УДК 517.97 : 532.526

МЕТОД А. А. ДОРОДНИЦЫНА В ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ПРОНИЦАЕМОГО ЦИЛИНДРА ПОТОКОМ «ЗАМОРОЖЕННОГО» ГАЗА

Н. Г. Бильченко

Казанский Национальный Исследовательский Технический Университет (КНИТУ-КАИ) им. А.Н.Туполева (г.Казань)

Поступила в редакцию 17.12.2015 г.

Аннотация. Рассматривается постановка задачи математического моделирования оптимальной эффузионной тепловой защиты цилиндрических поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов, рассчитанных на вход в атмосферу. Учтены физико-химические процессы в ламинарном пограничном слое сжимаемого газа. Даётся вывод обобщённых интегральных соотношений А. А. Дородницына для системы уравнений пограничного слоя «замороженного» диссоциирующего воздуха на проницаемой цилиндрической поверхности. Приводится аппроксимирующая система третьего приближения для рассматриваемого случая.
Ключевые слова: оптимальное управление, тепломассообмен, ламинарный пограничный слой, гиперзвуковые течения, диссоциация, обобщённые интегральные соотношения, аппроксимирующая система.
Annotation. The intended for the atmosphere entry hypersonic aircraft surfaces optimal effusion heat protection mathematical modeling problem statement is considered. The physico-chemical processes in laminar boundary layer of compressible gas are appreciated. A. A. Dorodnitsyn's generalized integral relations for the "frozen" dissociating air boundary layer equations system on permeable cylindrical surfaces are obtained. The third approximation system for the case is given.
Keywords: optimal control; heat and mass transfer; laminar boundary layer; hypersonic flows; dissociation; generalized integral relations, approximating system.

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа представляет собой продолжение статей [1–3], в которых в рамках точных уравнений пограничного слоя вязкого сжимаемого газа были поставлены и решены задачи построения оптимальной тепловой защиты поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов для случаев равновесно диссоциирующего и ионизированного воздуха.

Неравновесность процесса диссоциации существенно влияет на теплообмен между пограничным слоем и поверхностью обтекаемого тела.

Задача о пограничном слое с неравновесными химическими реакциями в газе и на поверхности является существенно нелинейной и трудно поддаётся исследованию. Поэтому обычно упрощают задачу, исходя из физической картины течения. Прежде всего, неравновесные реакции в газе и на поверхности рассматриваются отдельно. Значения концентраций компонентов на стенке и на границе пограничного слоя зависят от условий протекания химических реакций. Предельными случаями, характеризующими эти условия, являются *химически равновесные* и *замороженные* течения.

В случае химически равновесного пограничного слоя предполагается, что скорости химических реакций настолько велики, что в каждой точке пограничного слоя устанавливается состав, соответствующий химическому равновесию при данной температуре, давлении и соотношении компонентов. При определении величины теплового потока к телу в этом случае степень каталитичности поверхности не имеет значения, так как для холодной поверхности $(C_{A_{eq}})_{y\to 0} \approx 0,$ т. е. все атомы рекомбинируют в пограничном слое, не доходя до стенки.

При обтекании поверхности высокотемпературным химически замороженным потоком теплообмен будет определяться состоянием поверхности, так как химические реакции могут проходить только на поверхности тела вследствие её каталитического действия. Результаты расчётов показывают, что для каталитической поверхности не наблюдается заметного изменения величины теплового потока к поверхности. Если же стенка некаталитическая (например, некоторые стекловидные материалы или углепластики), то может быть достигнуто значительное снижение величины теплового потока, вызванное образованием около стенки слоя нерекомбинированных атомов, препятствующих диффузии легких частиц к поверхности, вследствие чего уменьшается перенос тепла к стенке диффузией, и, таким образом, уменьшается общий тепловой поток.

Скорость протекания физико-химических процессов, как правило, возрастает с увеличением плотности газа. Поэтому, равновесные режимы течений свойственны полётам на небольшой высоте ($H \le 30$ км), а замороженные – полётам на очень больших высотах ($H \ge 80$ км).

Задача оптимального управления ламинарным пограничным слоем равновесно диссоциирующего газа на цилиндрических и сферических поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов была поставлена и решена в работах [1–3].

В данной работе ставится задача математического моделирования оптимальной эффузионной тепловой защиты цилиндрических поверхностей гиперзвуковых летательных аппаратов в потоке «замороженного» диссоциирующего воздуха. В качестве минимизируемого функционала выступает интегральный тепловой поток, передаваемый от пограничного слоя к криволинейной пористой стенке; в качестве ограничений – мощность системы охлаждения, определяемая с учётом фильтрационного закона Дарси, и суммарный расход охладителя; управляющим воздействием является удельный расход охладителя (газа того же состава, что и в набегающем потоке).

