, т. е. $e(i)$ есть время, на которое работа i завершилась раньше запланированного срока. Пусть $\mathcal{D} = \{i \in N \mid d(i) > 0\}$ и $\mathcal{E} = \{i \in N \mid e(i) > 0\}$ обозначают множества просроченных и выполненных досрочно работ соответственно.

Пример 3. Рассмотрим проект из примера 1. Пусть запланированное время $p: N \rightarrow \mathbb{R}_+$ задано как $p(A) = 15$, $p(B) = 10$, $p(C) = 7$, и пусть реальное время $r: N \rightarrow \mathbb{R}_+$ задано как $r(A) = 7$, $r(B) = 6$, $r(C) = 12$. Значения функций задержки и досрочного завершения приведены в табл. 2.

Таблица 2
Функции задержки и досрочного завершения из примера 3

	A	B	C
$d(i)$	$(7 - 15)_+ = 0$	$(6 - 10)_+ = 0$	$(12 - 7)_+ = 5$
$e(i)$	$(15 - 7)_+ = 8$	$(10 - 6)_+ = 4$	$(7 - 12)_+ = 0$

Таким образом, $\mathcal{D} = \{C\}$, а $\mathcal{E} = \{A, B\}$.

КООПЕРАТИВНАЯ ИГРА

Кооперативной игрой в форме характеристической функции называется пара (N, v) , где N – конечное множество игроков, а $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ – характеристическая функция, сопоставляющая каждой коалиции, т. е. подмножеству $S \subseteq N$, действительное число $v(S)$, причем $v(\emptyset) = 0$. Ядро игры (N, v) определяется как

$$\text{Core}(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i \in N} x_i = v(N), \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \forall S \in 2^N \setminus \{\emptyset\} \right\},$$

т. е. ядро является множеством распределений $v(N)$, против которых не может обоснованно возражать ни одна из коалиций. Важным подклассом игр с непустым ядром является класс выпуклых игр (см. [3]). Игра (N, v) называется выпуклой, если

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$$

для любых $S, T \subseteq N$.

Проблема банкротства (bankruptcy problem) определяется тройкой (N, E, c) , где $N = \{1, \dots, n\}$ – множество игроков, $E \geq 0$ – имущество, которое должно быть разделено между игроками, а $c \in \mathbb{R}_+^N$ – вектор требований игроков, причем $\sum_{i \in N} c_i \geq E$. Соответствующая кооперативная игра $(N, v_{E,c})$ определяется как

$$v_{E,c}(S) = \left(E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i \right)_+.$$

Как показано в [4], игра $(N, v_{E,c})$ является выпуклой.

ПРОЕКТНАЯ ПРОБЛЕМА

Проектная проблема возникает тогда, когда реальное время выполнения работ отличается от запланированного, что приводит к задержке или ускорению проекта и связанным с этим штрафами или вознаграждениями. Будем считать, что вознаграждение (штраф) равно времени, на которое проект был выполнен досрочно (просрочен). Таким образом, проектная проблема может быть описана тройкой $(\{N_1, \dots, N_m\}, p, r)$.

Пусть дана проектная проблема $(\{N_1, \dots, N_m\}, p, r)$, и $D(p) > D(r)$, т. е. имеет место досрочное завершение проекта. Для распределения вознаграждения, равного $D(p) - D(r)$, между работами проекта рассмотрим проблему банкротства (N, E, c) , где $E = D(p) - D(r)$, а вектор $c \in \mathbb{R}_+^N$ задан следующим образом:

$$c_i = \max_{\tau: N_i \ni i} \min \{e(i), (D(N_\tau, p) - D(\min\{p, r\}))_+\}.$$

Заметим, что $c_i > 0$ тогда и только тогда, когда $e(i) > 0$ и работа i принадлежит пути, плановая продолжительность которого больше чем продолжительность проекта в соответствии с функцией $\min\{p, r\}$.

Таблица 3

Продолжительность путей проекта из примера 4

N_τ	$D(N_\tau, p)$	$D(N_\tau, r)$	$D(N_\tau, \min\{p, r\})$
AB	18	16	15
AD	19	11	11
CD	22	19	17

Покажем, что $\sum_{i \in N} c_i \geq E$. Пусть N_τ – критический путь проекта в соответствии с функцией p . Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in N} c_i \geq \sum_{i \in N_\tau} c_i = \\ & = \sum_{i \in N_\tau} \min\{e(i), D(N_\tau, p) - D(\min\{p, r\})\} \geq \\ & \geq \min \left\{ \sum_{i \in N_\tau} e(i), D(N_\tau, p) - D(\min\{p, r\}) \right\} = \\ & = \min\{D(N_\tau, p) - D(N_\tau, \min\{p, r\}), \\ & D(N_\tau, p) - D(\min\{p, r\})\} = \\ & = D(N_\tau, p) - D(\min\{p, r\}) = \\ & = D(p) - D(\min\{p, r\}) \geq \\ & \geq D(p) - D(r) = E. \end{aligned}$$

Соответствующая кооперативная игра $(N, v_{E,c})$ определяется как

$$v_{E,c}(S) = \left(E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i \right)_+$$

Пример 4. Рассмотрим проектную проблему $(\{N_1, N_2, N_3\}, p, r)$, где $N_1 = \{A, B\}$, $N_2 = \{A, D\}$, $N_3 = \{C, D\}$; $p(A) = 10$, $p(B) = 8$, $p(C) = 13$, $p(D) = 9$; $r(A) = 7$, $r(B) = 9$, $r(C) = 15$, $r(D) = 4$. Графическое представление проекта изображено на рис. 2.

