УДК 510.22

РЕШЕНИЕ RCPSP ПРИ НЕЧЕТКИХ ТРУДОЗАТРАТАХ ВЫПОЛНЕНИЯ ОПЕРАЦИЙ

А. О. Шевляков, М. Г. Матвеев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 14.04.2015 г.

Аннотация. Рассматривается метод решения задачи планирования ресурсно-ограниченного проекта при наличии неопределенности трудозатрат выполнения операций. Предложены модель описания нечетких переменных, преобразование L α-уровневого нечеткого числа для перехода к четкой задаче и генетический алгоритм для решения четкой задачи планирования.
Ключевые слова: планирование ресурсно-ограниченного проекта, нечеткость, генетический алгоритм.
Annotation. This article reviews method for solving resource constrained project scheduling problem with uncertain duration times of activities. Model description for fuzzy duration times, L-transform of α-level fuzzy number for transition to deterministic problem and Genetic Algorithm to solve deterministic scheduling problem are proposed.
Keywords: resource constrained project scheduling problem, fuzzy, genetic algorithm.

ВВЕДЕНИЕ

Задача оптимального планирования проекта при наличии ресурсных и технологических ограничений известна в литературе как задача планирования ресурсно-ограниченного проекта – RCPSP (resource constrained project scheduling problem). Эта задача актуальна среди иностранных исследователей уже несколько десятков лет по причине важности практического применения в строительстве, производстве и многих других сферах деятельности. Трудозатраты на выполнение каждой i-ой работы проекта определяются как произведение количества ресурсов, r_i на нормированную длительность, d_i^* выполнения работы. Поскольку на нормированную длительность выполнения работ проекта влияет множество факторов, которые не всегда можно учесть, возникает неопределенность при оценке численного значения трудозатрат. Эта неопределенность выражается либо в терминах случайных величин, либо нечеткими числами. Так как вероятностные распределения случайных величин не всегда удается получить, пользуются экспертными оценками трудозатрат, которые удобно представлять нечеткими числами.

Существующие методы решения четких задач RCPSP можно разделить на три группы: эвристические, например, [1], стохастической оптимизации, например, генетические алгоритмы [2] и математического программирования, например, [3].

Задача исследования состоит в построении способа решения задачи RCPSP при нечетких трудозатратах выполнения работ проекта.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Под нечётким множеством $\tilde{A}$ понимается совокупность упорядоченных пар, составленных из элементов x универсального множества X и соответствующих степеней принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}, \qquad (1)$$

причем $\mu_{\tilde{A}}(x)$ – функция принадлежности, указывающая в какой степени элемент x принадлежит нечёткому множеству $\tilde{A}$.

Широкое применение получили треугольные нечеткие числа с функцией принадлежности:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-a)}{(b-a)} & a\le x<b\\ \dfrac{(c-x)}{(c-b)} & b\le x\le c\\ 0 & x>d, x<a\end{cases} \quad (2)$$

Часто используется α-интервальное представление для проведения вычислительных операций над нечеткими числами. α-интервалом нечеткого множества $A\subseteq X$, обозначаемым как A_α, называется четкое множество:

$$A_\alpha=\{x\in X\mid \mu_A(x)\ge\alpha\}, \quad (3)$$

Представляется целесообразным использовать выпуклую линейную комбинацию L [4, 5], что позволит решать сложную нечеткую задачу как совокупность чётких задач на α-интервалах. Для этого на каждом из α-интервалов требуется выбирать единственное значение $\overline{x}(\alpha)\in X_\alpha$ при помощи выпуклой линейной комбинации левого, $x^L(\alpha)$ и правого, $x^R(\alpha)$ концов α-интервалов

$$\overline{x}(\alpha)=L(X_\alpha)=\lambda(\alpha)x^L(\alpha)+(1-\lambda(\alpha))x^R(\alpha). \quad (4)$$

При выборе параметра $\lambda(\alpha)$ в виде $\lambda(\alpha)=\dfrac{m-x^L(\alpha)}{x^R(\alpha)-x^L(\alpha)}$ выпуклая линейная комбинация L сохраняет моду и степень асимметрии нечёткого числа. При преобразовании не сохраняется только длина носителя (она уменьшается), однако в большинстве случаев меньший носитель обеспечивает большую устойчивость решения, что можно рассматривать как положительный эффект.

Получаемые модифицированные нечеткие числа предлагается записывать в следующей форме:

$$\overline{x}(\alpha)=c+k\alpha, \quad (5)$$

где

$$\left[\begin{array}{l} c=m+x^R-\lambda(x^L+x^R)\\ k=\lambda(x^L+x^R)-x^R\end{array}\right.. \quad (6)$$

Для представления (5) предложена алгебра модифицированных нечётких чисел [5], образующая кольцо над множеством модифицированных нечетких чисел, замкнутым относительно введенных операций.

