УДК 517.97 : 532.526

МЕТОД А. А. ДОРОДНИЦЫНА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОМАССООБМЕНОМ НА ПРОНИЦАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ В ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА

Н. Г. Бильченко

Казанский Национальный Исследовательский Технический Университет (КНИТУ-КАИ) им. А.Н.Туполева (г. Казань)

Поступила в редакцию 17.02.2016 г.

Аннотация. Рассматриваются задачи математического моделирования оптимальной тепловой защиты проницаемых цилиндрических и сферических поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов в потоке ионизированного газа. Применён теоретико-групповой подход к оптимизации систем с распределёнными параметрами. С помощью метода обобщённых интегральных соотношений А. А. Дородницына получены интегральные соотношения оптимально управляемого ламинарного пограничного слоя в электропроводящем газе. Приводятся аппроксимирующие системы второго приближения.
Ключевые слова: оптимальное управление, тепломассообмен, ламинарный пограничный слой, гиперзвуковые течения, ионизация, обобщенные интегральные соотношения, аппроксимирующая система.
Annotation. The hypersonic aircraft permeable cylindrical and spherical surfaces in ionized gas flow optimal heat protection mathematical modeling problems are considered. The Groups theory approach to distributed parameters systems optimization is applied. The integral relations of optimal controlled laminar boundary layer of electroconductive gas are obtained with the use of A. A. Dorodnitsyn's method of generalized integral relations. The second approximation systems are given.
Keywords: optimal control; heat and mass transfer; laminar boundary layer; hypersonic flows; ionization; generalized integral relations, approximating system.

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа представляет собой продолжение статей [1–4], в которых в рамках точных уравнений пограничного слоя вязкого сжимаемого электропроводящего газа при наличии магнитного поля были поставлены и решены задачи построения оптимальной тепловой защиты проницаемых цилиндрических [1–3] и сферических [3, 4] поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов, рассчитанных на вход в атмосферу. В качестве минимизируемого функционала выступает интегральный тепловой поток, передаваемый от пограничного слоя к криволинейной пористой стенке; в качестве ограничения – мощность системы охлаждения, определяемая с учётом фильтрационного закона Дарси; управляющим воздействием является удельный расход охладителя (газа того же состава, что и в набегающем потоке).

Следует учитывать, что при переходе через значения $M_\infty = 6$ и $M_\infty = 10$ (для случая атмосферы Земли) свойства газа существенно изменяются (см. таблицы 2 в [3, 4]), поэтому нужно для каждого диапазона скоростей применять соответствующую модель расчётов. Типы моделей (для высот до 30 км) приведены в таблице.

Таблица

Число Маха	Режим полёта	Тип сжимаемого газа	Метод полных (эффективных) коэффициентов	Электропроводность газа
$2,5 \le M_\infty < 6$	Сверхзвуковой	Совершенный	Не применяется	Отсутствует
$6 \le M_\infty < 10$	Гиперзвуковой	Равновесно диссоциирующий	Применяется	Отсутствует
$M_\infty \ge 10$	Гиперзвуковой	Ионизированный	Применяется	Присутствует

Таким образом, при $M_\infty \ge 10$ появляется дополнительная возможность управлять пограничным слоем с помощью магнитного поля.

С помощью метода обобщённых интегральных соотношений А. А. Дородницына [5], впервые применённого для оптимизации тепломассообмена в случае совершенного газа в работе [6], в работе [2] были получены интегральные соотношения (ИС) для системы уравнений ламинарного пограничного слоя ионизированного воздуха на проницаемой цилиндрической поверхности и ИС, соответствующие сопряжённой системе, а также аппроксимирующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго приближения, на базе решения которых, была построена последовательность значений минимизируемого функционала – интегрального теплового потока к обтекаемой поверхности.

В данной работе обсуждаются особенности постановок и алгоритмизации вариационных задач для случая цилиндрической и сферической поверхностей.

Располагая результатами вычислительных экспериментов по построению оптимального управления в аналитическом виде (в первом приближении) [3, 4] можно построить управления, близкие к оптимальным [7–9], учитывающие конструкторские и газодинамические ограничения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ НА ПРОНИЦАЕМЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Рассматривается задача оптимизации тепломассообмена в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа на проницаемой пористой цилиндрической поверхности при наличии магнитного поля. Постановка в физических переменных приведена в работе [3] (см. также [1]). С помощью последовательного применения преобразований [10] и [11] она приводится к *безразмерной форме* [1]:

1) исходная система принимает вид

$$\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{s}} + \overline{w}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{t}} = \beta\left(1-\psi-\overline{u}^2\right) + \frac{\partial R_1}{\partial \overline{t}} - $$
$$-A\left(\overline{s}\right)B^2\left(\overline{s};\overline{t}\right)\overline{u}\left(1-\psi-\alpha_e^2\overline{u}^2\right);$$
$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{s}} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{t}} = 0;$$
$$\overline{u}\frac{\partial \psi}{\partial \overline{s}} + \overline{w}\frac{\partial \psi}{\partial \overline{t}} =$$
$$= \frac{1}{\Pr}\frac{\partial R_2}{\partial \overline{t}} + \alpha_e^2\left(1-\frac{1}{\Pr}\right)\frac{\partial}{\partial \overline{t}}\left(b\left(\tau\right)\frac{\partial \overline{u}^2}{\partial \overline{t}}\right) -$$
$$-G\left(\overline{s}\right)B^2\left(\overline{s};\overline{t}\right)\overline{u}^2\left(1-\psi-\alpha_e^2\overline{u}^2\right);$$
$$R_1 = b\left(\tau\right)\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{t}};\;\; R_2 = b\left(\tau\right)\frac{\partial \psi}{\partial \overline{t}}, \qquad (1)$$

