УДК 517.9

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ МАССОВЫХ СИЛАХ

В. Л. Хацкевич

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 04.03.2016 г.

Аннотация. В работе обоснован метод усреднения в начально-краевой задаче для системы эволюционных уравнений Навье-Стокса, когда правая часть этой системы (аналог массовой силы) осциллирует по времени с высокой частотой. Отдельно рассмотрен случай нелинейно-вязкой жидкости.

Ключевые слова: моделирование движения жидкости, уравнения Навье-Стокса, высокочастотная осцилляция, принцип усреднения.

Annotation. The article justifies the averaging method to the initial-boundary value problem for the system of Navier-Stokes evolution equations, when the right-hand part of this system (similar to mass forces) oscillates in time with high frequency. Separately considered case of nonlinear-viscous fluid.

Keywords: modeling of fluid motion, Navier-Stokes equations, high-frequency oscillation, the principle of averaging.

ВВЕДЕНИЕ

В качестве математической модели, описывающей движение вязкой несжимаеиой жидкости, рассматривается эволюционная система уравнений Навье-Стокса. Пусть Ω – ограниченная липшицева область в R^n, $(n = 2,3)$ с границей $\partial\Omega$, $T > 0$ – фиксированное число. В классической постановке начально-краевая задача для уравнений Навье-Стокса имеет вид:

Найти вектор-функцию $u : \Omega\times[0,T] \to R^n$ и скалярную функцию $p : \Omega\times[0,T] \to R$ такие, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu\Delta u + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + gradp = f(x,\omega t)$$

$$\text{в } Q_T := \Omega\times(0,T), \qquad (1)$$

$$divu = 0 \text{ в } Q_T, \qquad (2)$$

$$u = 0 \text{ на } \partial\Omega\times(0,T), \qquad (3)$$

$$u(x,0) = a(x) \text{ в } \Omega. \qquad (4)$$

Переменные системы (1)–(4) u и p обозначают соответственно скорость движения жидкости и давление; функция $f : \Omega\times R \to R^n$, характеризующая внешние силы, предполагается T-периодической по второму аргументу; $\mu > 0$ – кинематический коэффициент вязкости; параметр $\omega > 0$ определяет частоту осцилляции.

Модели такого типа при $\omega >> 1$ возникают в задачах о течении вязкой несжимаемой жидкости в высокочастотных силовых полях, см. например [1]. Возникает вопрос о поведении переменных системы (1)–(4) при $\omega \to +\infty$. Его исследованию посвящен ряд работ [1]–[5] и др. В настоящей статье при обосновании принципа усреднения в задаче (1)–(4) используются методики, отличные от применяемых ранее, а результаты дополняют известные. Кроме того предлагаемый метод позволяет исследовать задачу о нелинейно-вязкой жидкости.

Чтобы сформулировать обобщенную (слабую) постановку этой задачи введем необходимые определения. Пусть $\left(L^2(\Omega)\right)^n$ – гильбертово пространство векторных квадратично суммируемых функций $u : \Omega \to R^n$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\| \ \|$

$$(u,v)=\sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega}u_j v_j dx,\ \ \|u\|=(u,u)^{1/2}.$$

Для гладких функций определим скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_1$ и норму $\|\ \|_1$ формулами

$$(u,v)_1=\sum_{k,j=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial v_j}{\partial x_k}dx,\ \ \|u\|_1=(u,u)_1^{1/2}.$$

Через H и V обозначим замыкание гладких, финитных в Ω соленоидальных векторных полей по норме $\|\ \|$ и $\|\ \|_1$, соответственно. Пусть V' – пространство, сопряженное к V. Значение линейного функционала $f\in V'$ на элементе пространства $v\in V$, будем обозначать $\langle f,v\rangle$. Как известно, справедливо непрерывное вложение $V\subset H\subset V'$. Так что $\langle f,v\rangle=(f,v)$ для $f\in H,\ v\in V$. Введем в рассмотрение трилинейную форму

$$b(u,v,w):=\sum_{k,j=1}^{n}\int_{\Omega}u_k\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right)w_j dx$$

для тройки таких векторных функций $u,\ v,\ w,$ для которых существует соответствующий интеграл.