Метод обобщённых интегральных соотношений А. А. Дородницына [4] был положен в основу расчётов [1–3, 5–7]. В этих работах даётся вывод интегральных соотношений для систем уравнений ламинарного пограничного слоя воздуха на проницаемых поверхностях и интегральных соотношений, соответствующих сопряжённым системам, а также приводятся аппроксимирующие системы второго приближения для рассматриваемых случаев, на базе решения которых разработан алгоритм расчёта минимизирующей последовательности значений конвективного теплового потока.

В данной работе этот метод применяется для случая «замороженного» воздуха.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛАМИНАРНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ «ЗАМОРОЖЕННОГО» ГАЗА НА ПРОНИЦАЕМЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Рассматривается задача оптимального управления гиперзвуковым ламинарным пограничным слоем идеально диссоциирующего газа. Система уравнений, описывающая случай неравновесной диссоциации на цилиндрической поверхности, взята в виде (8) с граничными условиями (9) п. 2.1 [2].

В дальнейшем рассматривается случай «замороженного» газа, для которого $W_A \equiv 0$.

Наиболее интересным представляется рассмотрение случая некаталитической стенки.

Мощность, затрачиваемая системой охлаждения на вдув газа через пористую стенку единичной ширины на участке $\left[0, x_k\right]$ с учётом закона Дарси [8], оценивается функционалом:

$$N = \int_0^{x_k} a v_w^2(x)\,dx, \qquad (1)$$

где a – параметр, зависящий от толщины стенки, коэффициента проницаемости материала и теплофизических свойств газа в порах.

Суммарный расход охладителя оценивается функционалом:

$$R = \int_0^{x_k} (\rho v)_w (x)\,dx. \qquad (2)$$

Ставится следующая вариационная задача. Среди непрерывных управлений $m_w(x)$ требуется найти такое, которое реализует минимальное значение количества тепла

$$Q = \int_0^{x_k} q_w dx, \qquad (3)$$

передаваемого в единицу времени от пограничного слоя к обтекаемой поверхности единичной ширины при заданном ограничении на мощность системы охлаждения (1) и расход охладителя (2) и связях (8), (9) из [2]. Здесь q_w – удельный тепловой поток к стенке от ламинарного пограничного слоя идеально диссоциирующего газа, определяемый теплопроводностью и диффузионным переносом тепла [9]:

$$-q_w = \left(\frac{\lambda}{C_p}\frac{\partial H}{\partial y}\right)_{y=0} + \left(\frac{\lambda}{C_p}(\mathrm{Le}-1)h_A^0\frac{\partial C_A}{\partial y}\right)_{y=0}.$$

2. ВЫВОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ

С помощью преобразований А. А. Дородницына [10]:

$$\xi = \frac{1}{p_{e0}}\int_0^x p_e dx, \quad \eta = \frac{1}{\rho_{e0}}\int_0^y \rho dy$$

система (8) [2] запишется в виде:

$$u\frac{\partial u}{\partial \xi} + w\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\tau}{\tau_e}U_e\frac{dU_e}{d\xi} + \nu_{e0}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(b(\tau)\frac{\partial u}{\partial \eta}\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0;$$

$$u\frac{\partial C_A}{\partial \xi} + w\frac{\partial C_A}{\partial \eta} = \frac{\nu_{e0}}{\mathrm{Sm}}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(b(\tau)\frac{\partial C_A}{\partial \eta}\right);$$

$$u\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} + w\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = \frac{\nu_{e0}}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(b(\tau)\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}\right) +$$

$$+\nu_{e0}\left(1-\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\partial}{\partial \eta}\left(b(\tau)\frac{\partial \alpha^2}{\partial \eta}\right) +$$

$$+\left(1-\frac{1}{\mathrm{Le}}\right)\frac{\nu_{e0}}{\mathrm{Sm}}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(b(\tau)(\tau_A - \tau_M)\frac{\partial C_A}{\partial \eta}\right),$$

$$p_e = \frac{\rho k}{2m_A}(1 + C_A). \qquad (4)$$

Здесь

$$w = \left(1-\alpha_e^2\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} u\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\vartheta}{\tau}, \quad \vartheta = \tau + \alpha^2,$$

$$\tau_A = \frac{1}{h_{e0}}\int_0^T C_{p_A} dT, \quad \tau_M = \frac{1}{h_{e0}}\int_0^T C_{p_M} dT,$$

$$\alpha = \frac{u}{V_{\max}}, \quad V_{\max} = V_\infty\sqrt{1 + \frac{2}{(\gamma-1)M_\infty^2}},$$

γ – показатель адиабаты, Sm – число Шмидта.