где

$$\overline{s} = \frac{1}{l}\int_0^x q\,dx,\;\; q = \alpha_e\varphi,\;\; \varphi = \left(1-\alpha_e^2\right)^{\gamma/\gamma-1},$$
$$\alpha_e = \frac{U_e}{V_{\max}},$$
$$A\left(\overline{s}\right) = \frac{K}{U_e^2},\;\; G\left(\overline{s}\right) = \frac{K}{h_{e0}},\;\; K = \frac{\sigma V_{\max}}{\rho_{e0}}\cdot\frac{l}{\varphi^2},$$

в свою очередь, γ – показатель адиабаты, l – характерный размер (в данном случае – радиус кругового цилиндра);

2) граничные условия к ней

$\overline{u} = 0$, $\overline{w} = m\left(\overline{s}\right)/q\left(\overline{s}\right)$, $\psi = 1-\tau_w$, при $\overline{t} = 0$;

$\overline{u} = 1$, $\psi = 0$, при $\overline{t} \to \infty$;

$\overline{u} = 1$, $\psi = 0$, при $\overline{s} = 0$; (2)

3) минимизируемый функционал (интегральный тепловой поток, передаваемый от пограничного слоя к обтекаемой поверхности)

$$\bar{Q} = -\int_0^{\bar{s}_k} b(\tau_w) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial \bar{t}} \right)_{\bar{t}=0} \cdot d\bar{s}\,; \qquad (3)$$

4) ограничение на мощность системы охлаждения

$$\bar{N} = \int_0^{\bar{s}_k} f \cdot (1-\psi_w)^2\, m^2 \cdot d\bar{s}\,. \qquad (4)$$

Здесь $f = \frac{1}{\alpha_e \varphi^3}$, $\bar{s}_k = \frac{1}{l}\int_0^{x_k} q dx$. В дальнейшем для простоты чёрточки над переменными $\bar{s}$, $\bar{t}$, $\bar{u}$, $\bar{w}$ опущены.

Вариационная задача (в безразмерном виде) ставится следующим образом: среди непрерывных управлений $m(s)$ требуется найти такое, которое реализует минимальное значение функционала (3) при связях (1), (2) и изопериметрическом условии (4).

Следует отметить, что при формулировке оптимальной задачи использовано свойство инвариантности вариационной задачи относительно замены переменных.

Для этой задачи (после подстановки

$$\lambda_4 = \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + 2\alpha_e^2 u \left(\frac{1}{\Pr} - 1 \right) \frac{\partial \lambda_3}{\partial t}, \quad \lambda_5 = \frac{1}{\Pr}\frac{\partial \lambda_3}{\partial t}$$

и упрощений) в [1] была получена *сопряжённая система*

$$2\beta u \lambda_1 + \lambda_3 \frac{\partial \psi}{\partial s} - u\frac{\partial \lambda_1}{\partial s} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial s} - w\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} - \lambda_1 \frac{\partial w}{\partial t} -$$
$$-b\left[\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial t^2} + 2\alpha_e^2 \left(1 - \frac{1}{\Pr} \right) u \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial t^2} \right] -$$
$$-2\alpha_e^2 u \frac{\partial b}{\partial \tau} \left\{ \left[\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + 2\alpha_e^2 \left(\frac{1}{\Pr} - 1 \right) u \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \right] \frac{\partial u}{\partial t} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\Pr}\frac{\partial \lambda_3}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial t} \right\} -$$
$$-\frac{\partial b}{\partial t}\left[\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + 2\alpha_e^2 \left(\frac{1}{\Pr} - 1 \right) u \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \right] +$$
$$+\lambda_1 A(s) B^2(s,t)\left(1 - \psi - 3\alpha_e^2 u^2\right) +$$
$$+2\lambda_3 G(s) B^2(s,t) u \left(1 - \psi - \alpha_e^2 u^2\right) = 0\,;$$

$$\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_3 \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} = 0\,;$$

$$\beta\lambda_1 - \frac{\partial b}{\partial \tau}\left\{ \left[\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + 2\alpha_e^2 u \left(\frac{1}{\Pr} - 1 \right) \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \right] \frac{\partial u}{\partial t} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\Pr}\frac{\partial \lambda_3}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial t} \right\} -$$
$$-\frac{\partial}{\partial s}(\lambda_3 u) - \frac{\partial}{\partial t}\left\{ \lambda_3 w + \frac{b}{\Pr}\frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \right\} -$$
$$-\lambda_1 A(s) B^2(s,t) u - \lambda_3 G(s) B^2(s,t) u^2 = 0\,. \quad (5)$$

Краевые условия для множителей Лагранжа имеют вид (вместо переменной t далее удобно (с учётом (2)) использовать переменную u):

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_3 = \Pr,\ \text{при}\ \ t = 0\ \ (\text{т. е. } u = 0);$$
$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0,\ \text{при}\ \ t \to \infty\ \ (\text{т. е. } u = 1);$$
$$\lambda_1 = \lambda_3 = 0,\ \text{при}\ s = s_k\,. \qquad (6)$$

В свою очередь, оптимальное управление имеет вид

$$m(s) = \frac{\varphi^2 \lambda_2(s,0)}{2\alpha \cdot (1-\psi_w)^2}, \qquad (7)$$

где α – коэффициент (множитель Лагранжа), определяемый (см. ниже) из изопериметрического условия (4).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ НА ПРОНИЦАЕМЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Рассматривается задача оптимизации тепломассообмена в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа на проницаемой пористой сферической поверхности при наличии магнитного поля. Постановка в физических переменных приведена в работах [3, 4]. С помощью преобразований [10, 12, 13] она приводится к безразмерному виду и совпадает по форме с формулами (1)–(4), за исключением того, что вместо q, K и f используются

$$q^* = \alpha_e \varphi \cdot \frac{r}{l},\ K^* = \frac{\sigma V_{\max}}{\rho_{e0}} \cdot \frac{l}{\varphi^2} \cdot \left(\frac{l}{r} \right)^2,$$
$$f^* = \frac{1}{\alpha_e \varphi^3} \cdot \frac{l}{r},$$

где l – радиус сферы. Формулировка вариационной задачи в безразмерном виде аналогична случаю цилиндрической поверхности.

3. АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Отыскание управления $m(s)$, минимизирующего интегральный тепловой поток (3), сводится к совместному интегрированию систем уравнений в частных производных (1) и (5) с краевыми условиями (2) и (6). Для решения задачи используются метод обобщённых интегральных соотношений А. А. Дородницына [5], хорошо зарекомендовавший себя в расчётах характеристик пограничного слоя сжимаемого газа [6, 14, 15], и следствие

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\Pr}\cdot\frac{\partial\lambda_3}{\partial t}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}=0 \qquad (8)$$

из первого интеграла

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\lambda_2 u\right]+\frac{\partial}{\partial t}\left[\lambda_2 w\right]+$$
$$+\left[2\alpha_e^2\left(1-\frac{1}{\Pr}\right)R_1\lambda_3+b(\tau)\lambda_4\right]\frac{\partial u}{\partial t}+$$
$$+\lambda_5 b(\tau)\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\lambda_3}{\Pr}\frac{\partial R_2}{\partial t}-$$
$$-\left[\lambda_1+2\alpha_e^2\lambda_3\left(\frac{1}{\Pr}-1\right)u\right]\frac{\partial R_1}{\partial t}=0 \qquad (9)$$

для сопряжённой системы (5), устанавливающее связь между градиентами множителей Лагранжа на произвольной поверхности, при любых числах Прандтля, произвольной зависимости вязкости от температуры.

Интегральные соотношения оптимально управляемого пограничного слоя в электропроводящем газе, соответствующие сопряжённой системе (5), имеют вид [2]:

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_0^1\left(\lambda_1+\lambda_3\theta H\right)\cdot du=$$
$$=\left[b\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial t^2}+w\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}+\frac{\partial b}{\partial t}\cdot\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}-\lambda_3\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]_{t=0}, \qquad (10)$$
$$\frac{\partial}{\partial s}\int_0^1\lambda_3 u\theta\cdot du=$$
$$=\beta_1\int_0^1\lambda_1\theta\cdot du+\left(\lambda_3 w+\frac{b}{\Pr}\cdot\frac{\partial\lambda_3}{\partial t}\right)_{t=0}-$$
$$-\int_0^1\left[\frac{\partial\lambda_1}{\partial u}+2\alpha_e^2 u\left(\frac{1}{\Pr}-1\right)\frac{\partial\lambda_3}{\partial u}\right]\frac{\overline{b}}{\theta}\cdot du-$$
$$-\frac{1}{\Pr}\int_0^1\frac{\partial\lambda_3}{\partial u}\overline{q}\cdot du-$$
$$-A(s)\cdot\int_0^1\lambda_1 B^2(s,u)u\theta\cdot du-$$
$$-G(s)\cdot\int_0^1\lambda_3 B^2(s,u)u^2\theta\cdot du, \qquad (11)$$

где $\overline{b}(\tau)=\dfrac{\partial b}{\partial\tau}$, $\overline{q}=\overline{b}(\tau)\dfrac{\partial\psi}{\partial t}$. Функции θ, H, $\overline{b}(\tau)/\theta$, $\overline{q}$ в (10), (11), в соответствии с методом обобщённых интегральных соотношений [5], представим в виде [11]:

$$\theta=\frac{1}{1-u}\cdot\left[\theta_0+\left(\theta_1-2\theta_0\right)u\right],$$
$$H=(1-u)\cdot\left[H_0+2\left(2\theta_1-\theta_0\right)u\right],$$
$$\frac{\overline{b}}{\theta}=(1-u)\cdot\left[\frac{\overline{b}_0}{\theta_0}+2\left(2\frac{\overline{b}_1}{\theta_1}-\frac{\overline{b}_0}{\theta_0}\right)u\right],$$
$$\overline{q}=(1-u)\cdot\left[\overline{q}_0+2\left(2\overline{q}_1-\overline{q}_0\right)u\right],$$
$$B^2=(1-u)\cdot B_0^2, \qquad (12)$$

соответствующем аппроксимирующей системе второго приближения для исходных уравнений (1) с краевыми условиями (2), что вполне отвечает требованиям точности (погрешность вычисления характеристик пограничного слоя не превышает 1 %). Здесь

$$H_0=\frac{1}{\theta_0}\left(-3\frac{\omega_0}{\theta_0}+4\frac{\omega_1}{\theta_1}\right),\ H_1=-\frac{1}{\theta_1}\frac{\omega_0}{\theta_0},$$
$$\overline{q}_0=\overline{b}_0 H_0,\ \overline{q}_1=\overline{b}_1 H_1,\ \overline{b}_0=\left(\frac{\partial b}{\partial\tau}\right)_{u=0},$$
$$\overline{b}_1=\left(\frac{\partial b}{\partial\tau}\right)_{u=\frac{1}{2}}.$$