Такой подход позволяет осуществлять вычисления, оперируя только действительными значениями компонент нечеткой величины на двух α-интервалах. Если произвольную операцию обозначить символом $*\in\{+;-;\times;/\}$, то её результат будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{gathered}\overline{x}_{\tilde{A}}(\alpha)*\overline{x}_{\tilde{B}}(\alpha)=\alpha(\overline{x}_{\tilde{A}}(1)*\overline{x}_{\tilde{B}}(1))+\\ +(1-\alpha)(\overline{x}_{\tilde{A}}(0)*\overline{x}_{\tilde{B}}(0)).\end{gathered} \quad (7)$$

Данный способ выполнения операций над модифицированными нечеткими числами позволяет решать задачи с нечеткими параметрами, используя программные инструменты работы с действительными числами.

2. НЕЧЕТКАЯ ЗАДАЧА RCPSP

Представим задачу RCPSP как задачу нелинейного программирования с нечеткими переменными:

$$T=\min\{\max\{t_i+d_i\mid i=1,2,...,n\}\}, \quad (8)$$

$$t_j\ge t_i+d_i \quad \forall(i,j)\in H, \quad (9)$$

$$\sum_{t\in A_t} r_i\le b, \quad (10)$$

$$d_i=\frac{\tilde{q}_i}{r_i} \quad (i=1,2,...,n), \quad (11)$$

где T – длительность проекта; n – число работ проекта; t_i – время начала i-ой работы; d_i – длительность i-ой работы; H – множество, задающее связи между работами (отношение предшествования); A_t – множество индексов работ, выполняющихся в интервале $(t-1,t]$; r_i – количество ресурсов, выделенных на i-ю работу; b – максимальное число ресурсов, доступных в единицу времени, $\tilde{q}_i$ – нечеткие трудозатраты i-ой работы.

Теперь мы можем представить нечеткую задачу как четкую на двух α-интервалах:

$$T=\min\{\max\{t_i(\alpha)+d_i(\alpha)\mid i=1,2,...,n\}\}, \quad (12)$$

$$t_j(\alpha)\ge t_i(\alpha)+d_i(\alpha) \quad \forall(i,j)\in H, \quad (13)$$

$$\sum_{t\in A_t(\alpha)} r_i(\alpha)\le b, \quad (14)$$

$$d_i(\alpha) = \frac{q_i(\alpha)}{r_i(\alpha)} \quad (i = 1, 2, ..., n), \qquad (15)$$

где $\alpha = \{0,1\}$.

На этапе проверки ресурсных ограничений в единицу времени:

$$A_t = \{i \mid t_i < t \le t_i + d_i\} \qquad (16)$$

задача RCPSP становится задачей целочисленного математического программирования. Для решения задачи (12–15) предлагается использовать модификацию генетического алгоритма [6].

3. ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ RCPSP

Примем неизменными параметрами проекта:

• Число работ в проекте.

• Трудозатраты работ.

• Связи между работами (отношения предшествования).

• Максимальное число ресурсов, доступных в единицу времени.

Используем классическую схему алгоритма Холланда [7], но введем собственный оператор кроссовера из-за необходимости генерировать только допустимые решения на каждом из этапов.

Будем кодировать фенотип как хромосому из двух равных по величине наборов генов (рис. 1). Первый набор определяет время начала каждой из работ проекта t_i, второй – количество ресурсов, выделенных на данную работу r_i, где i – порядковый номер работы проекта. Длительность работы (11) определяется как отношение трудозатрат к числу ресурсов, выделенных на данную работу.

1	2	3	4	...	n+1	n+2	n+3	n+4	...
t_1	t_2	t_3	t_4		r_1	r_2	r_3	r_4	

Рис. 1. Представление хромосомы

Рассматриваются два типа ограничений: ограничения предшествования (работа не может начаться, прежде чем закончатся все её предшественники) и ресурсные ограничения (число ресурсов, выделенных на работы проекта в единицу времени, не может превышать максимальное доступное число ресурсов).

Функция приспособленности выбрана обратно пропорциональной суммарной длительности проекта, определяется как:

$$W(x) = \frac{1}{\max\{t_i + d_i \mid i = 1, 2, ..., n\}} \qquad (17)$$

Включена проверка допустимости решения на каждом этапе генетического алгоритма. Это означает, что начальную популяцию будут составлять только допустимые решения, так же только допустимые решения будут выбираться после кроссовера и мутации.

На этапе отбора сохраняется 50 процентов популяции, выбираются особи с наибольшей приспособленностью. Для кроссовера родители выбираются по методу рулетки.

Шаг 1: Выбирается один случайный ген первого родителя.