Граничные условия (9) [2] в новых переменных примут вид:

$$u = 0, \quad w = \frac{(\rho v)_w}{\rho_{e0}}\cdot\left(1-\alpha_e^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \vartheta = \vartheta_w,$$

$$\left(\frac{\partial C_A}{\partial \eta}\right)_w = 0, \quad (\eta = 0);$$

$$u \to U_e(\xi), \quad \vartheta \to 1, \quad C_A = C_{A_e}, \quad (\eta \to \infty);$$

$$u = U_e(0), \quad \vartheta = 1, \quad C = C_{A_0}, \quad (\xi = 0,\ \eta > 0). \qquad (5)$$

С помощью преобразований [11]

$$\bar{u} = \frac{u}{U_e}, \quad \bar{v} = \frac{w}{U_e\sqrt{\nu_{e0}}}, \quad \psi = 1 - \vartheta, \quad \bar{C}_A = \frac{C_A}{C_{A_e}},$$

$$\bar{s} = \frac{1}{V_{\max} l}\int_0^\xi U_e d\xi, \quad \bar{t} = \frac{U_e \eta}{\sqrt{V_{\max} l \nu_{e0}}},$$

$$\bar{w} = \sqrt{V_{\max} l}\,\bar{v} + \frac{\dot{U}_e \bar{t}\bar{u}}{U_e}$$

система (4) приводится к следующей форме:

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{s}} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = \beta\left(1 - \psi - \bar{u}^2\right) + \frac{\partial}{\partial \bar{t}}\left(b(\tau)\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}\right);$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{s}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} = 0;$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{C}_A}{\partial \bar{s}} + \bar{w}\frac{\partial \bar{C}_A}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{\mathrm{Sm}}\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\left(b(\tau)\frac{\partial \bar{C}_A}{\partial \bar{t}}\right);$$

$$\bar{u}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{s}}+\bar{w}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{t}}=\frac{1}{\Pr}\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\left(b(\tau)\frac{\partial\psi}{\partial\bar{t}}\right)+$$

$$+\alpha_e^2\left(1-\frac{1}{\Pr}\right)\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\left(b(\tau)\frac{\partial\bar{u}^2}{\partial\bar{t}}\right)+$$

$$+\frac{1}{\mathrm{Sm}}\left(1-\frac{1}{\mathrm{Le}}\right)\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\left(b(\tau)(\tau_A-\tau_M)\frac{\partial\bar{C}_A}{\partial\bar{t}}\right),\quad(6)$$

а граничные условия (5) принимают вид:

$$\bar{u}=0,\quad \bar{w}=\frac{m(\bar{s})}{q(\bar{s})},\quad \psi=1-\tau_w,\quad \frac{\partial\bar{C}_A}{\partial\bar{t}}=0,$$

$$(\bar{t}=0);$$

$$\bar{u}\to 0,\quad \psi\to 0,\quad \bar{C}_A\to 1,\quad (\bar{t}\to\infty);$$

$$\bar{u}=1,\quad \psi=0,\quad \bar{C}_A=1,\quad (\bar{s}=0,\ \bar{t}>0),\quad(7)$$

где

$$m=\frac{(\rho v)_w}{\rho_{e0}}\sqrt{\frac{l}{V_{\max}\nu_{e0}}},\quad q=\alpha_e\left(1-\alpha_e^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

$$\beta=\frac{\dot{\alpha}_e}{\alpha_e\left(1-\alpha_e^2\right)},\quad \alpha_e=\frac{U_e}{V_{\max}},\quad \dot{\alpha}_e=\frac{d\alpha_e}{d\bar{s}},$$

$$\dot{U}_e=\frac{dU_e}{d\bar{s}},$$

l – некоторый характерный размер (например, радиус кругового цилиндра в случае обтекания цилиндра). В дальнейшем для простоты чёрточки над переменными $\bar{s}$, $\bar{t}$, $\bar{u}$, $\bar{w}$ опустим.

Умножив первое из уравнений системы (6) на $f'(u)$, второе – на $f(u)$ и сложив их, получим

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(uf(u)\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(wf(u)\right)=$$
$$=f'(u)\beta\left(1-\psi-u^2\right)+f'(u)\frac{\partial}{\partial t}\left(b(\tau)\frac{\partial u}{\partial t}\right).\quad(8)$$

Предполагая, что $f(u)$ – дважды дифференцируемая и достаточно быстро стремящаяся к нулю функция, проинтегрируем уравнение (8) по s от 0 до ∞ и получим первое интегральное соотношение

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_0^\infty uf(u)dt-w(s,0)f(0)=$$
$$=\beta\int_0^\infty\left(1-\psi-u^2\right)f'(u)dt-$$
$$-f'(0)b(\tau_w)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}-\int_0^\infty b(\tau)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 f''(u)dt.\quad(9)$$

Умножив первое из уравнений системы (6) на $C_A f'(u)$, второе – на $C_A f(u)$, третье – на $f(u)$ и сложив, результат проинтегрируем по s от 0 до ∞. Тогда второе интегральное соотношение примет вид

