УДК 518.4

ИССЛЕДОВАНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ С НЕЧЕТКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

О. А. Маликова, Т. М. Леденева, С. Н. Медведев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 24.09.2015 г.

Аннотация. В статье рассматривается транспортная задача с нечеткой целевой функцией и предлагается алгоритм для ее решения, основанный на принципе декомпозиции. Проведен анализ результатов вычислительного эксперимента работы и сформулированы основные выводы.
Ключевые слова: транспортная задача, нечеткое число, принцип декомпозиции.
Annotation. The article deals with transportation problem with fuzzy objective function. The solution algorithm based on decomposition principle is proposed. The analysis of computational experiment is performedand the key conclusions thereof are outlined in the article.
Keywords: transportation problem, fuzzy number, decomposition principle.

ВВЕДЕНИЕ

Транспортная задача относится к задачам целочисленного линейного программирования, причем целочисленность решений обеспечивается свойством унимодулярности матрицы ограничений [1]. В качестве оптимизационной модели транспортная задача используется при моделировании логистических, вычислительных, производственных процессов; известны приложения данной задачи для оптимального планирования грузопотоков и работы различных видов транспорта, в частности, железнодорожного [2].

В настоящее время существуют различные модификации и обобщения данной задачи, среди которых выделим нечеткую транспортную задачу [3, 4], в которой коэффициенты представлены нечеткими числами, а отношения между левыми и правыми частями ограничений являются нечеткими отношениями. Для такой задачи предложен генетический алгоритм [4], который позволяет получить субоптимальное решение в виде нечеткого множества. Теоретические исследования, касающиеся нечеткой транспортной задачи, практически отсутствуют. Цель статьи заключается в экспериментальном исследовании транспортной задачи с нечеткой целевой функцией для формирования гипотез, позволяющих оценить решение в условиях неопределенности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим постановку транспортной задачи с нечеткой целевой функцией. Пусть имеется m пунктов производства однородного продукта и n пунктов его потребления, при этом известны объемы продукта в каждом пункте производства $(a_1,...,a_m)$ и объемы его потребления в каждом пункте потребления $(b_1,...,b_n)$. Издержки по транспортировке груза представлены в виде матрицы $\tilde{C}$, элементы которой $\tilde{c}_{ij}$ $\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$ заданы приближенно в форме нечетких чисел и/или интервалов. Предполагается, что поставщики не являются одновременно потребителями, а потребители – поставщиками. Кроме того, считается, что производство сбалансировано с потреблением, т. е. суммарный объем производства равен суммарному объему потребления. Задача заключается в том, чтобы найти такие объемы перевозок, которые минимизировали бы суммарную стоимость перевозок.

Математическая модель транспортной задачи имеет вид

$$\begin{cases} Z(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{ij} x_{ij} \to \min \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, (i = \overline{1,m}) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, (j = \overline{1,n}) \\ x_{ij} > 0, (i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}). \end{cases} \tag{1}$$

Для представления коэффициентов целевой функции могут использовать различные типы нечетких чисел и интервалов.

В рамках проведенного исследования использовались треугольные и гауссовы нечеткие числа [5].

Треугольным нечетким числом A с центром в точке a, левой шириной $l > 0$ и правой шириной $r > 0$ называется нечеткое множество с функцией принадлежности

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{a-x}{l}, & \text{если } a - l \le x < a, \\ 1, & \text{если } x = a, \\ 1 - \dfrac{x-a}{r}, & \text{если } a < x \le a + r, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2}$$

Треугольное нечеткое число задается параметрами (a, l, r).

Нечетким гауссовым числом A с центром в точке a и параметром кривизны $\sigma > 0$ называется нечеткое множество с функцией принадлежности

$$\mu_A(x) = e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{3}$$

В этом случае нечеткое число задается параметрами (a, σ).

Преимуществом перечисленных типов нечетких чисел является простота модификации параметров; легко обеспечивается выполнение условия разбиения единицы; для их задания требуется малый объем данных. В отличие от треугольной функции принадлежности, которая не является дифференцируемой, дифференцируемость гауссовой функции дает возможность проведения теоретического анализа нечетких моделей.

К важнейшим характеристикам нечетких чисел (нечетких множеств) относится понятие α-среза – обычного множества A_α, которое определяется следующим образом [6]:

$$A_\alpha = \{x : \mu_A(x) \ge \alpha\}. \tag{4}$$

Семейство α-срезов $C_A = \{A_\alpha : \alpha \in (0,1]\}$ представляет собой монотонную последовательность, которая удовлетворяет условию

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in (0,1] \left(\alpha_1 < \alpha_2 \to A_{\alpha_2} \subset A_{\alpha_1}\right), \tag{5}$$

а, следовательно, A_α есть возрастающая функция от параметра α.

