УДК 519.81

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СБАЛАНСИРОВАННОСТИ ЗНАКОВОГО ГРАФА ЭКСПЕРТНОЙ ГРУППЫ

К. С. Погосян

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 13.04.2015 г.

Аннотация. В данной статье рассматриваются подходы к определению сбалансированности знакового графа экспертной группы. Предложен новый алгоритм определения сбалансированности знакового графа.
Ключевые слова: знаковый граф, сбалансированность знакового графа, группа экспертов, коалиции экспертов.
Annotation. This article is devoted to a few approaches of determining the signed graph balance for the group of experts. A new algorithm for determining the signed graph balance is proposed.
Keywords: signed graph, signed graph balance, group of experts, coalition of experts.

ВВЕДЕНИЕ

Технологическая сложность процесса управления, присущая современным системам управления, обусловлена возросшей сложностью объектов управления, необходимостью учета факторов неопределенности, большими объемами обрабатываемой информации – эти и другие факторы формируют особые требования к интеллектуальной составляющей процесса управления, делая более востребованными профессиональные знания и опыт специалистов-экспертов [1]. Обработке экспертной информации посвящено достаточно много исследований. Большое значение для принятия группового (коллективного) решения имеет проблема согласования индивидуальных суждений экспертов [2, 3, 4]. Очевидно, что согласованное групповое решение может быть получено группой экспертов, если в ней проявляется стремление к сотрудничеству и отсутствует напряженность. Экспертную группу можно отнести к малым группам и для ее анализа использовать понятие сбалансированности знакового неорграфа (далее графа) [5, 6, 7].

В качестве модели экспертной группы будем рассматривать *полный знаковый граф* $G=(E,W)$, где $E=\{e_1,..,e_m\}$ – множество вершин, каждая из которых соответствует эксперту, $W=\{(e_i,e_j)\in E\times E \mid i\neq j\}$ – множество ребер графа, причем ребро (e_i,e_j) помечается знаком «+», если оценки экспертов e_i и e_j являются согласованными, иначе – знаком «–».

Знаковые графы составляют основу когнитивного моделирования и называются когнитивными картам [8–12]. Также знаковый граф – это сигнальный (направленный) граф, в котором все ребра имеют вес +1 или –1. Сигнальные графы используются для исследования сложных электрических цепей и систем, в особенности систем с обратной связью [13, 14].

Полный знаковый граф экспертной группы E при необходимости также будем обозначать G_E. Наряду с полным графом G можно рассматривать подграфы данного графа (при анализе согласованности в суждениях, например, наиболее влиятельных экспертов), которые в общем случае не являются полными и связными.

Цель статьи заключается в разработке подходов к исследованию сбалансированности экспертной группы и выявлению коалиций на основе знаковых графов.

СВОЙСТВО СБАЛАНСИРОВАННОСТИ ЗНАКОВОГО ГРАФА

Заметим, что знак произвольной цепи и цикла в знаковом графе определяется произведением чисел +1 и −1, поставленных в соответствие положительным и отрицательным ребрам.

Для выявления свойства сбалансированности знакового графа используется *теорема о структуре* [6]:

Для знакового графа $G=\left(E,W\right)$ следующие утверждения эквивалентны:

1) граф G сбалансирован;

2) каждый цикл в G положителен;

3) любые две цепи между каждой парой вершин имеют одинаковый знак;

4) множество вершин G можно разбить на два подмножества таким образом, что каждое положительное ребро соединяет вершины одного множества и каждое отрицательное ребро соединяет вершины различных множеств.

На основе теоремы о структуре можно сформулировать несколько критериев сбалансированности знакового графа и соответствующие процедуры проверки данного свойства. Если граф не является сбалансированным, то важно определить степень нарушения баланса.

Определение 1. Пусть p – число положительных циклов, t – общее число циклов, тогда величина

$$\beta\left(G\right)=\frac{p}{t}\in\left[0,1\right]$$

называется *относительной мерой баланса* знакового графа [6].

Определение 2. Группа экспертов E будем считать *сбалансированной*, если соответствующий ей знаковый граф G_E сбалансирован.