Тогда функции θ_0, θ_1, ω_0, ω_1 удовлетворяют следующей системе уравнений (удобнее переписать *аппроксимирующую систему* в нормальной форме Коши относительно независимой переменной $\overline{x}=x/l$; штрих означает дифференцирование по $\overline{x}$) [2]:

$$\theta_0'=18m-6\beta q\left[\frac{9}{6}\theta_0+\frac{7}{6}\theta_1-\frac{4}{3}\omega_0-\frac{5}{3}\omega_1\right]+$$
$$+\frac{34b_0q}{\theta_0}-\frac{32b_1q}{\theta_1}+$$

$$+6AB_0^2q\left\{\theta_0\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{60}\alpha_e^2\right)+\right.$$
$$\left.+\theta_1\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{15}\alpha_e^2\right)-\frac{2}{15}\omega_0-\frac{11}{30}\omega_1\right\};$$
$$\theta_1'=12m-12\beta q\left[\frac{1}{3}\theta_0+\frac{1}{2}\theta_1-\frac{1}{3}\omega_0-\frac{2}{3}\omega_1\right]+$$
$$+\frac{20b_0q}{\theta_0}-\frac{16b_1q}{\theta_1}+$$
$$+24AB_0^2q\left\{\frac{1}{60}\alpha_e^2\theta_0+\theta_1\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{30}\alpha_e^2\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{60}\omega_0-\frac{1}{15}\omega_1\right\};$$
$$\omega_0'=\left(1-\tau_w\right)\theta_0'-\tau_w'\theta_0;$$
$$\omega_1'=6m\frac{\omega_0}{\theta_0}-$$
$$-6\beta q\left[\frac{1}{6}\omega_0+\frac{1}{2}\omega_1-\frac{1}{6}\frac{\omega_0^2}{\theta_0}-\frac{2}{3}\frac{\omega_1^2}{\theta_1}\right]+\frac{6b_0\omega_0q}{\theta_0^2}+$$
$$+6q\left(\frac{1}{\Pr}+1\right)\left[\frac{1}{6}\frac{b_0}{\theta_0}\left(-3\frac{\omega_0}{\theta_0}+4\frac{\omega_1}{\theta_1}\right)-\frac{2}{3}\frac{b_1}{\theta_1}\frac{\omega_0}{\theta_0}\right]-$$
$$-\frac{6qb_0}{\Pr\theta_0}\left(-3\frac{\omega_0}{\theta_0}+4\frac{\omega_1}{\theta_1}\right)+4\alpha_e^2q\left(\frac{1}{\Pr}-1\right)\frac{b_1}{\theta_1}+$$
$$+6AB_0^2q\left\{\frac{1}{60}\alpha_e^2\omega_0+\omega_1\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{15}\alpha_e^2\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{60}\frac{\omega_0^2}{\theta_0}-\frac{2}{15}\frac{\omega_1^2}{\theta_1}\right\}+$$
$$+6GB_0^2q\left\{\theta_0\left(\frac{1}{60}-\frac{1}{70}\alpha_e^2\right)+\right.$$
$$\left.+\theta_1\left(-\frac{1}{20}+\frac{1}{42}\alpha_e^2\right)+\frac{1}{30}\omega_1\right\}. \qquad (13)$$

Полученные для произвольной зависимости вязкости от температуры уравнения (13) существенно упрощаются в линейном случае.

В малой окрестности точки торможения решение системы (13) согласно работе [11] будем искать (как в [6]) в виде:

$$\theta_0=\bar\theta_0\bar x_0,\ \ \theta_1=\bar\theta_1\bar x_0,\ \ \omega_0=\bar\omega_0\bar x_0,\ \ \omega_1=\bar\omega_1\bar x_0. \qquad (14)$$

В соответствии с [16, 17], в окрестности точки торможения потока $q\approx\alpha_e=C\bar x$, где $C=\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(1-\frac{P_\infty}{P_{e0}}\right)}$, $\beta q\approx\frac{\alpha_e'}{\alpha_e}=\frac{1}{\bar x}$. Следовательно, подставляя (14) в (13), для постоянных $\bar\theta_0$, $\bar\theta_1$, $\bar\omega_0$, $\bar\omega_1$ получим *алгебраическую систему*:

$$\bar\theta_0=18m(0)-9\bar\theta_0-7\bar\theta_1+8\bar\omega_0+$$
$$+10\bar\omega_1+\frac{34b_0(0)C}{\bar\theta_0}-\frac{32b_1(0)C}{\bar\theta_1}+$$
$$+\frac{1}{5}C_0B_0^2\left(5\bar\theta_0+10\bar\theta_1-4\bar\omega_0-11\bar\omega_1\right);$$
$$\bar\theta_1=12m(0)-4\bar\theta_0-6\bar\theta_1-4\bar\omega_0+8\bar\omega_1+$$
$$+\frac{20b_0(0)C}{\bar\theta_0}-\frac{16b_1(0)C}{\bar\theta_1}+$$
$$+\frac{2}{5}C_0B_0^2\left(5\bar\theta_1-\bar\omega_0-4\bar\omega_1\right);$$
$$\bar\omega_0=\left(1-\tau_w(0)\right)\bar\theta_0;$$
$$\bar\omega_1=6m(0)\frac{\bar\omega_0}{\bar\theta_0}-\bar\omega_0-3\bar\omega_1+$$
$$+\frac{\bar\omega_0^2}{\bar\theta_0}+4\frac{\bar\omega_1^2}{\bar\theta_1}+\frac{6b_0(0)\bar\omega_0C}{\bar\theta_0^2}+$$
$$+6C\left(\frac{1}{\Pr}+1\right)\left[\frac{1}{6}\frac{b_0(0)}{\bar\theta_0}\left(-3\frac{\bar\omega_0}{\bar\theta_0}+4\frac{\bar\omega_1}{\bar\theta_1}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{3}\frac{b_0(0)}{\bar\theta_1}\frac{\bar\omega_0}{\bar\theta_0}\right]-\frac{6Cb_0(0)}{\Pr\bar\theta_0}\left(-3\frac{\bar\omega_0}{\bar\theta_0}+4\frac{\bar\omega_1}{\bar\theta_1}\right)+$$
$$+\frac{1}{10}B_0^2C_0\left(10\bar\omega_1-\frac{\bar\omega_0^2}{\bar\theta_0}-8\frac{\bar\omega_1^2}{\bar\theta_1}\right), \qquad (15)$$

где $C_0=\frac{\sigma V_{\max}l}{\rho_{e0}h_{e0}}C$.