Ниже будем использовать обозначение $f^{\omega}(x,t):=f(x,\omega t).$

Слабая постановка задачи (1)–(4) имеет вид (см., напр.,[6] гл. III, §3):

Для заданной функции $f^{\omega}\in L^2(0,T;V')$ найти функцию $u\in L^2(0,T;V),$ удовлетворяющую условиям

$$\frac{d}{dt}(u,v)+\mu(u,v)_1+b(u,u,v)=\langle f^{\omega},v\rangle$$

$$(\forall v\in V), \qquad (5)$$

$$u(0)=a. \qquad (6)$$

Существование решения задачи (5), (6) при $n=2,\ 3$ известно. Сформулируем результат из [6], гл. III §3.

Теорема 1. *Пусть функция $f^{\omega}\in L^2(0,T;V')$, $a\in H$. Тогда существует по крайней мере одна такая функция u, что $u\in L^2(0,T;V)\bigcap L^{\infty}(0,T;H)$ и выполнены соотношения (5), (6).*

Замечание. В условиях Теоремы 1 справедливо включение (см. [6] с.226) $u\in L^1(0,T;V')$. Поэтому решение u п.в. на $[0,T]$ равняется непрерывной функции из $[0,T]$ в V'.

Таким образом условие (6) имеет смысл. Кроме того, функция u – слабо непрерывна как функция из $[0,T]$ в H.

Единственность решения задачи (5), (6) установлена в случае размерности $n=2,$ если $n=3,$ то единственность имеет место при дополнительных предположениях (см., напр., [6] гл. III, §3).

Приведем необходимые сведения по задаче (5), (6). Как известно, справедливы следующие свойства трилинейной формы b (см., напр., [6] гл. II, §1)

$$b(u,v,w)=-b(u,w,v),\ b(u,v,v)=b(v,v,v)=0$$

$$(\forall u,v,w\in V). \qquad (7)$$

В случае $n=2$ имеет место неравенство (см., напр., [6] с. 234)

$$|b(u,v,w)|\le\sqrt{2}\|u\|^{1/2}\|u\|_1^{1/2}\|v\|_1\|w\|^{1/2}\|w\|_1^{1/2}$$

$$(\forall u,v,w\in V). \qquad (8)$$

Если $n=3$ то справедливо неравенство (см., напр., [6] с.238)

$$|b(u,v,w)|\le c_0\|u\|_1\|v\|_1\|w\|_1\ \ (\forall u,v,w\in V) \qquad (9)$$

для некоторой постоянной $c_0>0,$ зависящей только от области $\Omega.$ Отметим, что соотношения (8), (9) обеспечивают непрерывность формы b на $V\times V\times V.$

Ниже будем предполагать, что $f^{\omega}\in L^2(0,T;H).$ Тогда для решения u задачи (5), (6) полагая $v=u$ и используя свойство (7), получим равенство (см. [7] с. 184)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2+\mu\|u\|_1^2=(f^{\omega},u). \qquad (10)$$

Из (10) следует (ср. [7] с.113), что

$$\|u(t)\|\le\|a\|+\int_0^t\|f(\omega s)\|ds.$$

Пусть выполнено соотношение

$$\sup_{\tau\in R}\|f(\tau)\|=m<\infty. \qquad (11)$$

Тогда последнее неравенство влечет оценку

$$\|u(t)\|\le\|a\|+mT:=r\ \ (\forall t\in[0,T]). \qquad (12)$$

Кроме того, из (10) следует оценка

$$\int_0^t\|u\|_1^2\,dt\le\frac{1}{2}\|a\|^2+\int_0^t\|f^{\omega}\|\|u\|ds\le$$

$$\le\frac{1}{2}\|a\|^2+Tmr:=q_0. \qquad (13)$$

Здесь мы учли (11), (12).

