

КВАЗИЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ СТАНДАРТНЫХ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В. И. Костылев, И. П. Гресь

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.02.2016 г.

Аннотация. Введено понятие квазиэнергии системы случайных величин. Получены аналитические выражения для её плотности вероятности и функции распределения. Установлено, что при увеличении количества элементов системы графики функции распределения смещаются вправо. Плотность вероятности квазиэнергии имеет унимодальный характер. С увеличением количества элементов выборки она становится шире, а её максимальное значение уменьшается. Введено новое понятие энергоподобного обнаружения.

Ключевые слова: система случайных величин, стандартная гауссовская случайная величина, энергетический обнаружитель, квазиэнергия, энергоподобный обнаружитель.

Annotation. A notion of quasi-energy of the system of random variables is introduced. Analytical expressions of its probability density function and cumulative distribution function are obtained. It is found that if the number of system elements is increased, the cumulative distribution curve shifts to the right. The quasi-energy probability function is unimodal. If the number of elements in the sample is increased the probability distribution function becomes wider and its peak decreases. A notion of energy-like detector is introduced.

Keywords: system of random variables, standard Gaussian random variable, energy detector, quasi-energy, energy-like detector.

1. ВВЕДЕНИЕ

Энергетическое обнаружение сигналов (обнаружение по энергии) широко применяется в системах когнитивного радио и достаточно хорошо исследовано теоретически [1–11]. Энергетический обнаружитель является оптимальным при обнаружении некоррелированного гауссовского сигнала на фоне некоррелированного гауссовского шума и квазиоптимальным при обнаружении неизвестного детерминированного сигнала на фоне некоррелированного гауссовского шума [11]. При других сигналах и шумах преимущества энергетического обнаружителя не так очевидны.

В настоящей статье вводятся новые понятия квазиэнергии системы случайных величин и энергоподобного обнаружителя, а также исследуются статистические свойства энергии и квазиэнергии для систем независимых стандартных гауссовских случайных величин.

2. КВАЗИЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ВЕЛИЧИН

Системой величин называются две или несколько величин, рассматриваемых вместе [12]; при этом элементы системы могут быть как детерминированными, так и случайными.

Определение 1. Простейшей будем называть систему, состоящую из двух элементов.

При анализе систем величин удобно пользоваться геометрической интерпретацией: простейшую систему можно рассматривать как точку на плоскости или как вектор с двумя компонентами; систему n величин можно представить как точку в n -мерном пространстве или как n -мерный вектор.

Пусть

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} - \quad (1)$$

система детерминированных действительных величин. Здесь $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – элементы системы. Известно [1], что система (1) обладает детерминированной энергией E , причём:

$$E = \sum_{i=1}^n \xi_i^2. \quad (2)$$

По аналогии с (2) введём понятие квазиэнергии.

Определение 2. Квазиэнергией системы (1) будем называть детерминированную величину K , равную сумме модулей элементов системы.

Таким образом,

$$K = \sum_{i=1}^n |\xi_i|. \quad (3)$$

3. КВАЗИЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Будем обозначать систему действительных случайных величин так:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}. \quad (4)$$

Здесь x_1, x_2, \dots, x_n – действительные случайные величины, являющиеся элементами системы.

Полное описание системы случайных величин достигается с помощью закона распределения, под которым понимается соотношение, устанавливающее связь между областью возможных значений системы случайных величин и вероятностями появления системы в этих областях. Менее полное, но более простое, описание системы случайных величин осуществляется с помощью числовых характеристик. Последние могут быть как детерминированными (например, начальные или

центральные моменты), так и случайными. В частности, случайной числовой характеристикой системы случайных величин является её энергия.

Определение 3. Энергией системы (4) случайных величин будем называть случайную величину E , описываемую функцией распределения

$${}_n F_E(\alpha) = P\left\{\sum_{i=1}^n x_i^2 < \alpha\right\}. \quad (5)$$

В частном случае простейшей системы очевидно, что ${}_2 F_E(\alpha)$ есть вероятность того, что случайная точка со случайными координатами x_1 и x_2 находится в пределах плоской области, ограниченной окружностью с центром в начале координат, имеющей диаметр 2α (рис. 1а).