Для построения оптимального управления аппроксимации для множителей Лагранжа $\lambda_1(s,u)$ и $\lambda_3(s,u)$ возьмём в виде [6, 18, 19]:

$$\lambda_1(s,u)=u\cdot(1-u)\cdot\left(A_0+A_1u\right),$$
$$\lambda_3(s,u)=u\cdot(1-u)\cdot\left(B_0+B_1u\right), \qquad (16)$$

где функции $A_0(s)$, $A_1(s)$, $B_0(s)$, $B_1(s)$ определяются интегральными соотношениями (10), (11), граничным условием $\lambda_3(s,0)=\Pr$ и следствием из первого интеграла (8). В частности, для B_0 получим:

$$B_0=\begin{cases}\Pr, & 0\le s<s_k;\\ 0, & s=s_k.\end{cases}$$

Граничные условия (6) для аппроксимаций (16) выполнены при $t=0$ $(u=0)$ и $t=\infty$ $(u=1)$; для удовлетворения начальному условию $\lambda_1(s_k,u)=\lambda_3(s_k,u)=0$ следует положить $A_0(s_k)=A_1(s_k)=B_1(s_k)=0$.

Из следствия (8) из первого интеграла (9) получим

$$A_0=\frac{\theta_0 H_0}{\Pr}(B_0-B_1). \qquad (17)$$

Подставляя (16) в (10) и (11), с учётом (17), после преобразований получим систему (штрих означает дифференцирование по $\bar{x}$):

$$A'=12\left\{A_1\left(Q-\frac{VN}{U}\right)+\right.$$
$$+B_1\left[R-N'+\frac{N}{U}(U'-S)\right]+$$
$$\left.+B_0\left[P-M'+\frac{N}{U}(Z'-W)\right]+B_0'\left(\frac{ZN}{U}-M\right)\right\};$$
$$B'=\frac{1}{U}\left\{A_1V+B_1(S-U')+\right.$$
$$\left.+B_0(W-Z')-B_0'Z\right\}. \qquad (18)$$

Здесь

$$M=l_0\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6\Pr}\right)+\frac{l_1}{6},\ \ N=\frac{l_0}{6}\left(\frac{1}{\Pr}-1\right)+\frac{l_1}{12},$$
$$P=\frac{l_0}{\Pr}\left[\frac{2m}{\theta_0}-\beta q\left(1-\frac{\omega_0}{\theta_0}\right)-\frac{2q}{\theta_0^2}\right]-\frac{d}{d\bar{x}}\left(\frac{\omega_0}{\theta_0}\right),$$
$$Q=\frac{2q}{\theta_0^2},\ \ R=-P-\frac{d}{d\bar{x}}\left(\frac{\omega_0}{\theta_0}\right),$$
$$Z=-\frac{\theta_0}{6}+\frac{\theta_1}{3},\ \ U=-\frac{\theta_0}{6}+\frac{\theta_1}{4},$$
$$V=\beta qU-B_0^2Aq\left(-\frac{1}{60}\theta_0+\frac{1}{30}\theta_1\right),$$
$$W=m-\frac{q}{\Pr\theta_0}+\frac{l_0\beta q}{\Pr}Z-$$
$$-B_0^2q\left(-\frac{1}{60}\theta_0+\frac{1}{20}\theta_1\right)\left(\frac{l_0}{\Pr}A+G\right),$$
$$S=\frac{l_0}{\Pr}\beta q\left(-\frac{\theta_0}{6}+\frac{\theta_1}{3}\right)+\frac{q}{\Pr\theta_0}+$$
$$+B_0^2Aq\frac{l_0}{\Pr}\left(-\frac{1}{60}\theta_0+\frac{1}{20}\theta_1\right)-$$
$$-B_0^2Gq\left(-\frac{1}{60}\theta_0+\frac{1}{30}\theta_1\right),$$
$$l_0=-3\frac{\omega_0}{\theta_0}+4\frac{\omega_1}{\theta_1},\ \ l_1=4\left(\frac{\omega_0}{\theta_0}-2\frac{\omega_1}{\theta_1}\right). \qquad (19)$$

Начальные условия:

$$A_1(\bar{x}_k)=B_1(\bar{x}_k)=0.$$

Отметим, что в точке $\bar{x}=\bar{x}_k$ функция B_0' обращается в бесконечность, а $B_0(\bar{x})$, $A_1(\bar{x})$ и $B_1(\bar{x})$ терпят конечные разрывы. Для того, чтобы систему (18) проинтегрировать численно, её решение будем искать в виде [6]:

$$A_1=a_1B_0+F,\ \ B_1=b_1B_0+\Phi, \qquad (20)$$

где a_1, F, b_1, Φ – неизвестные функции. Подставляя (20) в (18), получим

$$a_1=-12(M+b_1N),\ \ b_1=-Z/U; \qquad (21)$$

функции $F(\bar{x})$, $\Phi(\bar{x})$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (по форме совпадающей с полученной в [6] для совершенного газа):

$$F'=12\left\{F\left(Q-\frac{VN}{U}\right)+\right.$$
$$\left.+\Phi\left[R-N'+\frac{N}{U}(U'-S)\right]\right\}+$$
$$+12B_0\left\{12\left(\frac{ZN}{U}-M\right)\left(Q-\frac{VN}{U}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{Z}{U}\left(\frac{SN}{U}-R\right)+P-\frac{NW}{U}\right\};$$
$$\Phi'=\frac{1}{U}\left\{FV-\Phi(S-U')+\right.$$
$$\left.+B_0\left[W+12V\left(\frac{ZN}{U}-M\right)-\frac{ZS}{U}\right]\right\}, \qquad (22)$$

с начальными условиями:

$$F(\bar{x}_k)=\Phi(\bar{x}_k)=0. \qquad (23)$$

В точке x_k функции $F(\bar{x})$ и $\Phi(\bar{x})$ непрерывны, так как в ней все коэффициенты при искомых функциях являются непрерывными функциями, а функция $B_0(\bar{x})$ терпит разрыв только первого рода.