Ниже мы будем использовать следующее специальное свойство периодических функций. Обозначим $\chi_\omega(t)$ периодическую с периодом T/ω функцию, определяемую формулой $\frac{1}{2}-\frac{\omega t}{T}$ при $0 \le t < T/\omega$ и продолженную T/ω-периодическим образом на всю вещественную ось R. Имеет место

Лемма 1. *Для всякой суммируемой на* $[0,T/\omega]$ *числовой функции* $\xi(t)$ *верно равенство*

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^{T/\omega}\chi_\omega(t-s)\xi(s)\,ds\right)=\xi(t)-\xi^0,$$

где ξ^0 *– среднее значение функции* $\xi(t)$, *определяемое формулой*

$$\xi^0=\frac{\omega}{T}\int_0^{T/\omega}\xi(s)\,ds.$$

Доказательство этой леммы использует элементарное представление

$$\int_0^{T/\omega}\chi_\omega(t-s)\xi(s)\,ds=\int_0^t\left[\frac{1}{2}-\frac{\omega}{T}(t-s)\right]\xi(s)\,ds+$$
$$+\int_0^{T/\omega}\left[-\frac{1}{2}-\frac{\omega}{T}(t-s)\right]\xi(s)\,ds,$$

справедливое в силу T/ω-периодичности функции $\chi_\omega(t)$.

ПРИНЦИП УСРЕДНЕНИЯ

Наряду с задачей (1)–(4) в цилиндре Q_T рассмотрим усредненную начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u^0}{\partial t}-\mu\Delta u^0+\sum_{i=1}^n u_i^0\frac{\partial u^0}{\partial x_i}+grad q= f^0,\ div u^0=0$$
$$\text{в } \Omega\times(0,T), \qquad (14)$$
$$u^0=0 \text{ на } \partial\Omega\times(0,T), \qquad (15)$$
$$u^0(x,0)=a \text{ в } \Omega. \qquad (16)$$

Здесь f^0 – среднее значение, задаваемое формулой $f^0(x)=\frac{1}{T}\int_0^T f(x,\tau)\,d\tau.$

В слабой постановке задача (14)–(16) имеет вид: для заданной функции $f^0\in V'$ найти функцию $u^0\in L^2(0,T;V)$, удовлетворяющую условиям

$$\frac{d}{dt}(u^0,v)+\mu(u^0,v)_1+b(u^0,u^0,v)=\langle f^0,v\rangle$$
$$(\forall v\in V), \qquad (17)$$
$$u^0(0)=a. \qquad (18)$$

Рассмотрим сначала случай размерности $n=2.$ В этом случае имеет место единственность решений задач (5), (6) и (17), (18). Обозначим через u^ω – решение задачи (5), (6), а через u^0 – решение задачи (17), (18). Имеет место

Теорема 2. *Пусть* $n=2,$ $a\in H,$ *функция* $f(x,t\omega)$ *–* T*-периодична по второму аргументу,* $f^\omega\in L^2(0,T;H)$ *при каждом* $\omega>0$ *и выполнено условие (11). Тогда семейство* $u^\omega(t)$ *решений задачи (5), (6) при* $\omega\to+\infty$ *стремится к решению* $u^0(t)$ *задачи (17), (18) в* H *равномерно по* $t\in[0,T]$.

Доказательство. Подставим в (5) решение u^ω, а в (13) решение u^0 и вычтем второе равенство из первого. Тогда, обозначая $\psi=u^\omega-u^0$ и полагая $v=\psi,$ получим

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|\psi\|^2+\mu\|\psi\|_1^2+b(u^\omega,u^\omega,\psi)-$$
$$-b(u^0,u^0,\psi)=(f^\omega-f^0,\psi).$$

Используя трилинейность формы b и свойство (7), отсюда заключим (ср. [8] с. 98), что

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|\psi\|^2+\mu\|\psi\|_1^2=$$
$$=-b(\psi,u^0,\psi)+(f^\omega-f^0,\psi). \qquad (19)$$