Важно, что если функция принадлежности является выпуклой, то все α-срезы – выпуклые множества [7].

Для треугольных нечетких чисел α-срез имеет вид замкнутого интервала (отрезка)

$$A_\alpha = [a - l(1-\alpha); a + r(1-\alpha)], \tag{6}$$

для гауссовых чисел

$$A_\alpha = \left[a = \sigma\sqrt{-2\ln\alpha}; a + \sigma\sqrt{-2\ln\alpha}\right]. \tag{7}$$

Таким образом каждое нечеткое число можно представить совокупностью α-срезов

$$A = \{(\alpha / A_\alpha)\}_{\alpha \in (0,1]}. \tag{8}$$

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ С НЕЧЕТКОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИЕЙ

Одним из базовых подходов к решению задач с нечеткими коэффициентами является принцип декомпозиции, который лежит в основе следующего утверждения [6]:

Каждое нечеткое множество можно представить в виде

$$A = \max_\alpha \{a \cdot A_\alpha\}, \tag{9}$$

где $\alpha \in (0,1]$, A_α – слабый α-срез нечеткого множества A.

На основании данного принципа задача (1) преобразуется к интервальной транспортной задаче, в которой коэффициенты целевой функции представлены интервалами (замкнутыми)

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} [\underline{c_{ij}}^\alpha, \overline{c}_{ij}^\alpha] x_{ij} \to \min. \tag{10}$$

Задача с коэффициентами в форме треугольных нечетких чисел $\tilde{c}_{ij} = (c_{ij}, l_{ij}, r_{ij})$ преобразуется к совокупности задач с коэффициентами

$$\tilde{c}_{ij} = \left[c_{ij} - l_{ij}(1-\alpha); c_{ij} + r_{ij}(1-\alpha)\right],\ \alpha \in (0,1], \quad (11)$$

а задача с коэффициентами в форме гауссовых чисел $\tilde{c}_{ij} = (c_{ij}, \sigma_{ij})$ преобразуется к совокупности задач с коэффициентами

$$\tilde{c}_{ij} = \left[c_{ij} - \sigma_{ij}\sqrt{-2\ln\alpha}; c_{ij} + \sigma_{ij}\sqrt{-2\ln\alpha}\right],$$

$$\alpha \in (0,1]. \quad (12)$$

Легко заметить, что при заданном значении α минимальное значение целевой функции с коэффициентами в указанных интервалах достигается при $C = \left\{\underline{c_{ij}^{\alpha}}\right\}_{m\times n}$, а максимальное – при $C = \left\{\overline{c_{ij}^{\alpha}}\right\}_{m\times n}$.

Результатом решения интервальной транспортной задачи является интервал, однако, с учетом правил интервальной арифметики величина этого интервала может быть существенной, поэтому важно оценить, как ведет себя решение на границах. В рамках исследования для каждого α-среза коэффициентов целевой функции решалась транспортная задача в трех характерных точках – на границах интервала и в его середине. Таким образом, для каждого α были найдены минимальные затраты на транспортировку товара и три оптимальных плана перевозок: X_{left}^{α} на левой границе, X_{right}^{α} на правой границе и X_{mid}^{α} в середине интервала.

Обобщая вышесказанное, можно сформулировать следующий алгоритм:

Шаг 1. На основе формализации приближенной информации о стоимости перевозок сформулировать модель транспортной задачи с коэффициентами в форме нечетких чисел.

Шаг 2. Для выбранного вида нечеткого числа и заданного шага h сформировать последовательность значений параметра $\alpha \in (0,1]$.

Шаг 3. Преобразовать коэффициенты, представленные в виде нечетких чисел, к интервальным коэффициентам по формулам (11) и (12).

Шаг 4. Разбить интервальную задачу на три обычных задачи: на правой границе, на левой границе и в середине интервала.