Для построения оптимального управления необходимо совместно интегрировать системы обыкновенных дифференциальных уравнений (13) и (22), имеющие особенности в точке торможения. Для упрощения этой задачи раздельно интегрируются – сначала система (13) с начальными условиями:

$$\theta_0\left(\bar{x}_0\right)=\bar{\theta}_0\bar{x}_0, \quad \theta_1\left(\bar{x}_0\right)=\bar{\theta}_1\bar{x}_0,$$
$$\omega_0\left(\bar{x}_0\right)=\bar{\omega}_0\bar{x}_0, \ \omega_1\left(\bar{x}_0\right)=\bar{\omega}_1\bar{x}_0, \qquad (24)$$

где $\bar{\theta}_0$, $\bar{\theta}_1$, $\bar{\omega}_0$, $\bar{\omega}_1$ определяются из системы (15), а затем – система (22) с начальными условиями (23).

Детализируем процесс получения первого приближения оптимального управления:

1. Зададим в качестве управления $m^{(0)}$ в нулевом приближении постоянный вдув ($m^{(0)} \equiv const$).

2. Из (15) определим $\bar{\theta}_0$, $\bar{\theta}_1$, $\bar{\omega}_0$, $\bar{\omega}_1$.

3. Систему (13) интегрируем (слева - направо) с условиями (24).

4. Найдём значение $\bar{N}$, соответствующее $m^{(0)}$:

$$\bar{N}=\int_0^{\bar{x}_k}\left(m^{(0)}\right)^2\cdot\frac{\left(1-\omega_0/\theta_0\right)^2}{\varphi^2}\cdot d\bar{x}. \qquad (25)$$

5. Систему (22) интегрируем (справа – налево) с условиями (23).

6. Строим

$$\lambda_2\left(\bar{x},0\right)=-\left(\frac{F}{12}+N\Phi\right). \qquad (26)$$

7. Множитель Лагранжа α вычислим согласно изопериметрическому условию (4):

$$2\alpha=\left(\frac{1}{\bar{N}}\cdot\int_0^{\bar{x}_k}\frac{\varphi^2\lambda_2^2\left(\bar{x},0\right)}{\left(1-\omega_0/\theta_0\right)^2}\cdot d\bar{x}\right)^{1/2}, \qquad (27)$$

8. Найдём первое приближение оптимального управления по формуле:

$$m^{(1)}\left(\bar{x}\right)=\frac{\varphi^2\lambda_2\left(\bar{x},0\right)}{2\alpha\cdot\left(1-\omega_0/\theta_0\right)^2}. \qquad (28)$$

4. ОСОБЕННОСТИ АЛГОРИТМИЗАЦИИ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Уравнения Эйлера–Лагранжа–Остроградского и условия трансверсальности для сферической поверхности по форме совпадают с приведёнными в п. 1 для цилиндрического случая. Оптимальное управление определяется по формуле (7). Сохраняются (по форме) также следствие из первого интеграла (8) и интегральные соотношения (10), (11).

Аппроксимирующая система второго приближения здесь имеет вид:

$$\theta_0'=18m\bar{r}-6\beta\bar{q}\left[\frac{9}{6}\theta_0+\frac{7}{6}\theta_1-\frac{4}{3}\omega_0-\frac{5}{3}\omega_1\right]+$$
$$+\frac{34b_0\bar{q}}{\theta_0}-\frac{32b_1\bar{q}}{\theta_1}+6AB_0^2\bar{q}\left\{\theta_0\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{60}\alpha_e^2\right)+\right.$$
$$\left.+\theta_1\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{15}\alpha_e^2\right)-\frac{2}{15}\omega_0-\frac{11}{30}\omega_1\right\};$$
$$\theta_1'=12m\bar{r}-12\beta\bar{q}\left[\frac{1}{3}\theta_0+\frac{1}{2}\theta_1-\frac{1}{3}\omega_0-\frac{2}{3}\omega_1\right]+$$
$$+\frac{20b_0\bar{q}}{\theta_0}-\frac{16b_1\bar{q}}{\theta_1}+24AB_0^2q\left\{\frac{1}{60}\alpha_e^2\theta_0+\right.$$
$$\left.+\theta_1\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{30}\alpha_e^2\right)-\frac{1}{60}\omega_0-\frac{1}{15}\omega_1\right\};$$
$$\omega_0'=\left(1-\tau_w\right)\theta_0'-\tau_w'\theta_0;$$
$$\omega_1'=6m\bar{r}\frac{\omega_0}{\theta_0}-$$
$$-6\beta\bar{q}\left[\frac{1}{6}\omega_0+\frac{1}{2}\omega_1-\frac{1}{6}\frac{\omega_0^2}{\theta_0}-\frac{2}{3}\frac{\omega_1^2}{\theta_1}\right]+\frac{6b_0\omega_0\bar{q}}{\theta_0^2}+$$
$$+6\bar{q}\left(\frac{1}{\Pr}+1\right)\left[\frac{1}{6}\frac{b_0}{\theta_0}\left(-3\frac{\omega_0}{\theta_0}+4\frac{\omega_1}{\theta_1}\right)-\frac{2}{3}\frac{b_1}{\theta_1}\frac{\omega_0}{\theta_0}\right]-$$
$$-\frac{6\bar{q}b_0}{\Pr\theta_0}\left(-3\frac{\omega_0}{\theta_0}+4\frac{\omega_1}{\theta_1}\right)+4\alpha_e^2\bar{q}\left(\frac{1}{\Pr}-1\right)\frac{b_1}{\theta_1}+$$
$$+6AB_0^2\bar{q}\left\{\frac{1}{60}\alpha_e^2\omega_0+\omega_1\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{15}\alpha_e^2\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{60}\frac{\omega_0^2}{\theta_0}-\frac{2}{15}\frac{\omega_1^2}{\theta_1}\right\}+6GB_0^2\bar{q}\left\{\theta_0\left(\frac{1}{60}-\frac{1}{70}\alpha_e^2\right)+\right.$$
$$\left.+\theta_1\left(-\frac{1}{20}+\frac{1}{42}\alpha_e^2\right)+\frac{1}{30}\omega_1\right\}, \qquad (29)$$

где $\bar{r}=r/l$, $\bar{q}=\bar{r}q^*$. Отметим, что уравнения (29), как и (13), получены для любой зависимости вязкости от температуры.