Изменим границы области, а именно, преобразуем окружность в квадрат, диагонали которого равны диаметру прежней окружности, т. е. 2α , и направлены вдоль координатных осей (рис. 1б). Пусть ${}_2 F_Q(\alpha)$ есть вероятность того, что случайная точка со случайными координатами x_1 и x_2 находится внутри этого квадрата. Случайную величину Q с функцией распределения ${}_2 F_Q(\alpha)$ назовём квазиэнергией простейшей системы.

Понятие квазиэнергии может быть обобщено на случай системы с произвольным количеством элементов следующим образом.

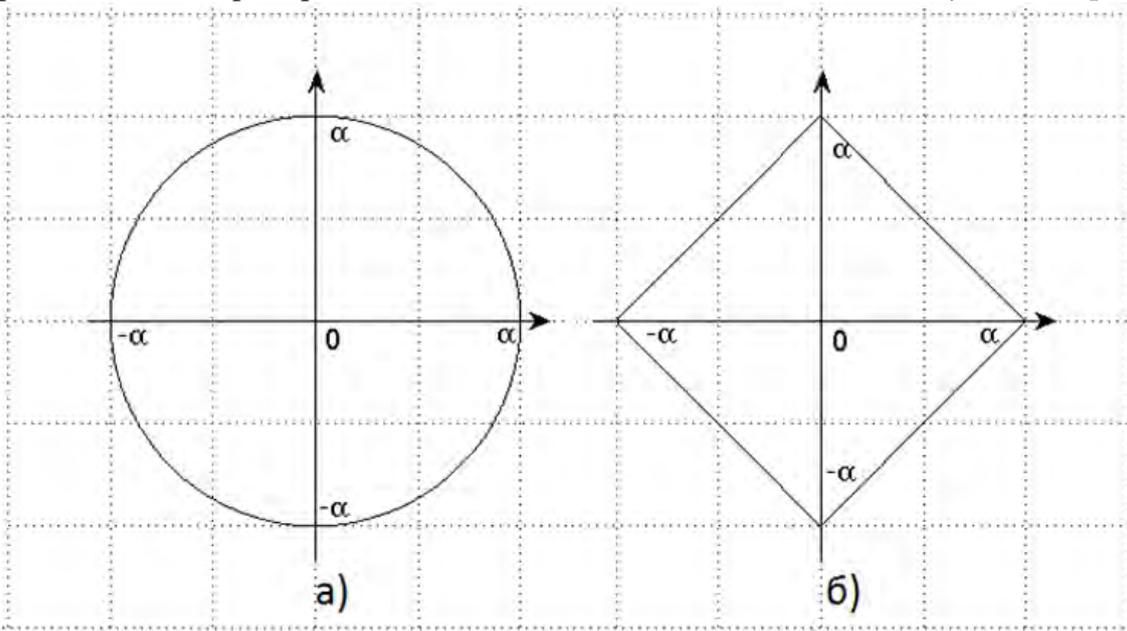


Рис. 1. Границы областей

Определение 4. Квазиэнергия системы (4) случайных величин есть случайная величина Q , описываемая функцией распределения

$${}_n F_Q(\alpha) = P\left\{\sum_{i=1}^n |x_i| < \alpha\right\}. \quad (6)$$

4. ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ НЕЗАВИСИМЫХ СТАНДАРТНЫХ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Стандартная гауссовская случайная величина имеет следующую плотность распределения вероятности:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (7)$$

В общем случае энергия E системы (4) независимых стандартных гауссовских случайных величин имеет распределение χ^2 с плотностью вероятности

$${}_n P_E(y) = \Omega(y) \frac{y^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\frac{y}{2}\right)}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (8)$$

и функцией распределения

$${}_n F_E(\alpha) = \Omega(\alpha) P\left(\frac{n}{2}, \frac{\alpha}{2}\right), \quad (9)$$

где

$$\Omega(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leq 0 \end{cases} \quad (10)$$

ступенчатая функция (функция единичного скачка, функция Хэвисайда);

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt \quad (11)$$

гамма-функция [13],

$$P(\xi, \zeta) = \frac{\gamma(\xi, \zeta)}{\Gamma(\xi)} \quad (12)$$

ро-функция [13],

$$\gamma(\xi, \zeta) = \int_0^{\zeta} t^{\xi-1} \exp(-t) dt \quad (13)$$

неполная гамма-функция [13].

5. КВАЗИЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ НЕЗАВИСИМЫХ СТАНДАРТНЫХ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В общем случае плотность вероятности и функцию распределения квазиэнергии Q системы (4) независимых стандартных гауссовских случайных величин нам удалось представить в виде рядов, поскольку в виде ряда удалось представить производящую функцию моментов квазиэнергии:

$${}_n M_Q(s) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} A_k s^{-2k-n}. \quad (14)$$

При этом $A_0 = 1$, а остальные коэффициенты вычисляются по рекуррентной формуле

$$A_k = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k \frac{(\ln - k + l)(-1)^l \Gamma(2l + 1) C_{k-l}}{2^l l!}. \quad (15)$$

Используя обратное преобразование Лапласа, из (14) нетрудно получить выражения для плотности вероятности и функции распределения квазиэнергии:

$${}_n P_Q(y) = \Omega(y) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k y^{2k+n-1}}{(2k+n-1)!}, \quad (16)$$

$${}_n F_Q(\alpha) = \Omega(\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k \alpha^{2k+n}}{(2k+n)!}. \quad (17)$$

На рис. 2 представлены кривые плотности вероятности энергии и квазиэнергии, а также результаты статистического моделирования. Линиями 1 и 2 на рис. 2 показаны плотности вероятности квазиэнергии ${}_n P_Q(y)$ для $n = 10$ и $n = 20$, а линиями 3 и 4 – плотности вероятности энергии ${}_n P_E(y)$ для тех же значений n . Результаты моделирования плотности вероятности квазиэнергии показаны круглыми и квадратными маркерами (для $n = 10$ и $n = 20$ соответственно). Аналогично, ромбовидными и треугольными маркерами – результаты моделирования плотности вероятности энергии.

Как видно из хода кривых на рис. 2, плотности вероятности энергии и квазиэнергии являются унимодальными. При этом максимум плотности вероятности смещается вправо при увеличении количества элементов, составляющих систему случайных величин. Кроме того, при увеличении n максимальное значение плотности вероятности уменьшается, и она становится шире.

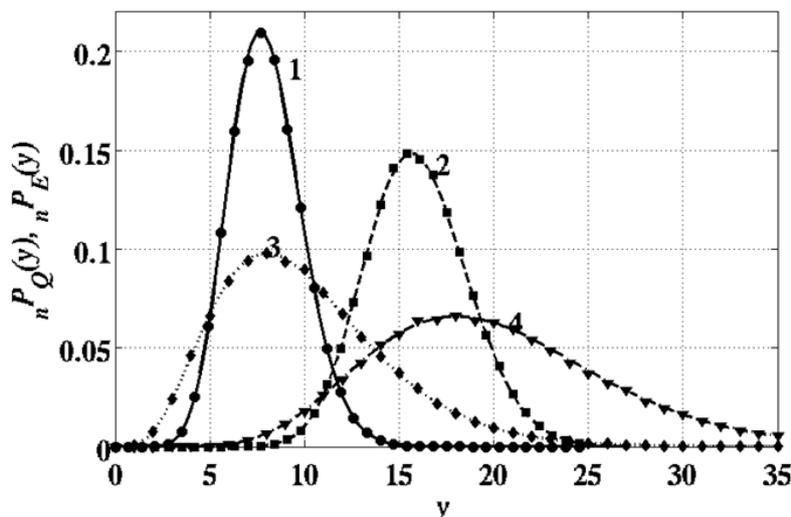


Рис. 2. Плотности вероятности энергии ${}_n P_E(y)$ и квазиэнергии ${}_n P_Q(y)$ для $n=10$ и $n=20$