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_0^\infty uf(u)C_A dt-w(s,0)f(0)C_{A_w}=$$
$$=\beta\int_0^\infty C_A\left(1-\psi-u^2\right)f'(u)dt-$$
$$-C_{A_w}f'(0)b(\tau_w)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}-$$
$$-\int_0^\infty b(\tau)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(f''(u)C_A\frac{\partial u}{\partial t}+f'(u)\frac{\partial C_A}{\partial t}\right)dt-$$
$$-\frac{1}{\mathrm{Sm}}\int_0^\infty f'(u)b(\tau)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial C_A}{\partial t}dt.\quad(10)$$

Для вывода третьего интегрального соотношения первое из уравнений системы (6) умножим на $\psi f'(u)$, второе – на $\psi f(u)$, четвёртое – на $f(u)$ и, сложив, проинтегрируем по s от 0 до ∞:

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_0^\infty uf(u)\psi dt-w(s,0)f(0)\psi_w=$$
$$=\beta\int_0^\infty\psi\left(1-\psi-u^2\right)f'(u)dt-$$
$$-\psi_w f'(0)b(\tau_w)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}-$$
$$-\int_0^\infty b(\tau)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(f''(u)\psi\frac{\partial u}{\partial t}+f'(u)\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)dt-$$
$$-\frac{1}{\Pr}f'(0)b(\tau_w)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{t=0}-$$
$$-\frac{1}{\Pr}\int_0^\infty b(\tau)f'(u)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t}dt-$$
$$-2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\Pr}-1\right)\int_0^\infty b(\tau)uf'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2dt-$$
$$-\frac{1}{\mathrm{Sm}}\left(\frac{1}{\mathrm{Le}}-1\right)\int_0^\infty f'(u)b(\tau)(\tau_A-\tau_M)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial C_A}{\partial t}dt.\quad(11)$$

3. ПОСТРОЕНИЕ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ ТРЕТЬЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Введём обозначения:

$$\theta = \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial t}}, \quad \theta_0 = \frac{1}{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}}, \quad \psi_w = \frac{\omega_0}{\theta_0}, \quad \omega = \theta\psi,$$

$$\phi = C_A\theta$$

и вспомогательные соотношения

$$\Omega = b\frac{\partial \psi}{\partial t} = b\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{b}{\theta}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\omega}{\theta}\right),$$

$$\Phi = b\frac{\partial C_A}{\partial t} = b\frac{\partial C_A}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{b}{\theta}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\phi}{\theta}\right),$$

с учётом которых, интегральные соотношения (9)–(11) примут вид

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_0^1 uf(u)\theta du - w(s,0)f(0) =$$
$$= \beta\int_0^1 \left(1-u^2\right) f'(u)\theta du -$$
$$-\beta\int_0^1 f'(u)\omega du - \frac{f'(0)b_0}{\theta_0} - \int_0^1 \frac{bf''(u)}{\theta}du,$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_0^1 uf(u)\phi du - w(s,0)f(0)\frac{\phi_0}{\theta_0} =$$
$$= \beta\int_0^1 \left(1-u^2\right) f'(u)\phi du -$$
$$-\beta\int_0^1 f'(u)\frac{\phi\omega}{\theta}du - \frac{f'(0)b_0\phi_0}{\theta_0^2} -$$
$$-\int_0^1 f''(u)\frac{b\phi}{\theta^2}du - \left(\frac{1}{\mathrm{Sm}}+1\right)\int_0^1 f'(u)\Phi du,$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_0^1 uf(u)\omega du - w(s,0)f(0)\frac{\omega_0}{\theta_0} =$$
$$= \beta\int_0^1 \left(1-u^2\right) f'(u)\omega du -$$
$$-\beta\int_0^1 f'(u)\frac{\omega^2}{\theta}du - \frac{f'(0)b_0\omega_0}{\theta_0^2} -$$
$$-\int_0^1 f''(u)\frac{b\omega}{\theta^2}du - \frac{1}{\mathrm{Pr}} f(0)\Omega_0 -$$
$$-\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}+1\right)\int_0^1 f'(u)\Omega du -$$
$$-2\alpha_e^2\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\int_0^1 uf'(u)\frac{b}{\theta}du -$$
$$-\frac{1}{\mathrm{Sm}}\left(\frac{1}{\mathrm{Le}}-1\right)\int_0^1 \mathrm{B}\Phi du. \qquad (12)$$