Для оценки $b(\psi,u^0,\psi)$ используем (8) и неравенство Юнга (см., напр., [7] с. 18). Тогда

$$\left|b(\psi,u^0,\psi)\right|\le\sqrt{2}\|\psi\|\|\psi\|_1\|u^0\|_1\le$$
$$\le\mu\|\psi\|_1^2+c_1\|u^0\|_1^2\|\psi\|^2$$

для некоторой ностоящей $c_1>0.$ Поэтому (19) влечет

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|\psi\|^2\le c_1\|u^0\|_1^2\|\psi\|^2+(f^\omega-f^0,\psi). \qquad (20)$$

Проинтегрируем обе части этого неравенства от 0 до t. Тогда с учетом того, что $\psi(0)=0,$ получим

$$\frac{1}{2}\|\psi(t)\|^2\le \mathrm{c}_1\int_0^t\|u^0(s)\|_1^2\|\psi(s)\|^2\,ds+$$

$$+\int_0^t \left(f^{\omega}-f^{0},\psi \right) ds. \qquad (21)$$

Рассмотрим более подробно второй интеграл в правой части (21), обозначив его J.

$$\mathrm{J}=\int_0^t \int_\Omega \sum_{k=1}^n \left(f_k^{\omega}-f_k^{0} \right)\psi_k dxds=$$

$$=\sum_{k=1}^n \int_\Omega \int_0^t \left(f_k^{\omega}-f_k^{0} \right)\psi_k dsdx. \qquad (22)$$

Внутренний интеграл справа проинтегрируем по частям, считая $\left(f_k^{\omega}-f_k^{0} \right)ds$ дифференциалом функции

$$z_k\left(s\right):=\int_0^{T/\omega} \chi_\omega\left(s-\sigma\right)\left(f_k^{\omega}\left(\sigma\right)-f_k^{0} \right)d\sigma.$$

Так можно считать в силу Леммы 1 с учетом того, что

$$\frac{\omega}{T}\int_0^{T/\omega} f_k^{\omega}\left(\sigma\right)d\sigma=\frac{\omega}{T}\int_0^{T/\omega} f_k\left(\omega\sigma\right)d\sigma=$$

$$=\left\{\omega\sigma=\tau\right\}=\frac{1}{T}\int_0^T f_k\left(\tau\right)d\tau=f_k^0.$$

Итак, после интегрирования по частям получим

$$\int_0^t \left(f_k^{\omega}-f_k^{0} \right)\psi_k ds=$$

$$=\psi_k\left(\mathrm{t}\right)z_k\left(t\right)-\int_0^t z_k\left(s\right)\left(\frac{d\psi_k}{ds}\right)ds. \qquad (23)$$

Заметим, что по определению z_k и χ_ω справедливо неравенство

$$\left|z_k\left(s\right)\right|\le\frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}/\omega}\left|f_k^{\omega}-f_k^{0}\right|ds\le\frac{T}{2\omega}\cdot 2m=\frac{Tm}{\omega}. \qquad (24)$$

Следовательно,

$$\left|\int_0^t \left(f_k^{\omega}-f_k^{0} \right)\psi\left(\mathrm{s}\right)ds\right|\le\frac{Tm}{\omega}\left(\left|\psi_k\left(\mathrm{t}\right)\right|+\int_0^t\left|\frac{d\psi_k}{ds}\right|ds\right).$$

С учетом (23) формула (22) приобретет вид

$$\mathrm{J}=\sum_{k=1}^n\left(\int_\Omega \psi_k\left(t\right)z_k\left(t\right)dx-\right.$$

$$\left.-\int_\Omega\int_0^t z_k\left(s\right)\left(\frac{d\psi_k}{ds}\right)dsdx\right). \qquad (25)$$

При этом согласно (24)

$$\left|\int_\Omega \psi_k\left(t\right)z_k\left(t\right)dx\right|\le\int_\Omega\left|\psi_k\left(t\right)\right|\left|z_k\left(t\right)\right|dx\le$$

$$\le\frac{Tm}{\omega}\int_\Omega\left|\psi_k\left(t\right)\right|dx.$$

Отсюда в силу неравенства Коши-Буняковского

$$\left|\int_\Omega \psi_k\left(t\right)z_k\left(t\right)dx\right|\le$$

$$\le\frac{Tm}{\omega}\sqrt{\mu\left(\Omega\right)}\left(\int_\Omega\left|\psi_k\left(t\right)\right|^2dx\right)^{1/2}, \qquad (26)$$

где $\mu\left(\Omega\right)$ – мера области Ω.