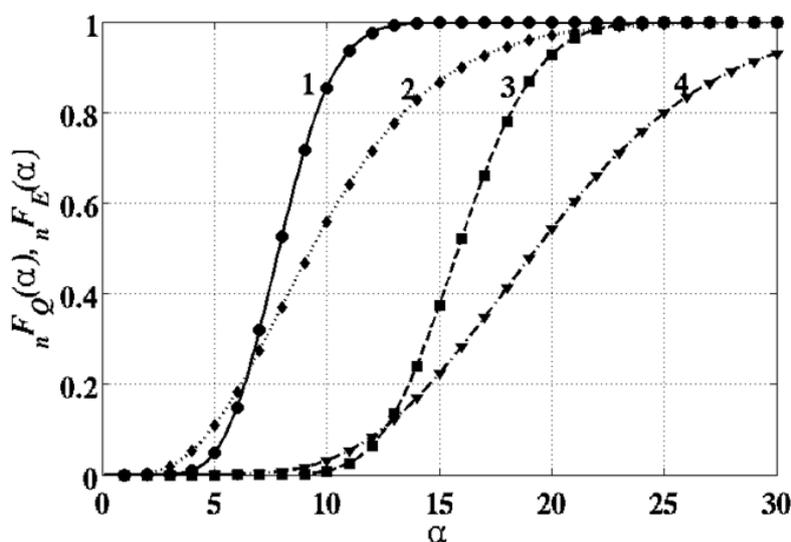


Рис. 3. Функции распределения энергии ${}_n F_E(\alpha)$ и квазиэнергии ${}_n F_Q(\alpha)$ для $n=10$ и $n=20$

На рис. 3 изображены кривые функции распределения энергии ${}_n F_E(\alpha)$ и квазиэнергии ${}_n F_Q(\alpha)$. Линиями 1 и 2 показаны кривые, иллюстрирующие поведение функции распределения квазиэнергии при $n=10$ и $n=20$, а линиями 3 и 4 – функции распределения энергии для тех же значений n . Круглыми и квадратными маркерами отмечены результаты моделирования функции распределения квазиэнергии (для $n=10$ и $n=20$), а ромбовидными и треугольными – результаты моделирования функции распределения энергии.

Из рис. 3 видно, что при увеличении количества элементов системы случайных величин функции распределения как энергии, так и квазиэнергии, смещаются вправо.

Учитывая, что плотность вероятности модуля стандартной гауссовской случайной величины имеет вид [14]

$$P_{|x|}(y) = P_x(y) = \Omega(y) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right), \quad (18)$$

и вычисляя свёртку, можно получить следующие выражения для функции распределения ${}_2 F_Q(\alpha)$ и плотности вероятности ${}_2 P_Q(y)$ квазиэнергии простейшей системы стандартных гауссовских случайных величин:

$${}_2 F_Q(\alpha) = \Omega(\alpha) \operatorname{erf}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad (19)$$

$${}_2 P_Q(y) = \Omega(y) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right). \quad (20)$$

Здесь

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt - \quad (21)$$

интеграл вероятности (функция ошибок) [13]. Нетрудно также получить значения математического ожидания и дисперсии квазиэнергии системы двух независимых стандартных гауссовских случайных величин: ${}_2m_Q = 2\sqrt{2/\pi}$, ${}_2D_Q = 2(1 - 2/\pi)$.

Рассмотрим систему

$$X = \{x_1, x_2, x_3\} \quad (22)$$

трёх независимых стандартных гауссовских случайных величин, каждая из которых описывается плотностью вероятности (7).

Плотность вероятности ${}_3P_Q(y)$ квазиэнергии такой системы представляет собой свёртку плотностей вероятности (18) и (20). Её удалось представить только в интегральном виде:

$${}_3P_Q(y) = \Omega(y) \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \times \int_0^1 y \operatorname{erf}[a_1(t)y] \exp[-a_2(t)y^2] dt, \quad (23)$$

где

$$a_1(t) = \frac{t}{2}; \quad a_2(t) = \frac{(1-t)^2 + t^2/2}{2}. \quad (24)$$

Можно также показать, что функция распределения квазиэнергии системы трёх независимых стандартных гауссовских случайных величин описывается формулой

$${}_3F_Q(\alpha) = \Omega(\alpha) \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 \frac{a_1(t) \operatorname{erf}[a_3(t)\alpha]}{a_2(t)} - \frac{\operatorname{erf}[a_1(t)\alpha] \exp[-a_2(t)\alpha^2]}{a_2(t)} dt, \quad (25)$$

где

$$a_3(t) = \sqrt{a_1^2(t) + a_2(t)}, \quad (26)$$

а $a_1(t)$ и $a_2(t)$ по-прежнему определяются формулами (24).