Получив, в соответствии с идеей метода, интерполяционные многочлены для третьего приближения в виде:

$$\theta = \frac{1}{1-u}\left(\theta_0 + u\left(-\frac{9}{2}\theta_0 + 4\theta_1 - \frac{1}{2}\theta_2\right) + \right.$$
$$\left. + u^2\left(\frac{9}{2}\theta_0 - 6\theta_1 + \frac{3}{2}\theta_2\right)\right),$$

$$\omega = \omega_0 + u\left(-\frac{9}{2}\omega_0 + 6\omega_1 - \frac{3}{2}\omega_2\right) +$$
$$+ u^2\left(\frac{9}{2}\omega_0 - 9\omega_1 + \frac{9}{2}\omega_2\right),$$

$$\frac{b}{\theta} = (1-u)\left(\frac{b_0}{\theta_0} + u\left(-\frac{9}{2}\frac{b_0}{\theta_0} + 9\frac{b_1}{\theta_1} - \frac{9}{2}\frac{b_2}{\theta_2}\right) + \right.$$
$$\left. + u^2\left(\frac{9}{2}\frac{b_0}{\theta_0} - \frac{27}{2}\frac{b_1}{\theta_1} + \frac{27}{2}\frac{b_2}{\theta_2}\right)\right),$$

$$\phi = \frac{1}{1-u}\left(\phi_0 + u\left(-\frac{9}{2}\phi_0 + 4\phi_1 - \frac{1}{2}\phi_2\right) + \right.$$
$$\left. + u^2\left(\frac{9}{2}\phi_0 - 6\phi_1 + \frac{3}{2}\phi_2\right)\right),$$

$$\frac{\phi\omega}{\theta} = \frac{\phi_0\omega_0}{\theta_0} + u\left(-\frac{9}{2}\frac{\phi_0\omega_0}{\theta_0} + 6\frac{\phi_1\omega_1}{\theta_1} - \frac{3}{2}\frac{\phi_2\omega_2}{\theta_2}\right) +$$
$$+ u^2\left(\frac{9}{2}\frac{\phi_0\omega_0}{\theta_0} - 9\frac{\phi_1\omega_1}{\theta_1}\omega_1 + \frac{9}{2}\frac{\phi_2\omega_2}{\theta_2}\right),$$

$$\frac{b\phi}{\theta^2} = (1-u)\left(\frac{b_0\phi_0}{\theta_0^2} + u\left(-\frac{9}{2}\frac{b_0\phi_0}{\theta_0^2} + 9\frac{b_1\phi_1}{\theta_1^2} - \frac{9}{2}\frac{b_2\phi_2}{\theta_2^2}\right) + \right.$$
$$\left. + u^2\left(\frac{9}{2}\frac{b_0\phi_0}{\theta_0^2} - \frac{27}{2}\frac{b_1\phi_1}{\theta_1^2} + \frac{27}{2}\frac{b_2\phi_2}{\theta_2^2}\right)\right),$$

$$\Phi = 2u(1-u)\left(1 - \frac{\phi_0}{\theta_0}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{b_0}{\theta_0} + u\left(-\frac{9}{2}\frac{b_0}{\theta_0} + 9\frac{b_1}{\theta_1} - \frac{9}{2}\frac{b_2}{\theta_2}\right) + \right.$$
$$\left. + u^2\left(\frac{9}{2}\frac{b_0}{\theta_0} - \frac{27}{2}\frac{b_1}{\theta_1} + \frac{27}{2}\frac{b_2}{\theta_2}\right)\right),$$

$$\frac{\omega^2}{\theta} = (1-u)\left(\frac{\omega_0^2}{\theta_0} + u\left(-\frac{9}{2}\frac{\omega_0^2}{\theta_0} + 9\frac{\omega_1^2}{\theta_1} - \frac{9}{2}\frac{\omega_2^2}{\theta_2}\right) + u^2\left(\frac{9}{2}\frac{\omega_0^2}{\theta_0} - \frac{27}{2}\frac{\omega_1^2}{\theta_1} + \frac{27}{2}\frac{\omega_2^2}{\theta_2}\right)\right),$$

$$\frac{b\omega}{\theta^2} = (1-u)^2 \times$$
$$\times\left(\frac{b_0\omega_0}{\theta_0^2} + u\left(\frac{9}{2}\frac{b_0\omega_0}{\theta_0^2} - \frac{27}{2}\frac{b_1\omega_1}{\theta_1^2} + \frac{27}{2}\frac{b_2\omega_2}{\theta_2^2}\right) + u^2\left(\frac{9}{2}\frac{b_0\omega_0}{\theta_0^2} - \frac{81}{4}\frac{b_1\omega_1}{\theta_1^2} + \frac{81}{2}\frac{b_2\omega_2}{\theta_2^2}\right)\right),$$

$$\Omega = (1-u)\left(\Omega_0 + u\left(-\frac{9}{2}\Omega_0 + 9\Omega_1 - \frac{9}{2}\Omega_2\right) + u^2\left(\frac{9}{2}\Omega_0 - \frac{27}{2}\Omega_1 + \frac{27}{2}\Omega_2\right)\right),$$