Из теоремы о структуре следует, что экспертная группа будет сбалансированной, если оценки каждой пары экспертов являются согласованными, либо группу можно разбить на две подгруппы так, что в каждой подгруппе оценки являются согласованными, а для каждой пары экспертов из различных подгрупп оценки не согласованы.

Недостатком критериев сбалансированности, которые основаны на теореме о структуре, является то, что они позволяют говорить лишь о балансе или дисбалансе, игнорируя возможность градации сбалансированности.

Заметим, что если в связном знаковом графе все ребра положительны, то он удовлетворяет теореме о структуре, а разбиение состоит лишь из одного множества. Полный граф на m вершинах обозначается через K_m. Если все его ребра положительны, то примем обозначение K_m^+ и будем называть знаковый граф *абсолютно сбалансированным*.

Определение 3. Группу из m экспертов будем называть *абсолютно сбалансированной*, если соответствующий ей знаковый граф абсолютно сбалансированный $G_E=K_m^+$, т. е. G_E – полный граф с положительными ребрами.

На практике редко удается сформировать абсолютно сбалансированную группу экспертов, в связи с этим возникает необходимость в выявлении максимально сбалансированной (согласованной) подгруппы экспертов.

Введем различные типы сбалансированности знакового неорграфа $G=(E,W)$.

Определение 4. Если для множества вершин E знакового графа G можно построить разбиение

$$\left\{E_i\right\}_{i=\overline{1,K}}\left(\forall\, i,j=\overline{1,K}\ i\neq j:\left(E_i\cap E_j=\varnothing\right)\right.$$
$$\left.\text{и}\ \bigcup_{p=1}^{K}E_p=E\right)$$

такое, что все ребра, соединяющие вершины одного множества, положительны, а ребра, соединяющие вершины разных множеств отрицательны, то говорят, что *знаковый граф соответствует идеализированной партийной структуре* и называется *группируемым* [6].

По сути, идеализированная партийная структура представляет собой разбиение вершин знакового графа на классы, а, следовательно, можно построить отношение эквивалентности, которое индуцирует это разбиение. Заметим, что при $K=1$ знаковый граф является абсолютно сбалансированным, при $K=2$ – сбалансированным, при $K>2$ в соответствии с теоремой о структуре граф является несбалансированным. Таким образом, если граф сбалансированный, то он и группируемый.

Имеют место следующие утверждения:

Утверждение 1 [6]. Знаковый граф соответствует идеализированной партийной структуре тогда и только тогда, когда в нем нет простых циклов с единственным отрицательным ребром.

Утверждение 2 [6]. Если полный знаковый граф G соответствует идеализированной партийной структуре, то она единственна.

Определение 5. Будем говорить, что экспертная группа является *частично сбалансированной*, если ее знаковый граф соответствует идеализированной партийной структуре при $K>2$, при этом подмножества E_k будем называть *коалициями* экспертов.

Таким образом, если экспертная группа является частично сбалансированной, то в ней можно выделить коалиции экспертов, суждения которых между собой согласованы, в то время как групповые оценки между коалициями согласованными не являются. Разбиение экспертов на коалиции в частично сбалансированной экспертной группе в соответствии с утверждением 2 является единственным.

Если граф не является сбалансированным, то возникает вопрос: какие минимальные изменения знакового графа приведут его к сбалансированности? К возможным преобразованиям, которые позволяют обеспечить сбалансированность, можно отнести изменение знаков ребер и удаление некоторых ребер. В соответствии с этими преобразованиями в [6] вводятся понятия N-множества и D-множества.

Определение 6. Множество ребер связного знакового графа G называется N*-множеством*, если изменение знаков этих ребер приводит к сбалансированности графа G.

Определение 7. Множество ребер связного знакового графа G называется D*-множеством*, если удаление этих ребер из графа G приводит к его сбалансированности.

Определение 8. N-множество (D-множество) называется *минимальным*, если никакое его собственное подмножество не является N-множеством (D-множеством).

