УДК 621.3.015.4

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КОНТУРА, ОСНОВАННЫЙ НА ПЕРВОМ МЕТОДЕ ЛЯПУНОВА

Н. Д. Бирюк, А. Ю. Кривцов, В. В. Юргелас

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 12.03.2016 г.

Аннотация. Проблема устойчивости линейного колебательного контура с периодическими параметрами пока остается нерешенной. В настоящей публикации предлагается метод решения этой задачи с привлечением первого метода Ляпунова. Метод может быть обобщен на более сложные параметрические радиоцепи.
Ключевые слова: параметрический контур, устойчивость контура, первый метод Ляпунова, матрица монодромии.
Annotation. Stability problem of linear oscillating circuit with periodical parametes for the present unsettled. In this publication method of solution this problem with attracting the first method of Lyapunov is proposed. Method is possible to generalization on more complex time varying circuits.
Keywords: time varying circuit, stability, the first method Lyapunov, the matrix of monodromie.

ВВЕДЕНИЕ

Параметрический контур может быть либо высокочастотным усилителем, либо автогенератором в зависимости от того, является ли он устойчивым или неустойчивым. Разграничение этих двух возможностей представляет собой весьма сложную задачу, опирающуюся на теорию устойчивости Ляпунова. Есть два метода решения этой задачи: первый метод Ляпунова и второй метод Ляпунова [1, 2]. По классификации авторов обстоятельной монографии [3] первый метод Ляпунова «неэффективен»; второй – «эффективен». Первый метод Ляпунова предполагает известными фундаментальные системы решений соответствующих дифференциальных уравнений, а это – отдельная весьма сложная задача. Второй метод Ляпунова свободен от этого предположения, однако здесь требуется построение специальной функции, функции Ляпунова, причем в самом методе Ляпунова не содержится рекомендаций по такому построению. Со времени защиты знаменитой диссертации Ляпунова (1893 г.) накоплен опыт по построению функций Ляпунова, поэтому в приложениях второй метод Ляпунова приобрел широкое распространение. Однако, с помощью второго метода Ляпунова нельзя получить полное решение задачи об устойчивости, он как бы выхватывает частные случаи, связанные с конкретными функциями Ляпунова, таких частных случаев – бесконечное множество, поэтому они не позволяют полностью исчерпать поставленную задачу. Первый метод Ляпунова позволяет это сделать, его область применимости несоизмеримо шире второго метода Ляпунова, но и трудности применения намного больше. В этом направлении в математике также накоплен опыт.

В радиоэлектронике теория устойчивости Ляпунова применяется незаслуженно мало, что, на наш взгляд, является большим упущением. Нужно стремиться к тому, чтобы результаты, достигнутые в абстрактной математике, стали достоянием радиоэлектроники. Опыт показывает, что задача перенесения достижений из одной области знаний в другую не является простой. Настоящая публикация является попыткой сделать некоторые шаги в направлении использования более универсального первого метода Ляпунова в радиоэлектронике.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КОНТУРА

Анализируется колебательный контур, схема которого представлена на рис.

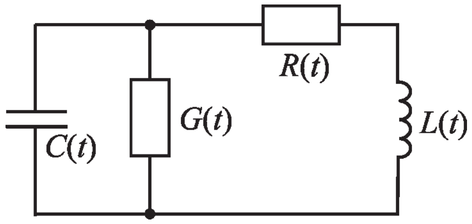

Рис. Схема параметрического контура

Считается, что элементы контура (емкость C, активная проводимость G, активное сопротивление R и индуктивность L) изменяются во времени по любым непрерывным периодическим функциям с одним и тем же периодом, независимо от протекающих токов (условие линейности контура).