$$\Omega_0 = \frac{b_0}{\theta_0}\left(-\frac{11}{2}\frac{\omega_0}{\theta_0} + 9\frac{\omega_1}{\theta_1} - \frac{9}{2}\frac{\omega_2}{\theta_2}\right),$$

$$\Omega_1 = \frac{b_1}{\theta_1}\left(-\frac{\omega_0}{\theta_0} - \frac{3}{2}\frac{\omega_1}{\theta_1} + 3\frac{\omega_2}{\theta_2}\right),$$

$$\Omega_2 = \frac{b_2}{\theta_2}\left(\frac{1}{2}\frac{\omega_0}{\theta_0} - 3\frac{\omega_1}{\theta_1} + \frac{3}{2}\frac{\omega_2}{\theta_2}\right),$$

$$\mathrm{B}\Phi = u(1-u)\left(u\left(27\mathrm{B}_1\Phi_1 - \frac{27}{4}\mathrm{B}_2\Phi_2\right) + u^2\left(-\frac{87}{2}\mathrm{B}_1\Phi_1 + \frac{81}{4}\mathrm{B}_2\Phi_2\right)\right),$$

$$\Phi_1 = 2u\left(1-\frac{\phi_0}{\theta_0}\right)\left(-\frac{9}{2}\frac{b_0}{\theta_0} + 9\frac{b_1}{\theta_1} - \frac{9}{2}\frac{b_2}{\theta_2}\right),$$

$$\Phi_2 = 2u\left(1-\frac{\phi_0}{\theta_0}\right)\left(\frac{9}{2}\frac{b_0}{\theta_0} - \frac{27}{2}\frac{b_1}{\theta_1} + \frac{27}{2}\frac{b_2}{\theta_2}\right),$$

подставим их в (12). С учётом (7) аппроксимирующая система в нормальной форме Коши относительно независимой переменной $\overline{x} = x/l$ примет вид (штрих обозначает дифференцирование по $\overline{x}$):

$$\theta_0' = \frac{2088}{49}m - \beta q\left(\frac{10859}{490}\theta_0 + \frac{920}{49}\theta_1 + \frac{277}{98}\theta_2\right) + \beta q\left(\frac{1467}{98}\omega_0 + \frac{1152}{49}\omega_1 + \frac{45}{98}\omega_2\right) + \frac{5085}{49}\frac{b_0 q}{\theta_0} - \frac{4266}{49}\frac{b_1 q}{\theta_1} - \frac{459}{49}\frac{b_2 q}{\theta_2},$$

$$\theta_1' = \frac{1002}{49}m - \beta q\left(\frac{10971}{980}\theta_0 + \frac{544}{49}\theta_1 + \frac{109}{196}\theta_2\right) + \beta q\left(\frac{1299}{196}\omega_0 + \frac{639}{49}\omega_1 + \frac{153}{196}\omega_2\right) + \frac{2406}{49}\frac{b_0 q}{\theta_0} - \frac{3699}{98}\frac{b_1 q}{\theta_1} - \frac{513}{49}\frac{b_2 q}{\theta_2},$$

$$\theta_2' = -\frac{216}{49}m - \beta q\left(-\frac{249}{98}\theta_0 - \frac{156}{49}\theta_1 + \frac{93}{98}\theta_2\right) + \beta q\left(-\frac{243}{98}\omega_0 - \frac{180}{49}\omega_1 + \frac{171}{98}\omega_2\right) - \frac{891}{49}\frac{b_0 q}{\theta_0} + \frac{1080}{49}\frac{b_1 q}{\theta_1} - \frac{135}{49}\frac{b_2 q}{\theta_2},$$

$$\phi_0' = \frac{2088}{49}m\frac{\phi_0}{\theta_0} - \beta q\left(\frac{10859}{490}\phi_0 + \frac{920}{49}\phi_1 + \frac{277}{98}\phi_2\right) + \beta q\left(\frac{1467}{98}\frac{\phi_0\omega_0}{\theta_0} + \frac{1152}{49}\frac{\phi_1\omega_1}{\theta_1} + \frac{45}{98}\frac{\phi_2\omega_2}{\theta_2}\right) + \frac{5085}{49}\frac{qb_0\phi_0}{\theta_0^2} - \frac{4266}{49}\frac{qb_1\phi_1}{\theta_1^2} - \frac{459}{49}\frac{qb_2\phi_2}{\theta_2^2} + q\left(\frac{1}{\mathrm{Sm}} - 1\right)\left(1-\frac{\phi_0}{\theta_0}\right)\times$$
$$\times\left(-\frac{1692}{1715}\frac{b_0}{\theta_0} + \frac{86292}{17015}\frac{b_1}{\theta_1} - \frac{86292}{17015}\frac{b_2}{\theta_2}\right),$$