Кроме того,

$$\left|\int_\Omega\int_0^t z_k\left(s\right)\left(\frac{d\psi_k}{ds}\right)dsdx\right|=\left|\int_0^t\int_\Omega z_k\left(s\right)\left(\frac{d\psi_k}{ds}\right)dxds\right|\le$$

$$\le\int_0^t\left|\int_\Omega z_k\left(s\right)\left(\frac{d\psi_k}{ds}\right)dx\right|ds.$$

Поэтому согласно (24) и в силу неравенства Коши-Буняковского

$$\left|\int_\Omega\int_0^t z_k\left(s\right)\left(\frac{d\psi_k}{ds}\right)dsdx\right|\le\int_0^t\int_\Omega\left|z_k\left(s\right)\right|\left|\frac{d\psi_k}{ds}\right|dxds\le$$

$$\le\frac{Tm}{\omega}\sqrt{\mu\left(\Omega\right)}\int_0^t\left(\int_\Omega\left|\frac{d\psi_k}{ds}\right|^2dx\right)^{1/2}. \qquad (27)$$

Таким образом, из (25) вследствие (26), (27) и с учетом энергетических оценок (12), (13) для некоторой постоянной $c_2>0$ получим оценку $\left|J\right|\le\frac{c_2}{\omega}$. Тогда из (21) следует соотношение

$$\frac{1}{2}\left\|\psi\left(t\right)\right\|^2\le c_1\int_0^t\left\|u^0\left(s\right)\right\|_1^2\left\|\psi\left(s\right)\right\|^2ds+\frac{c_2}{\omega}. \qquad (28)$$

По неравенству Гроноулла (см., напр., [9] с.108) отсюда следует

$$\left\|\psi\left(t\right)\right\|\le\frac{2c_2}{\omega}\exp\left(2c_1\int_0^t\left\|u^0\left(s\right)\right\|_1^2ds\right)\ \left(\forall t\ge 0\right),$$

Поэтому

$$\left\|\psi\left(t\right)\right\|\le\frac{2c_2}{\omega}\exp\left(2c_1\int_0^T\left\|u^0\left(s\right)\right\|_1^2ds\right)$$

$$\left(\forall t\in\left[0,T\right]\right). \qquad (29)$$

Так как решение $u^0\in L^2\left(0,T;V\right)$, то из (29) следует утверждение теоремы 2.

Следствие 1. *Пусть в условиях Теоремы 2 граница области класса* C^2, *а начальное значение* $a\in V$. *Тогда при* $\omega\to+\infty$ *имеет место* *сходимость u^ω к u^0 в норме $\| \ \|_{4,\Omega}$ пространства $\left(L^4(\Omega)\right)^2$ равномерно по $t\in[0,T]$. Точнее для некоторой постоянной $\gamma>0$ имеет место оценка*

$$\left\|u^\omega-u^0\right\|_{4,\Omega}\le\gamma\left\|u^\omega-u^0\right\|^{1/2}.$$

Действительно, в условиях следствия согласно Теореме 3.10 из [6] с.250 решение u^ω задачи (5), (6) является классическим и справедлива оценка (в наших обозначениях)

$$\frac{d}{dt}\left\|u^\omega\right\|_1^2\le\frac{2}{\mu}\left\|f^\omega(t)\right\|^2+\sigma(t)\left\|u^\omega\right\|_1^2, \qquad (30)$$

где $\sigma(t):=c\left\|u^\omega(t)\right\|^2\left\|u^\omega(t)\right\|_1^2$, а $c>0$ – некоторая постоянная.