Используя первый и второй законы Кирхгофа, составляем математическую модель контура

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{G}{C}q - \dfrac{1}{L}\Phi \\ \dfrac{d\Phi}{dt} = \dfrac{1}{C}q - \dfrac{R}{L}\Phi, \end{cases}$$

где q – заряд конденсатора, Φ – потокосцепление индуктивности. Получилась линейная система двух дифференциальных уравнений с переменными периодическими коэффициентами. Для сложных математических преобразований эта система уравнений неудобна, ее нужно нормировать. С этой целью введем произвольные масштабные делители времени t_M, заряда q_M и магнитного потока Φ_M и перейдем к безразмерным переменным времени $\tau = \dfrac{t}{t_M}$, заряда $x_1 = \dfrac{q}{q_M}$ и магнитного потокосцепления $x_2 = \dfrac{\Phi}{\Phi_M}$. В новых переменных дифференциальная система примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\tau} = -\dfrac{t_M G}{C}x_1 - \dfrac{t_M r}{L}x_2 \\ \dfrac{dx_2}{d\tau} = \dfrac{t_M}{rC}x_1 - \dfrac{t_M R}{L}x_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $r = \dfrac{\Phi_M}{q_M}$ – нормировочное сопротивление. Здесь t_M и r можно выбирать произвольно и тем самым приводить систему к удобному виду при решении конкретных задач. Как видно, в правой части во все коэффициенты входит постоянный положительный множитель t_M. Используя это свойство, введем малый положительный параметр ε, по формуле

$$t_M = \varepsilon t_1,$$

где t_1 – некоторый фиксированный промежуток времени. Тогда дифференциальная система (1) представляется в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d\tau} = \varepsilon\left(-\dfrac{t_1 G}{C}x_1 - \dfrac{t_1 r}{L}x_2\right) \\ \dfrac{dx_2}{d\tau} = \varepsilon\left(\dfrac{t_1}{rC}x_1 - \dfrac{t_1 R}{L}x_2\right) \end{cases} \tag{2}$$

или в более компактном виде

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{x} = \varepsilon\mathbf{A}(\tau)\mathbf{x}, \tag{3}$$

где $x = colon(x_1, x_2)$ – вектор-столбец, $\mathbf{A}(\tau) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – матрица-функция:

$$a_{11} = -\frac{t_1 G}{C},\ a_{12} = -\frac{t_1 r}{L},\ a_{21} = \frac{t_1}{rC},\ a_{22} = -\frac{t_1 R}{L}.$$

Заметим, что при изменении параметра ε изменяется период матрицы $\mathbf{A}(\tau)$. Покажем это на абстрактном конкретном примере.

$$y = Y\cos(\Omega t + \varphi) = Y\cos(\Omega t_M \tau + \varphi) =$$
$$= Y\cos(\varepsilon\Omega t_1 \tau + \varphi).$$

Подбором t_1 можно получить равенство $\Omega t_1 = 1$. Тогда

$$y = Y\cos(\varepsilon\tau + \varphi).$$

Период этой функции равен $T = \dfrac{2\pi}{\varepsilon}$. Таким образом, с уменьшением ε увеличивается период T и при $\varepsilon \to 0$ период $T \to \infty$, т. е. периодическая функция стремится к непериодической. Как видно, если применить формулу усреднения $y_{cp} = Y\lim\limits_{\tau\to\infty}\dfrac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \cos(\varepsilon\tau + \varphi)d\tau = 0$, то усреднение косинуса будет таким, как если бы его период не изменялся.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ПЕРВОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Для линейной периодической дифференциальной системы с периодом T существует бесконечное множество фундаментальных систем решений, представляющих собой матрицы-функции порядка $2\times 2,$ столбцы которых состоят из линейно независимых решений системы (2), т. е.

$$\mathbf{X}(t,t_0)=\left[\mathbf{x}^{(1)}(t)\ \ \mathbf{x}^{(1)}(t)\right]=\begin{bmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) & x_2^{(2)}(t) \end{bmatrix},$$