В малой окрестности точки торможения решение системы (29) будем искать в виде [13]:

$$\theta_0=\bar{\theta}_0\bar{x}_0^2, \ \theta_1=\bar{\theta}_1\bar{x}_0^2, \ \omega_0=\bar{\omega}_0\bar{x}_0^2, \ \omega_1=\bar{\omega}_1\bar{x}_0^2. \ (30)$$

В этой окрестности $\bar{r}\approx\bar{x}$, $\bar{q}\approx C\bar{x}^3$, где постоянная C такая же, как в случае цилиндрической поверхности. *Алгебраическая система* для постоянных $\bar{\theta}_0$, $\bar{\theta}_1$, $\bar{\omega}_0$, $\bar{\omega}_1$ имеет вид:

$$18m(0)-11\bar{\theta}_0-7\bar{\theta}_1+8\bar{\omega}_0+10\bar{\omega}_1+$$
$$+\frac{34b_0(0)C}{\bar{\theta}_0}-\frac{32b_1(0)C}{\bar{\theta}_1}+$$
$$+C_0B_0^2\left(\bar{\theta}_0+2\bar{\theta}_1-\frac{4}{5}\bar{\omega}_0-\frac{11}{5}\bar{\omega}_1\right)=0;$$
$$12m(0)-4\bar{\theta}_0-8\bar{\theta}_1-4\bar{\omega}_0+8\bar{\omega}_1+$$
$$+\frac{20b_0(0)C}{\bar{\theta}_0}-\frac{16b_1(0)C}{\bar{\theta}_1}+$$
$$+\frac{2}{5}C_0B_0^2\left(5\bar{\theta}_1-\bar{\omega}_0-4\bar{\omega}_1\right)=0;$$
$$\bar{\omega}_0-\left(1-\tau_w\left(0\right)\right)\bar{\theta}_0=0;$$
$$6m(0)\frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0}-\bar{\omega}_0-5\bar{\omega}_1+\frac{\bar{\omega}_0^2}{\bar{\theta}_0}+$$
$$+4\frac{\bar{\omega}_1^2}{\bar{\theta}_1}+\frac{6b_0(0)\bar{\omega}_0C}{\bar{\theta}_0^2}+$$
$$+6C\left(\frac{1}{\Pr}+1\right)\left[\frac{1}{6}\frac{b_0(0)}{\bar{\theta}_0}\left(-3\frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0}+4\frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\theta}_1}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{3}\frac{b_0(0)}{\bar{\theta}_1}\frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0}\right]-\frac{6Cb_0(0)}{\Pr\bar{\theta}_0}\left(-3\frac{\bar{\omega}_0}{\bar{\theta}_0}+4\frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\theta}_1}\right)+$$
$$+B_0^2C_0\left(\bar{\omega}_1-\frac{1}{10}\frac{\bar{\omega}_0^2}{\bar{\theta}_0}-\frac{4}{5}\frac{\bar{\omega}_1^2}{\bar{\theta}_1}\right)=0. \qquad (31)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимирующая сопряжённую систему, по форме совпадает с (22). Приведём только отличающиеся от (19) вхождения

$$P=\frac{l_0}{\Pr}\left[\frac{2m}{\theta_0}\bar{r}-\beta\bar{q}\left(1-\frac{\omega_0}{\theta_0}\right)-\frac{2\bar{q}}{\theta_0^2}\right]-\frac{d}{d\bar{x}}\left(\frac{\omega_0}{\theta_0}\right),$$
$$Q=\frac{2\bar{q}}{\theta_0^2},\ V=\beta\bar{q}U-B_0^2A\bar{q}\left(-\frac{1}{60}\theta_0+\frac{1}{30}\theta_1\right),$$
$$W=m\bar{r}-\frac{\bar{q}}{\Pr\theta_0}+\frac{l_0\beta\bar{q}}{\Pr}Z-$$
$$-B_0^2\bar{q}\left(-\frac{1}{60}\theta_0+\frac{1}{20}\theta_1\right)\left(\frac{l_0}{\Pr}A+G\right),$$
$$S=\frac{l_0}{\Pr}\beta\bar{q}\left(-\frac{\theta_0}{6}+\frac{\theta_1}{3}\right)+\frac{\bar{q}}{\Pr\theta_0}+$$
$$+B_0^2A\bar{q}\frac{l_0}{\Pr}\left(-\frac{1}{60}\theta_0+\frac{1}{20}\theta_1\right)-$$
$$-B_0^2G\bar{q}\left(-\frac{1}{60}\theta_0+\frac{1}{30}\theta_1\right).$$

Процедура поиска оптимального управления аналогична схеме, приведённой в п. 3. В отличие от плоского случая:

1) начальные условия к системе (29) задаются в виде:

$$\theta_0\left(\bar{x}_0\right)=\bar{\theta}_0\bar{x}_0^2,\ \theta_1\left(\bar{x}_0\right)=\bar{\theta}_1\bar{x}_0^2,$$
$$\omega_0\left(\bar{x}_0\right)=\bar{\omega}_0\bar{x}_0^2,\ \omega_1\left(\bar{x}_0\right)=\bar{\omega}_1\bar{x}_0^2, \qquad (32)$$

где постоянные $\bar{\theta}_0$, $\bar{\theta}_1$, $\bar{\omega}_0$, $\bar{\omega}_1$ определяются из системы (31);