Определение 9. Реберным индексом $\lambda_r(G)$ знакового графа G называется число ребер в наименьшем N-множестве (D-множестве).

Пусть G_1, G_2 – два знаковых графа, определенных на одном и том же множестве вершин. Будем считать, что знаковый граф G_1 менее сбалансирован, чем G_2, если $\lambda_r(G_1) > \lambda_r(G_2)$.

Применительно к знаковому графу экспертной группы понятие N-множества можно использовать для разработки рекомендаций по изменению степени согласованности суждений для некоторых пар экспертов. Наименьшее N-множество – это множество тех пар экспертных оценок, которые обусловливают несбалансированность экспертной группы.

Можно показать, что каждое минимальное N-множество содержит минимальное D-множество и наоборот. Из этого следует, что если в знаковом графе у ребра (x, y) знак не определен, то выбор для него одного из знаков + или – приведет, по меньшей мере, к такой же величине меры баланса, как и удаление этого ребра.

Для определения коалиций экспертов частично сбалансированного полного графа G_E предлагается следующий *алгоритм 1*:

1. Для знакового графа G_E экспертной группы построить матрицу $R=\left(r_{ij}\right)_{i=\overline{1,m};\, j=\overline{1,m}}$ по правилу

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если ребро } \left(e_i, e_j\right) \text{ положительно;} \\ 1, \ i = j; \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Замечание: Матрица R учитывает только положительные ребра, является симметричной с единичной диагональю, а, следовательно, определяет рефлексивное и симметричное отношение.

2. Преобразовать матрицу R к блочно-диагональному виду путем перестановки строк и столбцов (на диагонали стоят блоки из 1). Каждая из диагональных подматриц соответствует коалиции – абсолютно сбалансированной подгруппе экспертов.

Замечание: Известно, что если R является отношением эквивалентности, т. е. рефлексивным, симметричным и транзитивным отношением, то его матрицу можно привести к блочно-диагональному виду, при этом блоки из 1 однозначно определяют классы эквивалентности [7]. В данном случае отношение эквивалентности определяется следующим образом: эксперты e_i и e_j эквивалентны, если их оценки являются согласованными.

3. Пусть K – количество блоков, тогда свойство сбалансированности определяется на основе следующих правил:

a) если $K=1,$ то группа экспертов является абсолютно сбалансированной;

b) если $K=2,$ то группа сбалансирована;

c) если $K>2,$ то группа частично сбалансированная.

4. Если не удается привести матрицу к блочно-диагональному виду, то группа экспертов является несбалансированной. В этом случае, возможно выделение N-множества. В N-множество включаются те ребра, изменение знака которых приведет матрицу к блочно-диагональному виду.

Определение 10. Вкладом эксперта $e_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ *в несбалансированность* графа G_E назовем величину

$$VE_i=\frac{CMR_i}{|N|},$$

где $|N|$ – мощность N-множества; CMR_i – количество ребер, инцидентных вершине e_i и входящих в N-множество.

Заметим, что если $VE_i=0,$ то эксперт не вносит никакого вклада в несбалансированность; если $VE_i=1,$ то в группе экспертов несогласованность возникла из-за эксперта e_i.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СБАЛАНСИРОВАННОСТИ ЗНАКОВОГО ГРАФА

Пусть G – знаковый граф экспертной группы. Для него можно рассматривать несколько видов матриц.

Определение 11. Матрицей смежности знакового графа G называется матрица $A=\left(a_{ij}\right)_{i=\overline{1,m};\,j=\overline{1,m}}$ порядка $m,$ элементы которой a_{ij} определяются следующим образом:

$$a_{ij}=\begin{cases}+1, & \text{если ребро } (i,j) \text{ помечено } +,\\ -1, & \text{если ребро } (i,j) \text{ помечено } -,\\ 0, & \text{инчае.}\end{cases}$$

Чтобы подчеркнуть связь с графом G в случае необходимости будем использовать обозначение $A(G)$.

Заметим, что в силу того, что знаковые графы являются неориентированными, их матрицы смежности симметричны.