$$\phi_1' = \frac{1002}{49}m\frac{\phi_0}{\theta_0} - \beta q\left(\frac{10971}{980}\phi_0 + \frac{544}{49}\phi_1 + \frac{109}{196}\phi_2\right) + \beta q\left(\frac{1299}{196}\frac{\phi_0\omega_0}{\theta_0} + \frac{639}{49}\frac{\phi_1\omega_1}{\theta_1} + \frac{153}{196}\frac{\phi_2\omega_2}{\theta_2}\right) + \frac{2406}{49}\frac{qb_0\phi_0}{\theta_0^2} - \frac{3699}{98}\frac{qb_1\phi_1}{\theta_1^2} - \frac{513}{49}\frac{qb_2\phi_2}{\theta_2^2} + q\left(\frac{1}{Sm} - 1\right)\left(1-\frac{\phi_0}{\theta_0}\right)\times$$
$$\times\left(-\frac{594}{1715}\frac{b_0}{\theta_0} + \frac{30294}{17015}\frac{b_1}{\theta_1} - \frac{30294}{17015}\frac{b_2}{\theta_2}\right),$$

$$\phi_2' = -\frac{216}{49}m\frac{\phi_0}{\theta_0} - \beta q\left(-\frac{249}{98}\phi_0 - \frac{156}{49}\phi_1 + \frac{93}{98}\phi_2\right) + \beta q\left(-\frac{243}{98}\frac{\phi_0\omega_0}{\theta_0} - \frac{180}{49}\frac{\phi_1\omega_1}{\theta_1} + \frac{171}{98}\frac{\phi_2\omega_2}{\theta_2}\right) -$$

$$-\frac{891}{49}\frac{qb_0\phi_0}{\theta_0^2}+\frac{1080}{98}\frac{qb_1\phi_1}{\theta_1^2}-\frac{135}{49}\frac{qb_2\phi_2}{\theta_2^2}+$$

$$+q\left(\frac{1}{Sm}-1\right)\left(1-\frac{\phi_0}{\theta_0}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{108}{343}\frac{b_0}{\theta_0}-\frac{5508}{3403}\frac{b_1}{\theta_1}+\frac{5508}{3403}\frac{b_2}{\theta_2}\right),$$

$$\omega_0'=\theta_0'\left(1-\tau_w\right),$$

$$\omega_1'=-\frac{2}{9}\omega_0'+\frac{100}{3}m\frac{\omega_0}{\theta_0}-$$

$$-\beta q\left(\frac{107}{9}\omega_0+\frac{58}{3}\omega_1-\frac{1}{3}\omega_2\right)+$$

$$+\beta q\left(\frac{100}{9}\frac{\omega_0^2}{\theta_0}-8\frac{\omega_1^2}{\theta_1}+\frac{59}{2}\frac{\omega_2^2}{\theta_2}\right)-$$

$$-\frac{160}{9}\frac{qb_0\omega_0}{\theta_0^2}+\frac{471}{2}\frac{qb_1\omega_1}{\theta_1^2}-312\frac{qb_2\omega_2}{\theta_2^2}-$$

$$-\frac{100}{3}\frac{q\Omega_0}{\Pr}+q\left(\frac{1}{\Pr}+1\right)\left(\frac{100}{9}\Omega_0-8\Omega_1+\frac{59}{2}\Omega_2\right)+$$

$$+q\alpha_e^2\left(\frac{1}{\Pr}-1\right)\left(\frac{4}{3}\frac{b_0}{\theta_0}+11\frac{b_1}{\theta_1}+2\frac{b_2}{\theta_2}\right)+$$

$$+\frac{q}{\mathrm{Sm}}\left(\frac{1}{\mathrm{Le}}-1\right)\left(\frac{33}{2}\mathrm{B}_1\Phi_1+\frac{3}{2}\mathrm{B}_2\Phi_2\right),$$

$$\omega_2'=\frac{1}{9}\omega_0'-\frac{80}{3}m\frac{\omega_0}{\theta_0}-$$

$$-\beta q\left(-\frac{130}{9}\omega_0-\frac{56}{3}\omega_1+\frac{14}{3}\omega_2\right)+$$

$$+\beta q\left(-\frac{122}{9}\frac{\omega_0^2}{\theta_0}+40\frac{\omega_1^2}{\theta_1}-53\frac{\omega_2^2}{\theta_2}\right)+$$

$$+\frac{422}{9}\frac{qb_0\omega_0}{\theta_0^2}-327\frac{qb_1\omega_1}{\theta_1^2}+426\frac{qb_2\omega_2}{\theta_2^2}+$$

$$+\frac{80}{3}\frac{q\Omega_0}{\Pr}+q\left(\frac{1}{\Pr}+1\right)\left(-\frac{122}{9}\Omega_0+40\Omega_1-53\Omega_2\right)+$$

$$+q\alpha_e^2\left(\frac{1}{\Pr}-1\right)\left(-\frac{16}{9}\frac{b_0}{\theta_0}-10\frac{b_1}{\theta_1}+8\frac{b_2}{\theta_2}\right)+$$

$$+\frac{q}{\mathrm{Sm}}\left(\frac{1}{\mathrm{Le}}-1\right)\left(-15\mathrm{B}_1\Phi_1+6\mathrm{B}_2\Phi_2\right). \quad (13)$$

Начальные условия к системе (13) выберем аналогично тому, как это было сделано в [4].