Шаг 5. Применить метод потенциалов для решения полученных транспортных задач, и для каждого значения α найти оптимальный план и минимальную стоимость перевозки на левой и правой границах, а также в середине интервала.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Для исследования транспортной задачи с нечеткой целевой функцией была разработана компьютерная программа и проведен вычислительный эксперимент со следующими ограничениями на параметры нечетких чисел:

1) l_{ij}, r_{ij} – произвольные коэффициенты неопределенности нечетких треугольных чисел;

2) $l_{ij}, r_{ij} \in [0,1]$ – коэффициенты, задающие небольшие отклонения от модального значения, т. е. в отличии от 1) уровень неопределенности коэффициентов небольшой;

3) $l_{ij} = l, r_{ij} = r; l, r \in [0,1]$ – коэффициенты в форме симметричных треугольных нечетких чисел с небольшим уровнем неопределенности;

4) l_{ij}^{*} – коэффициент, при котором c_{ij}^{*} является наименьшим числом среди всех остальных величин $\underline{c_{ij}}$;

5) (a_{ij}, σ_{ij}) – коэффициенты в форме симметричных гауссовых чисел с произвольными значениями отклонения σ_{ij};

6) $(a_{ij}, \sigma), \sigma \in [0,1]$ – коэффициенты в форме симметричных гауссовых чисел с небольшими отклонениями от модального значения.

В рамках вычислительного эксперимента рассматривались транспортные задачи с $m = 5, 10, 15;\quad n = 5, 10, 20;$ модальные значения нечетких чисел формировались случайным образом; коэффициенты неопределенности $l,\ r,\ \sigma$ выбирались в соответствии с 1)–6).

Анализ результатов вычислительного эксперимента позволяет сформулировать следующие утверждения.

<u>Утверждение 1.</u> Пусть в транспортной задаче коэффициенты неопределенности заданы в виде нечетких чисел $\tilde{c}_{ij} = (c_{ij}, l_{ij}, r_{ij})$, где l_{ij} и r_{ij} – соответственно левый и правый коэффициенты неопределенности для каждой

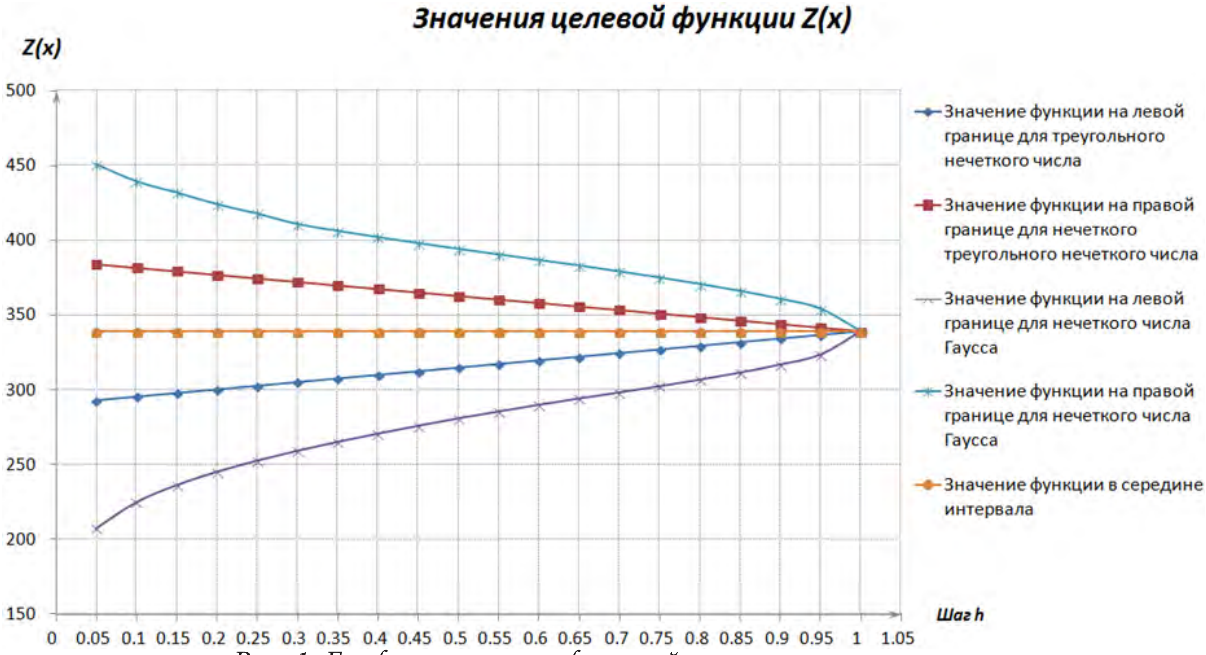

Рис. 1. Графики целевых функций в зависимости от α

пары индексов (i, j), тогда существуют уровень α^* и такое значение h^0, для которых $X^{\alpha^*+h^0} = X^{\alpha^*}$, найдется оптимальный план перевозок X^{α^*}, который не изменится при дальнейшем увеличении α с шагом h^0.