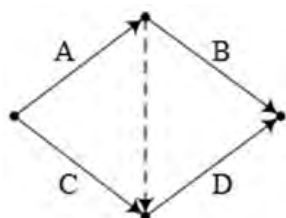


Рис. 2. Графическое представление проекта из примера 4

Продолжительности путей проекта даны в табл. 3.

Здесь, $D(p) = 22$ и $D(r) = 19$. Таким образом, вознаграждение составляет $D(p) - D(r) = 3$. Кроме того, $d(A) = 0$, $d(B) = 1$, $d(C) = 2$, $d(D) = 0$; $e(A) = 3$, $e(B) = 0$, $e(C) = 0$, $e(D) = 5$; $\mathcal{D} = \{B, C\}$, а $\mathcal{E} = \{A, D\}$.

Найдем координаты вектора $c \in \mathbb{R}_+^4$.

$$\begin{aligned} c_1 &= \max\{\min\{e(A), (D(\{A, B\}, p) - D(\min\{p, r\}))_+\}, \\ & \min\{e(A), (D(\{A, D\}, p) - D(\min\{p, r\}))_+\}\} = \\ & = \max\{\min\{3, (18 - 17)_+\}, \min\{3, (19 - 17)_+\}\} = \\ & = \max\{\min\{3, 1\}, \min\{3, 2\}\} = \\ & = \max\{1, 2\} = 2, \\ c_2 &= c_3 = 0, \\ c_4 &= \max\{\min\{e(D), (D(\{A, D\}, p) - D(\min\{p, r\}))_+\}, \\ & \min\{e(D), (D(\{C, D\}, p) - D(\min\{p, r\}))_+\}\} = \\ & = \max\{\min\{5, (19 - 17)_+\}, \min\{5, (22 - 17)_+\}\} = \\ & = \max\{\min\{5, 2\}, \min\{5, 5\}\} = \\ & = \max\{2, 5\} = 5. \end{aligned}$$

Значения $v_{E,c}(S) = \left(3 - \sum_{i \in N \setminus S} c_i \right)_+$ для всех коалиций S приведены в табл. 4.

Легко видеть, что ядром этой игры является отрезок, соединяющий точки $(0, 0, 0, 3)$ и $(2, 0, 0, 1)$ в пространстве \mathbb{R}^4 . Наиболее справедливое распределение вознаграждения со-

Таблица 4

Значения коалиций из примера 4

S	{A}	{B}	{C}	{D}	{A,B}	{A,C}	{A,D}	{B,C}	{B,D}	{C,D}
$v_{E,c}(S)$	0	0	0	1	0	0	3	0	1	1

S	{A,B,C}	{A,B,D}	{A,C,D}	{B,C,D}	N
$v_{E,c}(S)$	0	3	3	1	3

ответствует его середине $(1,0,0,2)$, т. е. работа А должна получить одну единицу, а работа D – две.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен теоретико-игровой подход к задаче распределения вознаграждения, связанного с досрочным завершением проекта. В рамках этого подхода указанная проблема сведена к известной проблеме банкротства, что позволяет задать соответствующую выпуклую кооперативную игру. Последнее обстоятельство гарантирует наличие справедливых распределений вознаграждения между работами проекта.

Копытин А. В. – к. ф.-м. н., доцент кафедры информационных технологий управления, факультет компьютерных наук, Воронежский государственный университет. E-mail: alexkopytin@gmail.com

Соломатин Д. И. – старший преподаватель кафедры программирования и информационных технологий, факультет компьютерных наук, Воронежский государственный университет. E-mail: solomatin@cs.vsu.ru

Копытина Е. А. – магистрант кафедры информационных технологий управления, факультет компьютерных наук, Воронежский государственный университет. E-mail: zhemkaterina@yandex.ru

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Estévez-Fernández A.* Project games / A. Estévez-Fernández, P. Borm, H. Hamers // International Journal of Game Theory. – 2007. – Vol. 36. – No. 2. – P. 149–176.
2. *Estévez-Fernández A.* A game theoretical approach to sharing penalties and rewards in projects / A. Estévez-Fernández // European Journal of Operational Research. – 2012. – Vol. 216. – No. 3. – P. 647–657.
3. *Shapley L. S.* Cores of convex games / L. S. Shapley // International Journal of Game Theory. – 1971. – Vol. 1. – No. 1. – P. 11–26.
4. *Curiel I. J.* Bankruptcy games / I. J. Curiel, M. Maschler, S. Tijs // Zeitschrift für Operations Research. – 1987. – Vol. 31. – No. 5. – P. 143–159.

Kopytin A. V. – Ph. D. of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Information Technologies in Management, Computer Sciences Faculty, Voronezh State University. E-mail: alexkopytin@gmail.com

Solomatin D. I. – Assistant Professor, Department of Programming and Information Technology, Computer Sciences Faculty, Voronezh State University. E-mail: solomatin@cs.vsu.ru

Kopytina E. A. – Postgraduate Student, Department of Information Technologies in Management, Computer Sciences Faculty, Voronezh State University. E-mail: zhemkaterina@yandex.ru