где $\begin{bmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \end{bmatrix}$ – линейно независимые решения системы (2), причем матрица-функция $\mathbf{X}(t,t_0)$ однозначно определяется постоянной матрицей $\mathbf{X}(t_0,t_0).$ Из фундаментальных систем решений принято [3, 4] выделять одну из них с начальной единичной матрицей

$$\mathbf{X}(t_0,t_0)=\mathbf{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта особая матрица-функция системы фундаментальных решений называется матрицантом. Значение матрицанта $\mathbf{X}(T,t_0)$ при $t=T$ решает задачу об устойчивости параметрического контура: если оба собственные значения матрицанта (мультипликаторы) по модулю меньше единицы, то контур устойчив, если хотя бы один из них по модулю больше единицы, то контур неустойчив. Постоянная матрица $\mathbf{X}(T,t_0)$ называется *матрицей монодромии*. Ее отыскание имеет первостепенное значение при анализе устойчивости контура или системы (2) первым методом Ляпунова.

Дифференциальная система (2) с периодическими коэффициентами относится к классу приводимых систем, так как доказано [1, 4], что заменой переменной

$$\mathbf{x}=\mathbf{\Phi}(\tau)\mathbf{y}$$

система (2) приводится к системе

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{y}$$

с постоянной матрицей, однако, практически воспользоваться этой заменой переменной затруднительно, поскольку матрица-функция $\mathbf{\Phi}(\tau)$ может быть найдена только через фундаментальную систему решений дифференциальной системы (2).

Разработан метод построения матрицанта [1, 3, 4] без отыскания решений системы (2). По этому методу может быть найдена матрица монодромии как сумма бесконечного ряда

$$\mathbf{X}(T,\tau_0)=$$

$$=\mathbf{I}+\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\int_0^T\mathbf{A}(\tau)\int_0^\tau\mathbf{A}(\tau)\ldots\int_0^T\mathbf{A}(\tau)}_{k}\underbrace{d\tau\ldots d\tau}_{k}. \qquad (4)$$

Здесь $\mathbf{A}(\tau)$ – матрица дифференциальной системы (2), $t_0=0.$ Сумма ряда в правой части (4) сходится, поскольку она меньше суммы мажорируемого ряда

$$\mathbf{I}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(MT)^k}{k!}=e^{MT},$$

где $M=\sup\limits_{0\le t\le T}\left|\mathbf{A}(\tau)\right|$ – положительное число. Здесь через $\left|\mathbf{A}(\tau)\right|$ обозначена норма матрицы $\mathbf{A}(\tau),$ в роли которой могут быть разные положительные функции нормированного времени τ [2], например,

$$\left|\mathbf{A}(\tau)\right|=\sqrt{a_{11}^2(\tau)+a_{12}^2(\tau)+a_{21}^2(\tau)+a_{22}^2(\tau)},$$

символом « $\sup\limits_{0\le t\le T}$ » обозначено максимальное значение нормы в интервале нормированного времени $[0,T].$ Как видно, слагаемые суммы в (4) представляют собой интегралы

$$0:\ I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$1:\ \int_0^T\mathbf{A}(\tau)d\tau;$$

$$2:\ \int_0^T\mathbf{A}(\tau)\int_0^\tau\mathbf{A}(\tau)d\tau d\tau;$$

$$\ldots$$

$$k:\ \underbrace{\int_0^T\mathbf{A}(\tau)\int_0^\tau\mathbf{A}(\tau)\ldots\int_0^\tau\mathbf{A}(\tau)}_{k}\underbrace{d\tau\ldots d\tau}_{k};$$

Слева выписаны порядковые номера слагаемых суммы в (4). Поскольку рассматриваемый ряд сходится, то бесконечную сумму в (4) можно заменить конечной суммой

$$\mathbf{I}+\sum_{k=1}^{N}\int_0^T\mathbf{A}(\tau)\int_0^\tau\mathbf{A}(\tau)\ldots\int_0^T\mathbf{A}(\tau)d\tau\ldots d\tau,$$

причем доказано, что норма отброшенного бесконечного числа членов не превышает числа

$$e^{MT}-\left[\sqrt{2}+\sum_{k=1}^{N}\frac{(MT)^k}{k!}\right].$$

Таким образом, сумму ряда в (4) можно оборвать и с помощью конечного числа математических действий приближенно с оценкой погрешности вычислить матрицу монодромии.