В наших предположениях $\left\|f^\omega(t)\right\|^2\le m^2$ и согласно (12), (13) функция $q(t)$ суммируема на $[0,T]$, причем $\int\limits_0^t q(s)\,ds\le cr^2q_0$. Интегрируя (30) от 0 до t, получим

$$\left\|u^\omega(t)\right\|_1^2\le\|a\|_1^2+\frac{2}{\mu}\int\limits_0^t\left\|f^\omega(s)\right\|^2ds+$$
$$+\int\limits_0^t\sigma(s)\left\|u^\omega(s)\right\|_1^2ds.$$

Следовательно,

$$\left\|u^\omega(t)\right\|_1^2\le\|a\|_1^2+\frac{2m^2T}{\mu}+\int\limits_0^t\sigma(s)\left\|u^\omega(s)\right\|_1^2ds.$$

Отсюда по неравенству Гронуолла ([9] с. 108) для $\forall t\in[0,T]$ получим

$$\left\|u^\omega(t)\right\|_1^2\le\left(\|a\|_1^2+\frac{2m^2T}{\mu}\right)\exp\left(\int\limits_0^t\sigma(s)\,ds\right)\le$$
$$\le\left(\|a\|_1^2+\frac{2m^2T}{\mu}\right)\exp\left(cr^2q_0\right).$$

Аналогичная оценка справедлива и для $\left\|u^0(t)\right\|_1$. Поэтому результат следствия вытекает из теоремы 2 и мультипликативного неравенства (см., напр., [7] с. 19)

$$\|\psi\|_{4,\Omega}\le c_\Omega\|\psi\|_1^{1/2}\|\psi\|^{1/2},$$

где $\psi=u^\omega-u^0$, а $c_\Omega>0$ – фиксированная постоянная, зависящая лишь от области Ω.

Рассмотрим случай размерности пространства $n=3$. Обозначим через Φ_ω – множество решений задачи (5), (6).

Теорема 3. *Пусть размерность пространства $n=3$, элемент $a\in H$ и функция f^ω удовлетворяет предположениям Теоремы 2. Пусть существует решение u^0 задачи (17), (18), обладающее дополнительной гладкостью $u^0\in L^8\left(0,T;\left(L^4(\Omega)\right)^3\right)$. Тогда семейство решений u^ω задач (5), (6) при $\omega\to+\infty$ стремится к u^0 в H равномерно по $t\in[0,T]$. Точнее* $\sup\limits_{u^\omega\in\Phi_\omega}\sup\limits_{t\in[0,T]}\left\|u^\omega-u^0\right\|\to0.$

Доказательство является модификацией рассуждений предыдущей теоремы. Укажем необходимые изменения. Пусть $u^\omega\in\Phi_\omega$ – фиксированное решение задачи (5), (6) при заданном $\omega>0$. Положим $\psi=u^\omega-u^0$. В равенстве (19) для оценки формы b воспользуемся неравенством (см., напр., [6] с. 238)

$$|b(u,u,v)|\le c_*\|u\|^{1/4}\|u\|_1^{7/4}\|v\|_{4,\Omega}, \qquad (31)$$

где $\| \ \|_{4,\Omega}$ обозначает норму в пространстве $\left(L^4(\Omega)\right)^3$.

Согласно (31) и неравенству Юнга имеем

$$\left|2b\left(\psi(t),\psi(t),u^0(t)\right)\right|\le$$
$$\le2c_*\|\psi(t)\|^{1/4}\|\psi(t)\|_1^{7/4}\left\|u^0(t)\right\|_{4,\Omega}\le$$
$$\le\|\psi(t)\|_1^2+c_3\|\psi(t)\|^2\left\|u^0(t)\right\|_{4,\Omega}^8,$$

где постоянная $c_3>0$ определяется применением неравенства Юнга.