Утверждение 2. В транспортной задаче с коэффициентами в виде не обязательно симметричных нечетких треугольных чисел $\tilde{c}_{ij} = (c_{ij}, l_{ij}, r_{ij})$ при $\alpha \to 1$ значения целевой функции на левой границе интервала возрастают, на правой границе – убывают, и последовательно приближаются к значению целевой функции $Z_{mid}(x)$, соответствующей $\alpha = 1$.

Утверждение 3. (обобщение 2). В транспортной задаче с коэффициентами в виде нечетких чисел $\tilde{c}_{ij}$ при $\alpha \to 1$ значения целевой функции на левой границе интервала возрастают, на правой границе – убывают, и последовательно приближаются к значению целевой функции $Z_{mid}(x)$, соответствующей $\alpha = 1$.

Утверждение 4. Пусть в одной транспортной задаче коэффициенты целевой функции заданы в виде симметричных нечетких треугольных чисел $\tilde{c}'_{ij} = (c'_{ij}, \rho_{ij}, \rho_{ij})$, в другой задаче коэффициенты заданы в форме гауссовых чисел $\tilde{c}''_{ij} = (c''_{ij}, \rho_{ij})$, при этом для каждой пары индексов (i, j) выполняются соотношения: $\rho_{ij} \in (0,1)$, $c'_{ij} - \rho_{ij} > 0$ и $c''_{ij} - \rho_{ij} > 0$, тогда независимо от вида нечеткого числа с увеличением параметра α значения целевых функций на левой и правой границах сходятся к значению целевой функции $Z_{mid}(x)$, причем при фиксированном α разброс значений целевой функции на границах для задачи с гауссовыми числами превосходит аналогичную величину для задачи с треугольными числами.

На рис. 1 графически проиллюстрирован данный вывод.

Утверждение 5. Для двух транспортных задач, в которых коэффициенты целевой функции представлены соответственно нечеткими гауссовыми числами $\tilde{c}^1_{ij} = (c^1_{ij}, \sigma_1)$ и $\tilde{c}^2_{ij} = (c^2_{ij}, \sigma_2)$, где $\sigma_1 \le \sigma_2$, имеет место включение $\left[Z^{\sigma_1}_{left}(x), Z^{\sigma_1}_{right}(x)\right] \subset \left[Z^{\sigma_2}_{left}(x), Z^{\sigma_2}_{right}(x)\right]$.

Утверждение 6. Пусть X_{left}, X_{right}, X_{mid} – решения транспортной задачи на левой, правой границах и в середине интервала $\left[\underline{c}^{\alpha}_{ij}, \overline{c}^{\alpha}_{ij}\right]$ соответственно. Зафиксируем пару индексов (k,l). Пусть $U^{(k,l)}_{left}$, $U^{(k,l)}_{right}$ и $U^{(k,l)}_{mid}$ – множества возможных значений элемента x_{kl} X_{left}, X_{right}, X_{mid} соответственно. Для каждого x_{kl} определим относительные частоты $P^{(k,l)}_{left}$, $P^{(k,l)}_{right}$ и $P^{(k,l)}_{mid}$ с учетом количества рассматриваемых значений параметра α. Через $\left(U^{(k,l)}_{left}, P^{(k,l)}_{left}\right)$, $\left(U^{(k,l)}_{right}, P^{(k,l)}_{right}\right)$ и $\left(U^{(k,l)}_{mid}, P^{(k,l)}_{mid}\right)$

обозначим распределения частот на множестве возможных значений элементов x_{kl} в матрицах X_{left}, X_{right}, X_{mid}, соответственно. Тогда если для каждого распределения точки максимума (моды) совпадают и равны x^*_{kl}, то в решении нечеткой транспортной задачи $x_{kl} = x^*_{kl}$.

Рассмотренный подход к решению нечеткой транспортной задачи, основанный на анализе частот появления значений элементов x_{ij}, позволяет с высокой степенью вероятности включить некоторые элементы матрицы решений в оптимальный план перевозок. Так, например, в табл. 1 жирным шрифтом выделены те значения элементов, вероятность которых равна 1.