3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КОНТУРА

Допустим матрица монодромии известна

$$X(T)=\begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Тогда составляется характеристическое уравнение и находятся его корни

$$\det\left[\mathbf{X}(T)-\lambda\mathbf{I}\right]=0,$$

$$\det\begin{bmatrix} x_1^{(1)}-\lambda & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)}-\lambda \end{bmatrix}=0.$$

$$(x_1^{(1)}-\lambda)(x_2^{(2)}-\lambda)-x_2^{(1)}x_1^{(2)}=$$
$$=\lambda^2-(x_1^{(1)}+x_2^{(2)})\lambda+x_1^{(1)}x_2^{(2)}-x_2^{(1)}x_1^{(2)}=0.$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{x_1^{(1)}+x_2^{(2)}}{2}\pm$$
$$\pm\sqrt{\frac{(x_1^{(1)}+x_2^{(2)})^2}{4}-x_1^{(1)}x_2^{(2)}+x_2^{(1)}x_1^{(2)}}=$$
$$=\frac{x_1^{(1)}+x_2^{(2)}}{2}\pm\sqrt{\frac{(x_1^{(1)}-x_2^{(2)})^2}{4}+x_2^{(1)}x_1^{(2)}}.$$

Здесь λ_1 и λ_2 – мультипликаторы. Если их модули, $|\lambda_1|<1$, $|\lambda_2|<1$, меньше единицы, то контур устойчив, если хотя бы один из этих модулей больше единицы, то контур неустойчив. Может быть особый случай, когда один из этих модулей равен единице, а другой меньше единицы. Тогда требуются дополнительные исследования. Применительно к параметрическому контуру особый случай интереса не представляет.

Случай, когда в бесконечной сумме удерживается только два первых слагаемых в математической литературе [4] рассмотрен особо. Оказалось, что он удобен для дифференциальной системы (2), (3) с малым параметром. Тогда усеченная сумма (4) имеет вид

$$\mathbf{X}(T,\tau_0)=\mathbf{I}+\varepsilon\int_{\tau_0}^{T}\mathbf{A}(\tau)d\tau. \qquad (5)$$

Для этого случая доказана весьма удобная для практического применения теорема 20 [4, с. 467]. Приведем ее формулировку с незначительными изменениями применительно к нашей дифференциальной системе (2), (3). Теорема справедлива для матрицы $\acute{\mathbf{A}}(\tau)$ в (3) любого порядка, $n\times n$.

Теорема. Периодическая дифференциальная система (3) с периодом T и малым положительным параметром ε устойчива, если вещественные части характеристических чисел матрицы

$$\overline{\mathbf{A}}=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\mathbf{A}(\tau)d\tau \qquad (6)$$

отрицательны, и неустойчива, если среди них имеются числа с положительной вещественной частью.

Теорема имеет чисто математический характер. Имеет смысл рассмотреть ее применение по отношению к реальному физическому объекту, нашему контуру. Но прежде заметим, что в математической монографии [5, с. 159] доказан *принцип линейного включения*, утверждающий, что конкретное решение любого нелинейного дифференциального уравнения (в общем случае, векторного) может быть *точно* воспроизведено в линейном дифференциальном уравнении (в общем случае, с переменными коэффициентами). С позиций этого принципа представляет интерес параметрический контур общего вида, т. е. со всеми изменяющимися во времени параметрами. В реальных условиях параметры контура изменяются во времени по функциям, аналитическое представление которых дать затруднительно, поэтому принято их аппроксимировать либо функцией