Тогда (19) влечет неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|\psi(t)\|^2\le c_3\left\|u^0(t)\right\|_{4,\Omega}^8\|\psi(t)\|^2+$$
$$+\left(f^\omega-f^0,\psi\right).$$

Интегрируя его от 0 до t с учетом суммируемости функции $\left\|u^0\right\|_{4,\Omega}^8$ и равенства $\psi(0)=0$, получим

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|\psi(t)\|^2\le c_3\int\limits_0^t\left\|u^0(t)\right\|_{4,\Omega}^8\|\psi(s)\|^2ds+$$
$$+\int\limits_0^t\left(f^\omega-f^0,\psi\right)ds.$$

Последний интеграл оценивается аналогично тому, как это было сделано в Теореме 2. Так что для некоторой постоянной $c_4>0$ можем записать

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|\psi(t)\|^2\le c_3\int\limits_0^t\left\|u^0(t)\right\|_{4,\Omega}^8\|\psi(s)\|^2ds+\frac{c_4}{\omega}.$$

Отсюда в силу неравенства Гронуолла

$$\|\psi(t)\| \le \frac{2c_4}{\omega}\exp\left(2c_3\int_0^t \|u^0\|_{4,\Omega}^8\, ds\right) \quad (\forall t \in [0,T]).$$

Эта оценка влечет утверждение теоремы.

Отметим, что согласно [6] с. 238 у задачи (17), (18) существует не более одного решения u^0, обладающего дополнительной гладкостью $u^0 \in L^8\left(0,T;\left(L^4(\Omega)\right)^3\right)$. Если потребовать большую дополнительную гладкость u^0, то согласно [4] §2, либо [5], тогда найдется $\omega_0 > 0$ такое, что при всех $\omega > \omega_0$ задача (5), (6) имеет единственное решение.

Из теоремы 3 вытекает

Следствие 2. *В условиях теоремы 3 диаметр множества* Φ_ω *при* $\omega \to +\infty$ *стремится (в норме* H *) к нулю равномерно по* $t \in [0,T]$.

НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКАЯ ЖИДКОСТЬ

Движение нелинейно-вязкой несжимаемой жидкости в принятых выше обозначениях описывается уравнениями (см. [10])

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_k \frac{\partial u}{\partial x_k} - \mu\Delta u -$$

$$-div\left\{2\varphi(I_2)\varepsilon(u)\right\} + \nabla p = f(x,\omega t), \text{ в } Q_T \quad (32)$$

при условиях (2)–(4). Здесь ε – тензор скоростей деформации жидкости

$$\varepsilon = \left\{\varepsilon_{i,j}\right\}_{i,j=1,2}, \quad \varepsilon_{i,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$

$$I_2^2 = \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij}^2.$$

Заданная скалярная функция $\varphi(\cdot)$ и параметр $\mu > 0$ характеризуют вязкость. При изучении задачи (32), (2)–(4) в [10], [11] использовалось следующее условие на функцию $\varphi(s)$. При всех $s \ge 0$ функция $\varphi(s)$ непрерывно-дифференцируема и выполнены соотношения:

a) $0 \le \varphi(s) \le M < \infty \quad (\forall s \in [0,\infty))$,

b) $-s\dot{\varphi}(s) \le \varphi(s)$ при $\dot{\varphi}(s) < 0$. (33)

Условия (33) имеют ясный физический смысл. Первое из них связано с существованием у реальных жидкостей предельных «ньютоновских» вязкостей. Второе – есть выражение закона о том, что сдвиговые напряжения растут вместе с ростом скоростей деформаций (см. [10], гл.2, §2). Здесь и ниже точка над символом обозначает дифференцирование по *s*.

Математическое моделирование движения нелинейно-вязкой жидкости в вибрационном поле представляет большой интерес с теоретической и прикладной точки зрения. Историю вопроса и многочисленные частные примеры вибраций нелинейно-вязкой жидкости, важные в прикладном аспекте, можно найти в работе [13].