В дополнение к (25) нами получена приближённая формула

$${}_3F_Q(\alpha) \approx \operatorname{erf}^3[\alpha g(\alpha)], \quad (27)$$

где $g(\alpha)$ – медленно меняющаяся функция, график которой показан на рис. 4. На рис. 5

приведена абсолютная погрешность формулы (27): из рис. 4 видно, что она весьма невелика.

Эмпирическая функция $g(\alpha)$ может быть аппроксимирована полиномом:

$$g(\alpha) = p_1\alpha^9 + p_2\alpha^8 + \dots + p_9\alpha + p_{10}. \quad (28)$$

Коэффициенты полинома приведены в таблице.

Таблица

Коэффициенты полинома

m	P_m
1	$7.251 \cdot 10^{-9}$
2	$-2.449 \cdot 10^{-7}$
3	$3.395 \cdot 10^{-6}$
4	$-2.45e \cdot 10^{-5}$
5	$9.727e \cdot 10^{-5}$
6	-0.0002202
7	0.0003345
8	$-6.975 \cdot 10^{-5}$
9	$8.732 \cdot 10^{-5}$
10	0.3891

6. ЭНЕРГОПОДОБНЫЙ ОБНАРУЖИТЕЛЬ

Пусть имеются три системы случайных величин, а именно,

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}, \\ Z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}, \quad (29)$$

причём Z связана с X и Y детерминированным линейным законом, в отношении которого существуют две гипотезы H_0 и H_1 . Согласно гипотезе H_1

$$Z = X + Y. \quad (30)$$

Согласно гипотезе H_0

$$Z = Y. \quad (31)$$

Далее будем называть систему X сигналом, а систему Y – шумом.

Пусть для анализа и обработки доступна одна из реализаций системы Z . Это детерминированная система, имеющая вид (1).

Доподлинно известно, что одна из гипотез H_0 , H_1 верна, а другая – ложна. Задача