Выражение для интегрального теплового потока (3) в новых переменных примет вид

$$\bar{Q}=\int_0^{\bar{x}_k}\alpha_e\left(1-\alpha_e^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\frac{b_0}{\theta_0}\left(-\frac{11}{2}\frac{\omega_0}{\theta_0}+\right.$$

$$\left.+9\frac{\omega_1}{\theta_1}-\frac{9}{2}\frac{\omega_2}{\theta_2}\right)d\bar{x}. \quad (14)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аппроксимирующая система третьего приближения (13) позволяет вычислить аэродинамические характеристики гиперзвукового «замороженного» пограничного слоя с большей точностью (ранее, в работах [1–3, 5–7] использовались системы второго приближения). Далее, можно будет приступить к минимизации интегрального теплового потока (14), используя «простые» законы вдува [12], применение которых в задачах управления ламинарными пограничными слоями равновесно диссоциирующего и электропроводящего воздуха продемонстрировало возможность получить управления, очень близкие к оптимальным. Этот подход позволяет избежать трудоёмкого процесса вывода интегральных соотношений и системы обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимирующих сопряжённую систему. Анализ результатов вычислительных экспериментов по численной оптимизации тепломассообмена в ламинарном пограничном слое «замороженного» диссоциирующего воздуха на проницаемых цилиндрических поверхностях представляет собой предмет отдельного исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бильченко Н. Г.* Об оптимальном управлении тепломассообменом в ламинарном пограничном слое диссоциирующего газа / Н. Г. Бильченко, К. Г. Гараев // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – 2000. – № 3. – С. 17–19.

2. *Бильченко Н. Г.* Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверх-

ностях при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 83–94.

3. *Бильченко Н. Г.* Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2015. – № 1. – С. 5–8.

4. *Дородницын А. А.* Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя / А. А. Дородницын // Прикладная математика и техническая физика. – 1960. – № 3. – С. 111–118.

5. *Гараев К. Г.* Об оптимальном управлении тепломассообменом в ламинарном пограничном слое сжимаемого газа на проницаемых поверхностях / К. Г. Гараев // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1988. – № 3. – С. 92–100.

6. *Bilchenko N. G.* Optimization of heat and mass transfer on permeable cylinder under supersonic flow of electroconductive gas / N. G. Bilchenko, K. G. Garaev // International Conference "Research in hypersonic flows and hypersonic technologies". Section 3. Viscous hypersonic flow. TsAGI. – 1994. – P. 10–12.

7. *Бильченко Н. Г.* Оптимальное управление ламинарным пограничным слоем электропроводящего газа на телах вращения при сверхзвуковых режимах обтекания / Н. Г. Бильченко, К. Г. Гараев // Международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы математического моделирования и автоматизированного проектирования в машиностроении». Тезисы докладов. Секция 3. Моделирование и оптимизация процессов управления в машиностроении. – Казань : Изд-во КГТУ, 1995. – С. 29–31.

8. *Белов С. В.* Пористые металлы в машиностроении / С. В. Белов. – М. : Машиностроение, 1981. – 247 с.

9. *Дорренс У. Х.* Гиперзвуковые течения вязкого газа / У. Х. Дорренс. – М. : Мир, 1966. – 439 с.

10. *Дородницын А. А.* Ламинарный пограничный слой в сжимаемом газе / А. А. Дородницын // Сборник теоретических работ по аэродинамике. – М. : Оборонгиз, 1957. – С. 140–173.

11. *Лю Шэнь-Цюань.* Расчет ламинарного слоя в сжимаемом газе при наличии отсоса или вдува / Лю Шэнь-Цюань // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1962. – Т. 2, № 5. – С. 868–883.

12. *Бильченко Н. Г.* Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения «простых» законов вдува / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. – 2015. – № 1. – С. 95–102.

Бильченко Наталья Григорьевна – доцент кафедры Теплотехники и Энергетического Машиностроения, Казанского Национального Исследовательского Технического Университета (КНИТУ-КАИ) им. А. Н. Туполева, Казань, Российская Федерация.
E-mail: bilchnat@gmail.com

Bilchenko N. G. – Associate Professor of Department Heat Engineering and Power Engineering Machinery, Kazan National Research Technical University (KNRTU-KAI) named after A. N. Tupolev, Kazan, Russian Federation.
E-mail: bilchnat@gmail.com