Таблица 1

Результаты вычисления относительных частот для x_{ij}

x_{ij}	$\tilde{m}_{ij}^{left}$	$\tilde{m}_{ij}^{right}$	$\tilde{m}_{ij}^{mid}$	x_{ij}	$\tilde{m}_{ij}^{left}$	$\tilde{m}_{ij}^{right}$	$\tilde{m}_{ij}^{mid}$
x_{12}	6.25	7.8	8.1	x_{36}	5.55	3.8	4.1
x_{13}	1.6	**0**	**0**	x_{43}	**19**	**19**	**19**
x_{16}	1.95	2.2	1.9	x_{53}	1.5	**0**	**0**
x_{24}	17.3	**15**	**15**	x_{54}	5.75	**8**	**8**
x_{25}	6.25	**7**	**7**	x_{55}	0.75	**0**	**0**
x_{26}	1.5	**3**	**3**	x_{61}	2.65	**0**	0.3
x_{31}	10.24	13	12.7	x_{62}	4.45	**4**	3.7
x_{32}	1.1	0.2	0.2	x_{63}	3.9	**7**	**7**

Так, для элемента x_{43} можно сделать вывод, что 19 единиц продукции необходимо перевезти от 4-го поставщика к 3-му потребителю. В том случае, если максимумы у каждого распределения частот разные (рис. 2), как у элемента x_{12}, требуются дополнительные исследования, например, сокращение размерности задачи на основании уже точно найденного количества перевозок и повторение алгоритма решения транспортной задачи меньшей размерности, или предоставление дополнительной информации, формирование новых балансовых соотношений.

Таким образом, на основе вычислительного эксперимента были проанализированы результаты и сформулирован ряд основных выводов.

Рис. 2. График частот элемента x_{12}

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Классическая постановка транспортной задачи предполагает, что ее параметры имеют числовое представление. Однако зачастую исходная информация носит приближенный характер, поэтому, используя для ее формализации нечеткие числа, получаем такую задачу, к которой классические алгоритмы применить напрямую невозможно. В статье показано, что принцип декомпозиции является эффективным и для данного класса задач. Утверждения, сформулированные на основе результатов вычислительного эксперимента, описывают поведение целевой функции и оптимального решения для различных типов нечетких чисел. Практическое значение утверждения 6 заключается в том, что оно позволяет сформировать множество необходимых для оптимальности всего плана перевозок и, тем самым, сократить размерность задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рыбников К. К.* Введение в дискретную математику и теорию решения экстремальных задач на конечных множествах / К. К. Рыбников. – М. : Гелиос АРВ, 2010. – 320 с.

2. *Васильев О. В.* Транспортная задача и оптимизация грузоперевозок / О. В. Васильев, Т. М. Леденева // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – Т. 7, № 11 – С 82–84.

3. *Фидлер М.* Задачи линейной оптимизации с неточными данными / М. Фидлер, Й. Недома, Я. Рамик, И. Рон, К. Циммерман. – М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт исследований, 2008. – 288 с.

4. *Chanas S.* Interval and fuzzy extensions of classical transportation problems / Chanas S., Delgado M., Verdegay J. L. // Transportation Planning and Technology, 1993. – Vol. 18, № 2. – Pp. 203–218.

5. *Пегат А.* Нечеткое моделирование управления / А. Пегат; пер. с анг. А. Г. Подвесовского, Ю. В. Тюменцева, науч. ред. Ю. В. Тюменцева. – 2-е изд. – М : БИНОМ, 2013. – 798 с.

6. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман; пер. с франц. В. Б. Кузьминой, науч. ред. С. И. Травкиной. – М. : Радио и связь, 1982. – 432 с.

7. Леденева Т. М. Обработка нечеткой информации: учебное пособие / Т. М. Леденева. – Воронеж : Воронежский государственный университет, 2006. – 233 с.

Маликова Ольга Андреевна – аспирант кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий факультета ПММ, Воронежский государственный университет.
Тел. 8-951-876-98-91
E-mail: olyamalikova@mail.ru

Malikova Olga A. – Post graduate student of Applied Mathematics and Informatics, Voronezh State University.
Tel.: 8-951-876-98-91
E-mail: olyamalikova@mail.ru

Леденева Татьяна Михайловна – зав. каф. вычислительной математики и прикладных информационных технологий факультета ПММ, доктор технических наук, Воронежский государственный университет.
Тел. 8-903-850-29-96
E-mail: ledeneva-tm@yandex.ru

Ledeneva Tatyana M. – Head of the Department of Computational Mathematics and Applied Information Technologies, PhD in Technical Science, Voronezh State University.
Tel.: 8-903-850-29-96
E-mail: ledeneva-tm@yandex.ru

Медведев Сергей Николаевич – преподаватель каф. вычислительной математики и прикладных информационных технологий факультета ПММ, кандидат физико-математических наук, Воронежский государственный университет.
Тел. 8-906-671-62-05
E-mail: s_n_medvedev@mail.ru

Medvedev Sergey N. – Lecturer at the Department of Computational Mathematics and Applied Information Technologies, PhD in Physical and Mathematical Sciences, Voronezh State University.
Tel.: 8 906 671 62 05
E-mail: S_N_Medvedev@mail.ru