2) Вместо (27) используется формула

$$2\alpha=\left(\frac{1}{\bar{N}}\cdot\int_0^{\bar{x}_k}\bar{r}\cdot\frac{\varphi^2\lambda_2^2\left(\bar{x},0\right)}{\left(1-\omega_0/\theta_0\right)^2}\cdot d\bar{x}\right)^{1/2},$$

где вместо (25)

$$\bar{N}=\int_0^{\bar{x}_k}\bar{r}\cdot\left(m^{(0)}\right)^2\cdot\frac{\left(1-\omega_0/\theta_0\right)^2}{\varphi^2}\cdot d\bar{x}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аппроксимирующие системы второго приближения (13) и (29) позволяют вычислить аэродинамические характеристики ламинарного пограничного слоя электропроводящего газа с достаточной для практических приложений точностью и использовать их для минимизации интегрального теплового потока (3) с помощью «простых» [7] и «специальных» [8, 9] законов вдува. Применение таких законов в задачах управления гиперзвуковыми ламинарными пограничными слоями продемонстрировало возможность получить управления, очень близкие к оптимальным. Этот подход позволяет избежать трудоёмкого процесса вывода интегральных соотношений и системы обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимирующих сопряжённую систему. Анализу результатов вычислительных экспериментов по численной оптимизации тепломассообмена в ламинарном пограничном слое ионизированного воздуха на проницаемых цилиндрических и сферических поверхностях, подтверждающему целесообразность применения предложенного подхода, посвящено продолжение данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бильченко Н. Г.* К задаче оптимального управления пограничным слоем электропроводящей жидкости в магнитном поле / Н. Г. Бильченко, К. Г. Гараев, С. А. Дербенёв // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – 1994. – № 1. – С. 23–27.

2. *Bilchenko N. G., Garaev K. G.* On optimum control of laminar boundary layer of electroconductive gas by supersonic flow conditions // Proceedings of 12th NATIONAL HEAT TRANSFER CONFERENCE (UIT). L'Aquila, Italy. 1994. – P. 213–224.

3. *Бильченко Н. Г.* Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 83–94.

4. *Бильченко Н. Г.* Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2015. – № 1. – С. 5–8.

5. *Дородницын А. А.* Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя / А. А. Дородницын // Прикладная математика и техническая физика. – 1960. – № 3. – С. 111–118.

6. *Гараев К. Г.* Об оптимальном управлении тепломассообменом в ламинарном пограничном слое сжимаемого газа на проницаемых поверхностях / К. Г. Гараев // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1988. – № 3. – С. 92–100.

7. *Бильченко Н. Г.* Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения «простых» законов вдува. / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 95–102.

8. *Бильченко Н. Г.* Применение специальных законов вдува в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. VIII междунар. конф. «ПМТУКТ-2015» / под ред. И. Л. Батаронова, А. П. Жабко, В. В. Провоторова; Воронеж : Изд-во «Научная книга», 2015. – С. 61–64.

9. *Бильченко Г. Г., Бильченко Н. Г.* Сравнительный анализ применения некоторых специальных законов вдува в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых пористых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики»: Сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 16–18 декабря 2015 г. – Воронеж : Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2015. – С. 137–139.

10. *Дородницын А. А.* Ламинарный пограничный слой в сжимаемом газе / А. А. Дородницын // Сборник теоретических работ по аэродинамике. – М. : Оборонгиз, 1957. – С. 140–173.

11. *Лю Шэнь-Цюань.* Расчёт ламинарного слоя в сжимаемом газе при наличии отсоса или вдува / Лю Шэнь-Цюань // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1962. – Т. 2, № 5. – С. 868–883.

12. *Степанов Ю. Г.* Расчёт отрывного обтекания крылового профиля при малых скоростях на больших углах атаки / Ю. Г. Степанов // Труды ЦАГИ. – 1980. – Выпуск 2080. – С. 19–31.

13. *Гараев К. Г., Кусюмов А. Н., Павлов В. Г.* Об управлении температурой поверхности сферы, обтекаемой высокоскоростным потоком вязкого газа // Изв. ВУЗов. Авиационная техника. – 1987. – № 2. – С. 22–25.

14. *Башкин В. А.* Расчет уравнений пространственного ламинарного пограничного слоя методом интегральных соотношений // Журнал вычислит. матем. и мат. физики. – 1968. – Т. 8. – № 6. – С. 1280–1290.

15. *Павловский Ю. Н.* Численный расчет пограничного слоя в сжимаемом газе // Журнал вычислит. матем. и мат. физики. – 1962. – Т. 2. – № 5. – С. 884–901.

16. *Дракин И. И.* Аэродинамический и лучистый нагрев в полёте. – М. : Оборонгиз, 1961. – 96 с.

17. *Краснов Н. Ф.* Аэродинамика тел вращения. – М. : Машиностроение, 1964. – 572 с.

18. *Гараев К. Г.* Методы теории групп Ли преобразований в задаче редуцирования оптимальных процессов // Сложные системы управления: Труды семинара АН УССР. Институт кибернетики. Киев, 1978. – С. 18–27.

19. *Гараев К. Г., Овчинников В. А., Бильченко Н. Г.* Инвариантные вариационные задачи ламинарного пограничного слоя при различных режимах течения: Монография. – Казань : Изд-во КГТУ, 2003. – 123 с.

Бильченко Наталья Григорьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Теплотехники и Энергетического Машиностроения, Казанского Национального Исследовательского Технического Университета (КНИТУ-КАИ) им. А. Н. Туполева, Казань, Российская Федерация.
Тел.: +7-905-319-1842,
E-mail: bilchnat@gmail.com

Bilchenko Natalya Grigorievna – Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Heat Engineering and Power Engineering Machinery, Kazan National Research Technical University (KNRTU-KAI) named after A. N. Tupolev, Kazan, Russian Federation.
Tel.: +7-905-319-1842,
E-mail: bilchnat@gmail.com