Шаг 2: Выбираются все гены первого родителя, имеющие значение равное или меньшее выбранному гену, и переносятся к потомку.

Шаг 3: Оставшиеся пустые гены потомка заполняются соответствующими генами второго родителя таким образом:

• Начинают с гена с наименьшим значением среди оставшихся.

• Прежде чем перенести выбранный ген от второго родителя к потомку проверяется допустимость полученного решения (ограничения предшествования и ресурсные ограничения). Если решение допустимо, то ген переносится, иначе случайно генерируется подходящий ген.

Используется точечная мутация, заменяющая один ген случайным геном.

4. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Составим план проекта, вершинный граф которого показан на рис. 2. Максимальное доступное число ресурсов в единицу времени $r = 3$. Трудозатраты работ представлены в табл. 1.

Решения, получаемые при $\alpha = 1$ и $\alpha = 0$, представлены в табл. 2 и 3 соответственно.

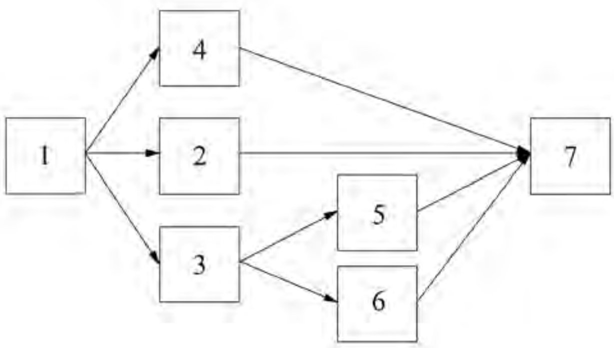

Рис. 2. Вершинный граф проекта

Таблица 1

Трудозатраты работ проекта

Работа	Нечеткие трудозатраты
1	(1,2,3)
2	(4,6,10)
3	(2,4,5)
4	(1,2,3)
5	(1,2,4)
6	(1,4,5)
7	(1,2,7)

Таблица 2

Решение при $\alpha = 1$

Работа	1	2	3	4	5	6	7
Время, $t_i(1)$	0	1	2	1	6	4	7
Трудозатраты, $q_i(1)$	2	6	4	2	2	4	2
Выделенный ресурс, $r_i(1)$	2	1	2	2	2	2	2
Длительность, $d_i(1)$	1	6	2	1	1	2	1

Таблица 3

Решение при $\alpha = 0$

Работа	1	2	3	4	5	6	7
Время, $t_i(0)$	0	2	1	4	6	2	7
Трудозатраты, $q_i(0)$	2	8	3	2	3	2	6
Выделенный ресурс, $r_i(0)$	2	2	3	1	3	1	3
Длительность, $d_i(0)$	1	4	1	2	1	2	2

Диаграмма Ганта для нечеткого решения задачи представлена на рис. 3. Каждый четырёхугольник определяет трудозатраты работ проекта, распределенные по времени его выполнения. Высота четырёхугольников на этих рисунках соответствует значению функции принадлежности $\mu_{TR}(q) = 1$. Тогда трудозатраты вычисляются как площадь четырёхугольника. Это означает, например, что трудозатраты первой работы на рис. 3 составляют ровно 2 единицы. Необходимые ресурсы в каждый временной момент определяются как сумма ресурсов работ в соответствующем временном сечении. Нижняя граница косоугольников представляет собой решение, полученное при $\alpha = 0$ (отрезок $[t_i(0), t_i(0) + d_i(0)]$), верхняя – при $\alpha = 1$ ($[t_i(1), t_i(1) + d_i(1)]$). Для получения решения на всех α -уровнях достаточно соединить эти решения прямой. Таким образом, нечеткий ресурс каждой работы определяется по формуле:

$$\overline{r}_i(\alpha) = r_i(0) + (r_i(1) - r_i(0))\alpha \qquad (18)$$

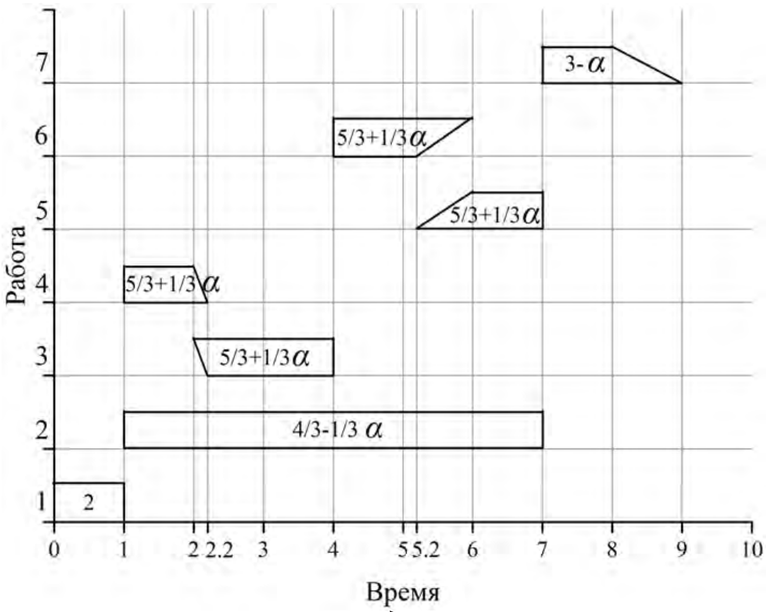

Рис. 3. Нечеткая диаграмма Ганта

Суммарный ресурс в определенный промежуток времени равен сумме нечетких ресурсов работ, умноженных на возможность появления работы на этом промежутке. Возможность равна нормированной площади косоугольника работы, т. е. отношению площади косоугольника в этом промежутке к площади всего промежутка:

$$P_i = \frac{S_i}{S_{full}} \qquad (19)$$

Ресурсные ограничения (14) выполняются. Иллюстрацию проверки ограничения (14) можно показать на примере интервала $[2, 2.2]$.

$[2, 2.2]$: вторая работа имеет нечеткий ресурс $r_2(\alpha) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\alpha$, возможность $P_2 = 1$. Третья работа: $r_3(\alpha) = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\alpha$, $P_3 = \frac{1}{2}$. Четвертая работа: $r_4(\alpha) = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\alpha$, $P_4 = \frac{1}{2}$. Тогда суммарный ресурс на этом интервале $r = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2}(\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\alpha) + \frac{1}{2}(\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\alpha) = 3$.

Суммарные трудозатраты четкого решения при $\alpha = 1$ и $\alpha = 0$ равны 22 и 26 соответственно. Суммарные трудозатраты нечеткого решения:

$q = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 6 + 1,5(3 - \alpha) = 24,5 - 1,5\alpha$, что дает 23 и 24,5 при $\alpha = 1$ и $\alpha = 0$. Имеется экономия в 1,5 единицы трудозатрат на нулевом α-уровне, представляющем пессимистическую оценку выполнения проекта.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный метод планирования проекта с нечетко заданными трудозатратами работ позволяет сократить планируемые трудозатраты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abeyasinghe M. C. L.* An efficient method for scheduling construction projects with resource constraints / M. C. L. Abeyasinghe, D. J. Greenwood, D. E. Johansen // I. J. Project Management, 19(1), 2001, c. 29-45.

2. *Leu S. S.* A genetic-algorithm-based resource-constrained construction scheduling system / S. S. Leu, C. H. Yang // Construction Management and Economics, 17, 1999. – С. 767–776.

3. *Mingozzi A.* An exact algorithm for the resource-constrained project scheduling problem based on a new mathematical formulation / A. Mingozzi, V. Maniezzo, S. Ricciardelli // Management Science, 44(5), 1998. – С. 714–729.

4. *Лебедев Г. Н.* Методы решения задач управления предприятием в условиях расплывчатой неопределенности / Г. Н. Лебедев, М. Г. Матвеев, М. Е. Семенов, О. И. Канищева // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2012. – №1. – С. 102–106.

5. *Воронцов Я. А.* Алгебраические операции с нечеткими LR-числами с использованием преобразования L / Я. А. Воронцов, М. Г. Матвеев // Программная инженерия, № 8. – 2014. – С. 23–29.

6. *Fayyad T. M.* Optimizing the schedule of resource-constrained construction projects using Genetic Algorithms / T. M. Fayyad // Civil Engineering, № 1. – 2010. – С. 34–49.

7. *Матвеев М. Г.* Модели и методы искусственного интеллекта. Применение в экономике / М. Г. Матвеев, А. С. Свиридов, Н. А. Алейникова. – М. : Финансы и статистика, 2008. – 475 с.

Матвеев Михаил Григорьевич – д.т.н., проф., зав. каф. информационных технологий управления ФКН, Воронежский государственный университет. Тел.: (473) 228-11-60+1606.
E-mail: mgmatveev@yandex.ru

Шевляков Александр Олегович – студент, каф. информационных технологий управления ФКН, Воронежский государственный университет. E-mail: shevlyakov.a.o@mail.ru

Matveev Mikhail Grigorievich – Doctor of Technical Sciences, Professor, head of the dept. of Information Technologies of Management, Computer Science Faculty, Voronezh State University. Phone: (473) 228-11-60+1606.
E-mail: mgmatveev@yandex.ru

Shevlyakov Alexander Olegovich – student, dept. of Information Technologies of Management, Computer Science Faculty, Voronezh State University. E-mail: shevlyakov.a.o@mail.ru