УДК 62-50

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КЛАССА ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ ЗАДАННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

А. В. Дылевский

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 29.09.2015 г.

Аннотация. Излагается метод выделения широкого класса входных сигналов непрерывной линейной системы управления. Класс сигналов задается обыкновенным дифференциальным уравнением.
Ключевые слова: система управления, класс сигналов, дифференциальное уравнение, передаточная функция, установившаяся ошибка.
Annotation. The method for determination of input signals class of a continuous-time linear control system is concerned. The class of input signals is specified by a heterogeneous differential equation.
Keywords: control system, class of signals, differential equation, transfer function, steady-state error.

ВВЕДЕНИЕ

Основными задачами при проектировании систем управления являются анализ и синтез. Следует отметить, что для линейных систем задачу синтеза в основном можно считать решенной, так как разработаны достаточно простые и эффективные методы построения модальных систем управления [1–4]. В силу того, что качество синтезированной системы напрямую зависит от полноты использования априорной информации о задающих воздействиях и внешних возмущениях (условимся в дальнейшем называть эти сигналы входными), в теории автоматического управления получил широкое распространение так называемый принцип поглощения [2, 5–9], который основан на описании класса входных сигналов однородными дифференциальными уравнениями с произвольными начальными условиями. Отметим, что для описания класса сигналов можно использовать и неоднородные дифференциальные уравнения с ограниченной правой частью, что позволит значительно расширить класс входных сигналов [10, 11]. При синтезе полученная система может отличаться от эталонной или желаемой [2, 10, 11]. Поэтому возникает задача определения класса входных сигналов синтезированной системы управления. В частном случае решение указанной задачи может быть получено путем исследования системы по отношению к определенным классам сигналов: полиномиальных, гармонических и т. д. Однако такой подход является, по сути, методом перебора, что не позволяет говорить о его высокой эффективности. В настоящей статье приводится метод выделения класса входных сигналов непрерывной линейной системы управления. Класс сигналов задается неоднородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами и произвольной ограниченной правой частью.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть заданы передаточные функции соответственно эталонной и синтезированной систем управления

$$W_э(s) = \frac{R_э(s)}{Q_э(s)},\ W_c(s) = \frac{R_c(s)}{Q_c(s)}, \qquad (1)$$

где $D(s) = Q_э(s)Q_c(s)$ – устойчивый многочлен.

Требуется определить класс сигналов $V_\delta = V_\delta[t_0, +\infty)$ такой, что

$$\forall \delta > 0 \ \ \forall f \in V_\delta \ \ \exists t^* > t_0 \ \ \forall t > t^* \quad (|\varepsilon(t)| < \delta). \quad (2)$$

Здесь

$$\varepsilon(t) \div E(s) = (W_э(s) - W_c(s))F(s),$$
$$F(s) \div f(t). \quad (3)$$

2. ОПИСАНИЕ МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Рассмотрим ошибку, определяемую формулой (3). Согласно (1) имеем

$$E(s) = \frac{R_э(s)Q_c(s) - R_c(s)Q_э(s)}{D(s)} F(s) \quad (4)$$

или

$$E(s) = \frac{L(s)}{D(s)} F(s), \quad (5)$$

где $\deg D = n$, $\deg L = m$ и

$$L(s) = R_э(s)Q_c(s) - R_c(s)Q_э(s). \quad (6)$$

Покажем далее, что класс входных сигналов V_δ может быть определен как множество решений линейного дифференциального уравнения

$$L(p) f(t) = \phi(t), \quad p = \frac{d}{d\,t}, \quad (7)$$

с кусочно-непрерывной ограниченной правой частью, то есть

$$|\phi(t)| \le M(\delta) \quad \forall t \ge t_0, \ M(\delta) \ge 0. \quad (8)$$

Здесь предполагается, что $f \in C^{m-1}[t_0, +\infty)$, $f^{(m)}$ – кусочно-непрерывная функция. В пространстве изображений уравнение (7) примет вид

$$L(s)F(s) = \Phi(s) + L_0(s), \quad (9)$$

где L_0 – некоторый алгебраический многочлен степени $m-1$, определяемый значениями $f^{(i-1)}(t_0)$, $i = 1, \ldots, m$. Следует отметить, что при наложенных на функции f и ϕ ограничениях изображения по Лапласу указанных функций существуют. Из формулы (5) и равенства (9) вытекает следующее выражение для ошибки:

$$E(s) = \frac{L_0(s)}{D(s)} + \frac{\Phi(s)}{D(s)}. \quad (10)$$

Так как L_0 – алгебраический полином и D – многочлен Гурвица, то для

$$\varepsilon_{пер}(t) \div \frac{L_0(s)}{D(s)} \quad (11)$$

– переходной составляющей ошибки $\varepsilon(t)$ справедливо равенство

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon_{пер}(t) = 0, \quad (12)$$