$$P(t)=P_0[1+m_P\cos(\Omega t+\varphi_P)],$$

либо функцией

$$P(t)=\frac{P_0}{1+m_P\cos(\Omega t+\varphi_P)},\ m_P<1.$$

Зададим следующие аппроксимации параметров контура:

$$C = \frac{C_0}{1 + m_C \cos(\Omega t + \varphi_C)},$$

$$G = G_0[1 + m_G \cos(\Omega t + \varphi_G)],$$

$$L = \frac{L_0}{1 + m_L \cos(\Omega t + \varphi_L)},$$

$$R = R_0[1 + m_R \cos(\Omega t + \varphi_R)].$$

В безразмерном времени $\tau = \dfrac{t}{t_M}$ получится, например,

$$m_C \cos(\Omega t + \varphi_C) = m_C \cos(\Omega t_M \tau + \varphi_C).$$

Выберем $t_M = \dfrac{1}{\Omega}$, тогда

$$m_C \cos(\Omega t + \varphi_C) = m_C \cos(\tau + \varphi_C).$$

В таком случае, элементы матрицы $\mathbf{A}(\tau)$ в (3) примут вид:

$$a_{11} = -\frac{G_0}{\Omega C_0}\left[1 + \frac{m_G m_C}{2}\cos(\varphi_G - \varphi_C) + m_G \cos(\tau + \varphi_G) + m_C \cos(\tau + \varphi_C) + \frac{m_G m_C}{2}\cos(2\tau + \varphi_G + \varphi_C)\right],$$

$$a_{12} = -\frac{r}{\Omega L_0}[1 + m_L \cos(\tau + \varphi_L)],$$

$$a_{21} = \frac{1}{\Omega C_0 r}[1 + m_C \cos(\tau + \varphi_C)],$$

$$a_{22} = -\frac{R_0}{\Omega L_0}\left[1 + \frac{m_R m_L}{2}\cos(\varphi_R - \varphi_L) + m_R \cos(\tau + \varphi_R) + m_L \cos(\tau + \varphi_L) + \frac{m_R m_L}{2}\cos(2\tau + \varphi_R + \varphi_L)\right].$$

Элементы усредненной матрицы $\overline{\mathbf{A}}$, очевидно, равны

$$\overline{a_{11}} = -\frac{G_0}{\Omega C_0}\left[1 + \frac{m_G m_C}{2}\cos(\varphi_G - \varphi_C)\right],$$

$$\overline{a_{12}} = -\frac{r}{\Omega L_0},\ \overline{a_{21}} = \frac{1}{\Omega C_0 r}, \tag{7}$$

$$\overline{a_{22}} = -\frac{R_0}{\Omega L_0}\left[1 + \frac{m_R m_L}{2}\cos(\varphi_R - \varphi_L)\right].$$

Собственные значения матрицы $\overline{\mathbf{A}}$ определяются по формуле

$$\det\begin{pmatrix} \overline{a_{11}} - \lambda & \overline{a_{12}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Это – квадратное алгебраическое уравнение

$$(\overline{a_{11}} - \lambda)(\overline{a_{22}} - \lambda) - \overline{a_{12}}\,\overline{a_{21}} = \lambda^2 - (\overline{a_{11}} + \overline{a_{22}})\lambda + \overline{a_{11}}\,\overline{a_{22}} - \overline{a_{12}}\,\overline{a_{21}} = 0.$$

Его корни:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\overline{a_{11}} + \overline{a_{22}}}{2} \pm \sqrt{\frac{(\overline{a_{11}} - \overline{a_{22}})^2}{4} + \overline{a_{12}}\,\overline{a_{21}}}.$$