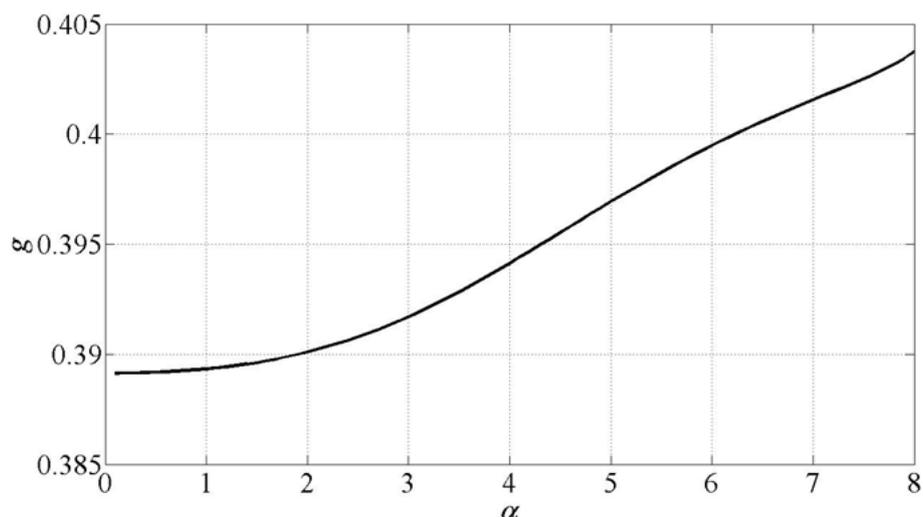


Рис. 4. Эмпирическая функция $g(\alpha)$

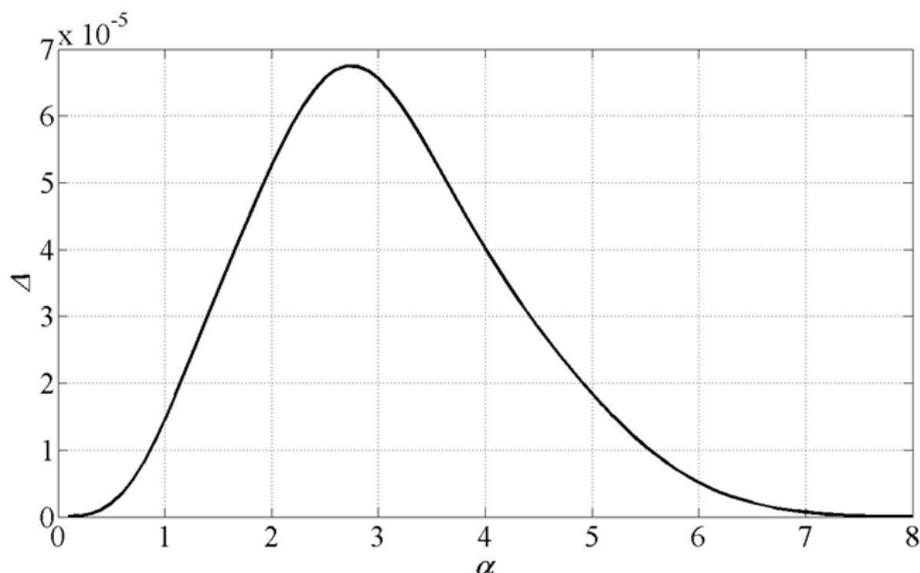


Рис. 5. Абсолютная погрешность аппроксимации

обнаружения сигнала на фоне шума состоит в принятии на основе обработки реализации (1) решения в пользу одной из двух гипотез, H_0 или H_1 . Как и в [11], решение в пользу гипотезы H_0 обозначим γ_0 , а решение в пользу гипотезы H_1 – γ_1 .

Эффективность решения задачи обнаружения характеризуется двумя вероятностями [11] принятия гипотезы γ_1 :

$$p_f = P\{\gamma_1 | H_0\}, \quad p_d = P\{\gamma_1 | H_1\}, \quad (32)$$

причём p_f называется «вероятность ложной тревоги», а p_d – «вероятность правильного обнаружения».

Энергетический алгоритм решения задачи обнаружения таков. Вводится некоторая

детерминированная величина h , называемая порогом. Если детерминированная энергия (2) реализации (1) системы Z превышает этот порог, то выносится решение γ_1 . В противном случае – решение γ_0 .

Устройство, реализующее этот алгоритм, называется «энергетический обнаружитель». Для энергетического обнаружителя

$$p_f = P\{E > h | H_0\}, \quad p_d = P\{E > h | H_1\}, \quad (33)$$

где E – энергия системы Z .

Определение 5. Энергоподобным называется обнаружитель с вероятностью правильного обнаружения

$$p_d = P\{Q > h | H_1\} \quad (34)$$

и вероятностью ложной тревоги

$$p_f = P\{Q > h | H_0\}. \quad (35)$$

Здесь Q – квазиэнергия системы Z .

Очевидно, что энергоподобный обнаружитель формирует квазиэнергию K (см. (3)) реализации (1) системы Z . Если квазиэнергия K превышает порог h , то выносится решение γ_1 . В противном случае – решение γ_0 .

Пусть σ_x^2 и σ_y^2 – дисперсии случайных элементов систем X и Y соответственно, и пусть $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ и $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ – независимые стандартные гауссовские случайные величины, характеризующиеся плотностью вероятности (7).

Известно, что в частном случае, когда элементы систем X и Y таковы:

$$x_i = \sigma_x \eta_i, \quad y_i = \sigma_y \mu_i, \quad (36)$$

энергетический обнаружитель является оптимальным. Это означает, что он более эффективен, чем любой другой обнаружитель, в том числе и энергоподобный. При других моделях сигнала и шума соотношение между эффективностями энергетического и энергоподобного обнаружителей не так очевидно и требует дополнительного исследования в каждом отдельном случае.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье введено новое понятие энергоподобного обнаружения. Энергоподобный обнаружитель сравнивает с порогом квазиэнергию обрабатываемой реализации сигнала.

Приведенные в статье формулы позволяют рассчитывать функцию распределения и плотность вероятности квазиэнергии. Расчёты показали, что плотность вероятности имеет унимодальный характер и расширяется при увеличении количества элементов, составляющих систему случайных величин. Функция распределения при увеличении количества элементов смещается вправо.

Если модели обнаруживаемого сигнала и шума отличны от некоррелированной гауссовской системы, то представляет интерес сравнение эффективности энергетического и энергоподобного обнаружителей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Urkowitz H.* Energy Detection of Unknown Deterministic signals // Proc. IEEE. – 1967. – vol. 55. – pp. 523–531.