то есть

$$\forall \gamma > 0 \ \ \exists t^* > t_0 \ \ \forall t > t^* \quad (|\varepsilon_{пер}(t)| < \gamma). \quad (13)$$

Рассмотрим теперь

$$\varepsilon_{уст}(t) \div \frac{\Phi(s)}{D(s)} \quad (14)$$

– установившееся значение ошибки $\varepsilon(t)$. Пусть

$$D(s) = \prod_{i=1}^{\nu} (s + \lambda_i)^{k_i}, \quad \sum_{i=1}^{\nu} k_i = n,$$
$$\lambda_i \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}\lambda_i > 0. \quad (15)$$

Тогда

$$E_{уст}(s) = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{c_{ij}}{(s + \lambda_i)^j} \Phi(s), \quad (16)$$

где

$$c_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} \lim_{s\to-\lambda_i} \frac{\mathrm{d}^{j-1}}{\mathrm{d}s^{j-1}} \left[\frac{(s+\lambda_i)^{k_i}}{D(s)} \right] =$$
$$= \frac{1}{(j-1)!} \frac{\mathrm{d}^{j-1}}{\mathrm{d}s^{j-1}} [\prod_{\substack{r=1 \\ r\ne i}}^{n} (s+\lambda_r)^{k_r}]^{-1}_{s=-\lambda_i}. \quad (17)$$

Согласно теореме свертки имеем

$$\varepsilon_{уст}(t) = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{c_{ij}}{(k_i - j)!} \times$$
$$\times \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{k_i - j} e^{-\lambda_i (t-\tau)} \phi(\tau)\, d\tau. \quad (18)$$

Так как выполнено неравенство (8), то

$$|\varepsilon_{уст}(t)| \le M(\delta) \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{|c_{ij}|}{(k_i - j)!} \times$$
$$\times \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{k_i - j} \operatorname{Re} e^{-\lambda_i (t-\tau)}\, d\tau. \quad (19)$$

Нетрудно проверить, что

$$\int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{k_i - j} \operatorname{Re} e^{-\lambda_i (t-\tau)}\, d\tau <$$
$$< \int_{t_0}^{\infty} \tau^{k_i - j} \operatorname{Re} e^{\lambda_i \tau}\, d\tau = \frac{(k_i - j)!}{(\operatorname{Re}\lambda_i)^{k_i - j + 1}}. \quad (20)$$

В результате окончательно получаем следующую оценку:

$$|\varepsilon_{уст}(t)| \le M(\delta) \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{|c_{ij}|}{(\operatorname{Re}\lambda_i)^{k_i - j + 1}} =$$
$$= M(\delta)\Delta \quad \forall t \ge 0, \quad (21)$$

где c_{ij} определяется по формуле (17) и

$$\Delta = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{|c_{ij}|}{(\operatorname{Re}\lambda_i)^{k_i-j+1}}. \qquad (22)$$

Отсюда, с учетом утверждения (13) следует, что

$$\forall \gamma > 0 \;\; \exists t^* > t_0 \;\; \exists t > t^* \; (|\varepsilon(t)| < \gamma + M(\delta)\Delta). \quad (23)$$

Положим $\gamma = \delta / 2$ и

$$M(\delta) = \frac{\delta}{2\Delta}. \qquad (24)$$

Таким образом, для класса входных сигналов, удовлетворяющих условиям (7), (8) и (24) справедливо утверждение (2).

Следует особо отметить, что соотношения (17) и (22) позволяют указать практические способы уменьшения установившейся ошибки. Если же $M(\delta) = 0$, то есть $\phi(t) \equiv 0$, то установившаяся ошибка равна нулю.

3. ПРИМЕР

Пусть

$$W_э(s) = s, \quad W_c(s) = \frac{s}{\tau s + 1}, \quad \tau = \text{const} > 0. \quad (25)$$

В рассматриваемом случае

$$L(s) = s^2, \quad D(s) = s + \frac{1}{\tau}. \qquad (26)$$

По формуле (22) находим, что $\Delta = \tau$. Поэтому класс сигналов $V_\delta[0, +\infty)$ определяется следующими условиями:

$$\ddot{f}(t) = \phi(t), \qquad (27)$$

$$|\phi(t)| \le M(\delta) \; \forall t \ge 0, \; M(\delta) = \frac{\delta}{2\tau}, \qquad (28)$$

или, что тоже самое,

$$f(t) = C_0 + C_1 t + \int_0^t (t-\tau)\phi(\tau)\, d\tau, \qquad (29)$$

где C_0, C_1 — произвольные действительные числа, а функция ϕ удовлетворяет неравенству (28).