Зададим форму *g* соотношением

$$g(u,v) = 2\sum_{i,j=1}^{2}\int_\Omega \varphi(I_2(u))\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)dx$$

$$(u,v \in V). \quad (34)$$

Задача об обобщенном (слабом) решении для системы (32), (2)–(4) может быть сформулирована в виде:

Для заданной функции $f^\omega \in L^2(0,T;V')$ и элемента $a \in H$ ищется функция $u \in L^2(0,T;V)$, такая что $u' \in L^2(0,T;V')$ и п.в. на $[0,T]$ выполнены равенства

$$\frac{d}{dt}\langle u,v\rangle + \mu(u,v)_1 + g(u,v) + b(u,u,v) = \langle f^\omega, v\rangle$$

$$(\forall v \in V) \quad (35)$$

и (6).

В качестве усредненной задачи рассматривается уравнение вида (32), в котором правая часть равна среднему значению f^0 функции $f^\omega(t)$.

Доказательство однозначной разрешимости задачи (35), (6) в [10] и задачи (32), (2)-(4) в [11], [12] опирается на тот факт, что при выполнении условий (33) выполнено свойство монотонности формы g

$$0 \le g(u,u-v) - g(v,u-v) \quad (\forall u,v \in V). \quad (36)$$

Формула (36) позволяет перенести результаты теорем 2, 3 настоящей работы по обоснованию метода усреднения на случай модели нелинейно-вязкой жидкости (35). При этом соотношение (19), используемое при доказательстве теорем 2, 3, превращается в неравенство. Остальные реассуждения сохраняют силу.

Отметим, что асимптотика поведения усредненной (автономной) задачи для нелинейно-вязкой жидкости при $t \to +\infty$ в условиях (33) исследована в работе автора [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Симоненко И. Б.* Обоснование метода усреднения для задачи конвекции в поле быстроосциллирующих сил и других параболических уравнений, Математический сборник. – 1972. – №87. – С. 236–253
2. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. – М. : МГУ, 1978. – 203 с.
3. *Челомей В. Н.* Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями. Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 270, № 1. – С. 62–68.
4. *Симоненко И. Б.* Метод усреднения в теории нелинейных уравнений параболического типа с приложением к задачам гидродинамической устойчивости. – Ростов-на-Дону. : Изд-во Ростовского университета. – 1989. – 112 с.
5. *Левенштам В. Б.* Обоснование метода усреднения для системы уравнений с оператором Навье–Стокса в главной части, Алгебра и анализ, 26:1 (2014). – С. 94–127.
6. *Темам Р.* Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. Пер. с англ. – М. : Мир, 1981. – 408 с.
7. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М. : Наука, 1970. – 288 с.
8. *Лионс Ж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. – 588 с.
9. *Демидович Б. П.* лекции по математической теории устойчивости. – М. : Наука, 1967. – 472 с.
10. *Литвинов В. Г.* Движение нелинейно-вязкой жидкости. – М. : Наука, 1982. – 373 с.
11. *Соболевский П. Е.* Существование решений математической модели нелинейно-вязкой жидкости // ДАН СССР, 1985. – Т. 285, N 1. – С. 44–48.
12. *Агранович Ю. Я., Хацкевич В. Л.* Моделирование движения нелинейно-вязкой жидкости (сильные решения). Системы управления и информационные технологии. – 2008. – № 4(34). – С. 4–9.
13. *Перминов А. В.* Движение нелинейно-вязкой жидкости в вибрационном поле. Диссертация на соискание степени кандидата физ.-мат. наук. – Пермь. – 2000.
14. *Хацкевич В. Л.* Об аттракторе математической модели, описывающей движение нелинейно-вязкой жидкости // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2014. – № 4. – С. 193–206.

Хацкевич В. Л. – д.т.н., профессор, заведующий кафедрой информатики, экономики и менеджмента Института заочного экономического образования Воронежского государственного университета.
E-mail: vlkhats@mail.ru

Khatskevich V. L. – doctor of technical Sciences, Professor, head of Department of Informatics, Economics and management Institute of correspondence of economic education of the Voronezh state University.
E-mail: vlkhats@mail.ru