Критерием устойчивости являются неравенства:

$$\operatorname{Re}\lambda_1 < 0,\ \operatorname{Re}\lambda_2 < 0.$$

В случае параметрического контура собственные значения матрицы $\overline{\mathbf{A}}$ уточняются с помощью выражений (7)

$$\lambda_1 = -\frac{G_0}{2\Omega C_0}\left[1 + \frac{m_G m_C}{2}\cos(\varphi_G - \varphi_C)\right] - \frac{R_0}{2\Omega L_0}\left[1 + \frac{m_R m_L}{2}\cos(\varphi_R - \varphi_L)\right] + j\sqrt{\frac{1}{\Omega^2 L_0 C_0} - \frac{1}{4}\left\{\frac{G_0}{\Omega C_0}\left[1 + \frac{m_G m_C}{2}\cos(\varphi_G - \varphi_C)\right] - \frac{R}{\Omega L_0}\left[1 + \frac{m_R m_L}{2}\cos(\varphi_R - \varphi_L)\right]\right\}^2},$$

$$\lambda_2 = -\frac{G_0}{2\Omega C_0}\left[1 + \frac{m_G m_C}{2}\cos(\varphi_G - \varphi_C)\right] - \frac{R_0}{2\Omega L_0}\left[1 + \frac{m_R m_L}{2}\cos(\varphi_R - \varphi_L)\right] - j\sqrt{\frac{1}{\Omega^2 L_0 C_0} - \frac{1}{4}\left\{\frac{G_0}{\Omega C_0}\left[1 + \frac{m_G m_C}{2}\cos(\varphi_G - \varphi_C)\right] - \frac{R}{\Omega L_0}\left[1 + \frac{m_R m_L}{2}\cos(\varphi_R - \varphi_L)\right]\right\}^2}.$$

Для малошумящих параметрических усилителей особый интерес представляет случай

$$\Omega = 2\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

В этом частном случае имеет место максимальный риск самовозбуждения параметрического контура.

ВЫВОДЫ

Предложен простой метод анализа устойчивости параметрического контура с помощью первого метода Ляпунова. Введение малого параметра упрощает анализ, но и сужает область его применимости, поскольку в бесконечной сумме в (4) использованы только два первых слагаемых. Имеется возможность уточнить метод, без введения малого параметра расширить область его применимости. Для этого потребуется учесть большее число слагаемых суммы в (4). При этом громоздкость преобразований увеличится, однако не потребуется решать дифференциальные уравнения. В монографии [6] рассмотрены параметрические цепи с матрицей коэффициентов уравнений, более высокого порядка. Для них может быть применен предлагаемый здесь метод анализа устойчивости. Громоздкость вычисления интегралов может быть преодолена с помощью компьютерного анализа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Академик *Ляпунов А. М.* Собрание сочинений / А. М. Ляпунов. – Т. 2. – М.-Л. : Издательство АН СССР, 1956. – 472 с.
2. *Демидович Б П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – М. : Издательство Московского университета ЧеРо, 1998. – 480 с.
3. *Якубович В. А.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В. А. Якубович, В. М. Старжинский. – М. : Наука, 1972. – 718 с.
4. *Еругин Н. П.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин, И. З. Штокало, П. С. Бондаренко и др. – Киев : Издательское объединение «Вища школа», 1974. – 471 с.
5. *Былов Б. Ф.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий. – М. : Наука, 1966. – 582 с.
6. *Бирюк Н. Д.* Основы теории параметрических радиоцепей / Н. Д. Бирюк, В. В. Юргелас. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012. – 345 с.

Бирюк Николай Данилович – доктор физико-математических наук, профессор физического факультета Воронежского государственного университета

Кривцов Алексей Юрьевич – старший инженер АО «Созвездие», г. Воронеж

Юргелас Владимир Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета

Birjuk Nikolay Danilovich – Doctor of Physical and mathematical sciences, professor of Physical faculty of Voronezh State University

Krivtsov Alexey Yurievich – charge engineer of Joint-stock Society «Constellation» of Voronezh

Yurgelas Vladimir Viktorovich – Candidate of Physical and mathematical sciences, reader of Faculty of Applied mathematics, informatics and mechanics of Voronezh State University