Матрица A представима в виде

$$A=A^-+A^+,$$

где A^- – матрица, полученная заменой 1 на 0, а A^+ – матрица, полученная заменой -1 на 0.

Диагональные элементы матрицы $A,$ а, следовательно, и матриц A^+ и A^- по определению равны 0. Для анализа структуры матрицы смежности также будем рассматривать матрицы $D=A+I_m$ и $D^+=A^++I_m,$ которые по сравнению с матрицами A и A^+ содержат 1 на диагонали, где матрица I_m – единичная квадратная матрица размерности $m.$

Заметим, что для графа K_m^+ матрица $D=D^+=J_m,$ где матрица J_m – квадратная матрица размерности $m,$ состоящая только из 1.

Для анализа матрицы D предлагается следующий *алгоритм 2*:

1. Для каждой строки i определить множество $S(i)=\left\{j:d_{ij}=1\right\}\left(i=\overline{1,m}\right).$

2. В матрице D определить строку i^* с максимальным значением $\left|S\left(i^*\right)\right|$ (если таких строк несколько, то выбрать любую). В одно множество с индексом i^* поместить индексы тех строк $l,$ для которых $S(l)\subseteq S\left(i^*\right).$ Полученное множество индексов обозначим $G\left(i^*\right).$

3. Вычеркнуть из D строки, индексы которых принадлежат множеству $G(i^*)$.

4. Если в D существуют невычеркнутые строки, то перейти к шагу 2, иначе для множества строк матрицы A получено разбиение $\{G(i^*)\}_{i^* \in I^*}$, где $I^* \subset \{1,\dots,m\}$.

5. Построить матрицу D' с новым порядком строк и столбцов, группируя их индексы в соответствии с найденным разбиением.

Полученная матрица D' имеет следующую структуру:

a) на диагонали стоят квадратные подматрицы-блоки из 1 и 0 порядка $|G(i^*)|$ для всех $i^* \in I^*$;

b) элементы, не принадлежащие блокам, равны –1 или 0.

Заметим, что если полный знаковый граф является частично сбалансированным, то все блоки на диагонали состоят из 1, а остальные элементы матрицы D' равны –1, при этом каждому блоку соответствует сбалансированная коалиция экспертов. Если количество блоков равно 1 или 2, то соответствующая знаковому графу группа экспертов является абсолютно сбалансированной или сбалансированной соответственно.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Пусть знаковый граф G, соответствующий группе экспертов $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, представлен на рис. 1. Определим коалиции экспертов.

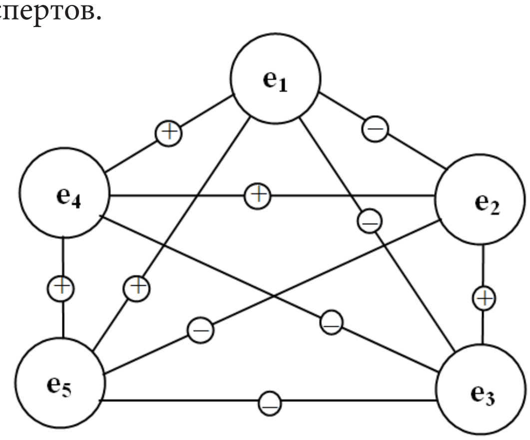

Рис. 1. Знаковый граф G

Определим сбалансированность экспертной группы с помощью различных алгоритмов.

Алгоритм определения сбалансированности подгруппы экспертов. Определение N-множества для группы экспертов.

1. На основе построенного знакового полного графа G сформируем матрицу $R_{m\times m} = \{r_{ij}\}$:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Приведем матрицу $R_{m\times m}$ к блочно-диагональному виду путем перестановки строк и столбцов. Каждая из диагональных подматриц будет соответствовать подгруппе сбалансированных экспертов.

$$\begin{array}{c|c} & e_1\ e_2\ e_3\ e_4\ e_5 \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c} & e_1\ e_5\ e_4\ e_2\ e_3 \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c} & e_1\ e_5\ e_4\ e_2\ e_3 \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_5 \\ e_4 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1^{**} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{**} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

3. Так как не удается привести матрицу к блочно-диагональному виду, то это значит, что группа экспертов несбалансированная.