2. *Костылев В. И.* Характеристики энергетического обнаружения квазидетерминированных радиосигналов // Известия ВУЗов. Радиофизика. – 2000. – Т. 43, № 10. – С. 926–932.

3. *Kostylev V. I.* Energy Detection of a Signal with Random Amplitude // Proc. IEEE Int. Conf. on Communication: ICC'02, 28 Apr. – 2 May 2002. N.Y. : IEEE. – 2002. – vol. 3. – P. 1606–1610.

4. *Костылев В. И.* Характеристики энергетического обнаружения квазидетерминированных радиосигналов с нерэлеевским распределением флуктуаций амплитуды // Известия ВУЗов. Радиофизика. – 2002. – Т. 45, № 5. – С. 450–457.

5. *Трифонов А. П.* Энергетическое обнаружение узкополосных радиосигналов на фоне шума неизвестной интенсивности / А. П. Трифонов, В. И. Костылев // Известия ВУЗов. Радиофизика. – 2002. – Т. 45, № 6. – С. 538–547.

6. *Костылев В. И.* Характеристики энергетического обнаружения квазидетерминированных радиосигналов с амплитудой Райса // Известия ВУЗов. Радиоэлектроника. – 2004. – Т. 47, № 1. – С. 55–61.

7. *Костылев В. И.* Характеристики энергетического обнаружения неизвестных радиосигналов на фоне шума Лихтера / В. И. Костылев, М. П. Сличенко // Известия ВУЗов. Радиофизика. – 2008. – Т. 51, № 10. – С. 889–898.

8. *Костылев В. И.* Энергетическое обнаружение радиосигналов на фоне негауссовского шума неизвестной интенсивности / В. И. Костылев, М. П. Сличенко // Известия ВУЗов. Радиофизика. – 2009. – Т. 52, № 11. – С. 910–920.

9. *Костылев В. И.* Энергетическое обнаружение частично поляризованных радиосигналов на фоне гауссовского шума / В. И. Костылев, М. П. Сличенко // Известия ВУЗов. Радиофизика. – 2010. – Т. 53, № 12. – С. 803–814.

10. *Костылев В. И.* Адаптивное энергетическое обнаружение квазидетерминирован

ных радиосигналов на фоне негауссовского шума / В. И. Костылев, М. П. Сличенко // Радиотехника и электроника. – 2011. – т. 56, № 6. – С. 698–704.

11. *Костылев В. И.* Обобщённые энергетические обнаружители первого и второго родов // Вестник ВГУ. Физика. Математика. – 2015. – № 3. – С. 102–111.

12. *Тихонов В. И.* Статистическая теория радиоэлектронных систем / В. И. Тихонов, В. С. Ефименко, А. Г. Журавлёв. – М. : Изда-

ние Военного авиационного технического университета, 2002. – 758 с.

13. *Abramowitz M., Stegun I.A.* Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards, Applied Math. Series #55, Dover Publications, 1965, sec. 6.5.

14. *Горяинов В. Т.* Статистическая радиотехника. Примеры и задачи: Учебн. пособие для вузов. // В. Т. Горяинов, А. Г. Журавлёв, В. И. Тихонов. – 2-е изд. – М. : Советское радио, 1980. – 544 с.

Костылев Владимир Иванович – заведующий кафедрой технической кибернетики и автоматического регулирования, доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тел.: 8(920)-453-17-72

E-mail: kostylev@amm.vsu.ru

Kostylev Vladimir Ivanovich – Head of the Department of Technical Cybernetics and Automatic Control, Doctor of physical and mathematical sciences, professor, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Tel.: 8(920)-453-17-72

E-mail: kostylev@amm.vsu.ru

Гресь Иван Павлович – аспирант кафедры технической кибернетики и автоматического регулирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Тел.: 8(951)-555-01-40

E-mail: ivan_gres@mail.ru

Gres Ivan Pavlovich – postgraduate student, Department of Technical Cybernetics and Automatic Control, Voronezh State University, Voronezh, Russia.

Tel.: 8(951)-555-01-40

E-mail: ivan_gres@mail.ru