Очевидно, что выделенному классу принадлежат все алгебраические полиномы со степенью не выше второй, тригонометрические полиномы, наивысшая частота в которых определяется константой $M(\delta)$, а также затухающие экспоненты и логарифмические функции. Необходимо добавить, что перечисленными функциями класс V_δ не исчерпывается.

Так как в данном случае $\Delta = \tau$ и $M(\delta) = \delta / 2\tau$, то уменьшение константы τ приведет одновременно к повышению точности дифференцирования и расширению класса входных сигналов.

Рассмотрим теперь

$$W_c(s) = \frac{-2\alpha^3}{(s+\alpha)^2}, \quad \alpha = \text{const} > 0. \qquad (30)$$

Тогда получаем, что

$$L(s) = s(s+\alpha)^2 + 2\alpha^3 = (s+2\alpha)(s^2+\alpha^2),$$
$$D(s) = (s+\alpha)^2. \qquad (31)$$

Согласно формуле (22) справедливо равенство $\Delta = 1/\alpha$. Таким образом, класс сигналов $V_\delta[0, +\infty)$ определяется уравнением

$$(p+2\alpha)(p^2+\alpha^2) f(t) = \phi(t), \quad p = \frac{d}{dt}, \quad (32)$$

с произвольной ограниченной правой частью

$$|\phi(t)| \le M(\delta) \;\; \forall t \ge 0, \; M(\delta) = \frac{\alpha\delta}{2}. \qquad (33)$$

Отсюда вытекает следующий вывод: при $M(\delta) = 0$, то есть $\phi(t) \equiv 0$, устройство с передаточной функцией (30), несмотря на отсутствие в числителе оператора s, будет осуществлять асимптотически точное помехоустойчивое дифференцирование сигналов вида

$$f(t) = C_1 e^{-2\alpha t} + C_2 \sin\alpha t + C_3 \cos\alpha t$$
$$\forall C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}, \qquad (34)$$

то есть практически важного класса сигналов с амплитудной модуляцией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kailath T.* Linear systems. – NJ: Prentice Hall. Englewood Cliffs, 1980. – 682 p.

2. *Цыпкин Я. З.* Синтез робастно оптимальных систем управления объектами в условиях ограниченной неопределенности // Автоматика и телемеханика. — 1992. – № 9. – С. 139–159.

3. *Лозгачев Г. И.* Синтез модальных регуляторов по передаточной функции замкнутой системы // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 5. – С. 49–55.

4. *Лозгачев Г. И.* Построение модальных регуляторов для одноконтурных и многокон-

турных систем // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 12. – С. 15–21.

5. *Кулебакин В. С.* Операторное изображение функций и его практическое применение // Тр. ВВИА им. Н.Е.Жуковского. – М., 1958. – Вып. 695. – С. 59.

6. *Kalman R. E., Kорсе R. W.* Optimal synthesis of linear sampling control systems using generalized performance index // Trans. ASME. – 1958. – V. 80. No. 8. – P. 1820–1826.

7. *Johnson C. D.* Further study of the linear disturbances. The case of vector disturbances satisfying a linear differential equations // IEEE Trans. Autom. Contr. – 1970. – V. AC-15. – No. 2. – P. 222–228.

8. *Devison E. J.* The output control of linear time-invariant systems with unmeasurable arbitary disturbances // IEEE Trans. Autom. Contr. – 1972. – V. AC-17. – No. 5. – P. 621–630.

9. *Уонем М.* Линейные многомерные системы управления. – М. : Наука, 1980. – 376 с.

10. *Дылевский А. В., Лозгачев Г. И.* Применение метода пространства состояний для синтеза дифференциаторов // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 9. – С. 13–20.

11. *Лозгачев Г. И., Дылевский А. В.* Автоматические дифференциаторы: построение и применение в задачах управления. – Воронеж : Изд-во Воронежского госуниверситета, 2000. – 144 с.

Дылевский Александр Вячеславович – профессор кафедры технической кибернетики и автоматического регулирования факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, доктор технических наук, г. Воронеж, Российская Федерация.
E-mail: nefta@yandex.com

Dylevskii Alexander Vyacheslavovich – Professor of the Department of technical cybernetics and automatic control, the Faculty of applied mathematics, information science, and mechanics at Voronezh State University, Doctor of engineering sciences, Voronezh, Russian Federation.
E-mail: nefta@yandex.com