4. На основе данной матрицы можно выделить N-множество = $\{(e_2, e_4); (e_4, e_2)\}$, которое свидетельствует о том, что несбалансированность в группе обусловлена согласованностью суждений экспертов e_2, e_4.

Таким образом, получили, что группа экспертов несбалансированная, т. е. необходимо либо формирование новой группы экспертов, либо проведение повторной экспертизы с рекомендацией экспертам по изменению своих суждений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе была рассмотрен подход для определения сбалансированности знакового графа группы экспертов. Рассмотрены существующие в настоящее время типы и подходы к определению сбалансированности знакового графа. Разработаны алгоритм определения сбалансированности экспертной группы; алгоритм определения максимально сбалансированной подгруппы экспертов, который позволяет выделить коалиции экспертов. На основе предложенных алгоритмов были проведены вычислительные эксперименты, которые показали приемлемость и эффективность предложенного подхода к принятию решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Литвак Б. Г.* Экспертные технологии в управлении / Б. Г. Литвак – М. : Дело, 2004. – 400 с.

2. *Погосян К. С.* Согласование лингвистических экспертных оценок в процедуре группового выбора / К. С. Погосян, Т. М. Леденева // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2010. – № 2. – С. 125–130.

3. *Погосян К. С.* Алгоритм построения оптимальной лингвистической шкалы в рамках экспертного оценивания / К. С. Погосян // Системы управления и информационные технологии. – 2011. – № 3.1(45). – С. 180–185.

4. *Погосян К. С.* Задача формирования оптимальной лингвистической шкалы для группы экспертов / К. С. Погосян, Т. М. Леденева // Нечеткие системы и мягкие вычисления. – 2011. – Том 6, № 2 – С. 113–122.

5. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес. – М. : Мир, 1978. – 432 с.

6. *Робертс Ф. С.* Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам / Ф. С. Робертс. – М. : Наука, 1986. – 496 с.

7. *Леденева Т. М.* Модели и методы принятия решений / Т. М. Леденева. – Воронеж : Воронеж. гос. техн. ун-т, 2004. – 189 с.

8. *Axelrod R. M.* Structure of decision: The Cognitive Maps of Political Elites / R. M. Axelrod. – Princeton, NJ, Princeton University Press, 1976. – 404 p.

9. *Helgason M.* Quantization Effects on the Equilibrium Behavior of Combined Fuzzy Cognitive Maps / M. Helgason // International Journal of Intelligent Systems. – 2007. – V. 22. – P. 181–202.

10. *Papageorgiou E. I.* Fuzzy Cognitive Maps for Applied Sciences and Engineering: From Fundamentals to Extensions and Learning Algorithms / E. I. Papageorgiou – Springer, 2014. – 411 p.

11. *Kosko B.* Fuzzy Cognitive Maps / B. Kosko // International Journal Man-Machine Studies. – 1988. – № 24. – P. 65–75.

12. *Stylios C.* Fuzzy Cognitive Maps in Modeling Supervisory Control / C. Stylios, P. Groumpos – Fuzzy Systems, 2000. – Vol. 8. – № 2. – P. 83–98.

13. *Зевеке Г. В.* Основы теории цепей / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин. – М. : Энергия, 1975. – 752 с.

14. *Franc O., Harary F.* Balance in Stochastic Signed Graphs / O. Franc, F. Harary // Social Networks. – 1980. – № 2. – P. 155–163.

Погосян Кристине Самвеловна – преподаватель кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий факультета прикладной математики, информатики и механики, Воронежский государственный университет.
Тел.: 8-920-437-67-76
E-mail: pogosyan_k_s@mail.ru

Pogosyan Kristine Samvelovna – Lecturer at the department of computational mathematics and applied information technology department of Applied mathematics, informatics and mechanics, Voronezh State University.
Tel.: 8-920-437-67-76
E-mail: pogosyan_k_s@mail.ru