УДК 62-50

СИНТЕЗ МОДАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ОДНОРОДНОГО ЭЛЕМЕНТА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

О. О. Власова, А. В. Дылевский

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 29.09.2015 г.

Аннотация. Решается задача построения регулятора для однородного элемент с распределенными параметрами, испытывающего продольные колебания. Для решения поставленной задачи применяется метод синтеза модальных регуляторов для объектов с мероморфной передаточной функцией.
Ключевые слова: объект с распределенными параметрами, передаточная функция, мероморфная функция, модальный регулятор, астатизм.
Annotation. The problem of constructing a controller for a homogeneous element with distributed parameters experiencing longitudinal oscillations is solved. To solve this problem the method of synthesis of modal controllers for plants with meromorphic transfer function is applied.
Keywords: distributed plant, transfer function, meromorphic function, modal controller, astatism.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОДНОРОДНОГО ЭЛЕМЕНТА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрим однородный элемент с распределенными параметрами, испытывающий продольные колебания [1]. Расчетная механическая схема однородного элемента с распределенными параметрами приведена на рис. 1.

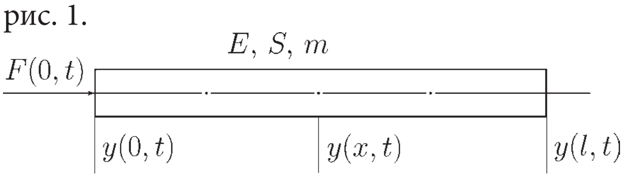

Рис. 1

Уравнение колебаний элемента имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \qquad (1)$$

где $a^2 = ES / m$; S – площадь поперечного сечения элемента, E – модуль упругости элемента, m – масса элемента, l – длина элемента. Для любого сечения элемента $0 \le x \le l$ в момент времени $t = 0$ имеем начальные условия

$$y(x,t)\big|_{t=0} = \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \qquad (2)$$

К левому концу элемента приложена внешняя сила $F(0,t)$, а правый конец элемента свободен. Поэтому граничные условия можно записать следующим образом:

$$-ES \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = F(0,t); \quad \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0. \qquad (3)$$

Введем в рассмотрение обозначение

$$u(t) = \frac{F(0,t)}{ES}.$$

В новых обозначениях граничные условия (3) имеют вид

$$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = -u(t); \quad \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0. \qquad (4)$$

2. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ОДНОРОДНОГО ЭЛЕМЕНТА

Рассмотрим далее прямой метод вычисления передаточной функции объекта управления. Применяя к задаче (1), (2), (4) преобразование Лапласа по временной переменной t, получаем следующую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$p^2 Y(x,p) = a^2 \frac{\mathrm{d}^2 Y(x,p)}{\mathrm{d}x^2}; \qquad (5)$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}Y(x,p)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = -U(p), \quad \left.\frac{\mathrm{d}Y(x,p)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=l} = 0. \qquad (6)$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения (5) имеет вид

$$Y(x,p) = A(p)e^{-px/a} + B(p)e^{px/a}, \qquad (7)$$

где $A(p)$ и $B(p)$ – некоторые функции комплексного переменного p, определяемые граничными условиями (6). Найдем функции $A(p)$ и $B(p)$. С этой целью подставляем

$$\frac{\mathrm{d}Y(x,p)}{\mathrm{d}x} = \frac{p}{a}\left(B(p)e^{px/a} - A(p)e^{-px/a}\right)$$

в условия (6). Тогда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -U(p) = \dfrac{p}{a}\left(B(p) - A(p)\right), \\ 0 = \dfrac{p}{a}\left(B(p)e^{pl/a} - A(p)e^{-px/a}\right), \end{cases}$$

из которой находим

$$A(p) = \frac{ae^{pl/a}}{2p\,\mathrm{sh}(pl/a)}U(p),$$

$$B(p) = \frac{ae^{-pl/a}}{2p\,\mathrm{sh}(pl/a)}U(p).$$

Подставляя найденные значения $A(p)$ и $B(p)$ в формулу (7), после элементарных преобразований получаем передаточную функцию рассматриваемого элемента

$$Y(x,p) = \frac{a\,\mathrm{ch}(p(x-l)/a)}{p\,\mathrm{sh}(pl/a)}U(p) = \qquad (8)$$
$$= W(x,p)U(p).$$

Очевидно, что $W(x,p)$ является мероморфной функцией [2], имеющей полюсы на мнимой оси

$$p_n = \frac{\pi n a}{l} j, \quad j^2 = -1, \ n \in \mathbb{Z}. \qquad (9)$$

Если выходной сигнал однородного элемента с распределенными параметрами рассматривается при $x = l$, то передаточная функция рассматриваемого элемента имеет вид

$$W(p) = W(l,p) = \frac{k}{p\,\mathrm{sh}\,\tau p}. \qquad (10)$$

Здесь $k = a$ и $\tau = l/a$.

3. СИНТЕЗ МОДАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА

Рассмотрим теперь задачу построения модального регулятора для однородного механического элемента с распределенными параметрами, испытывающего продольные колебания, передаточная функция которого определяется формулой (10). Структурная схема системы автоматического управления представлена на рис. 2.

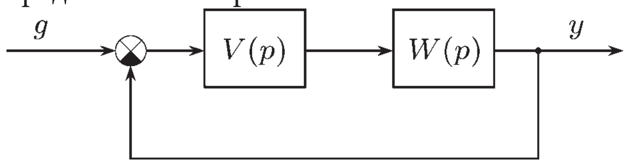

Рис. 2

Воспользуемся методом синтеза модальных регуляторов для объектов с мероморфной передаточной функцией [3]. В данном случае числитель и знаменатель передаточной функции имеют соответственно вид

$$B(p) = k, \ A(p) = p\,\mathrm{sh}\,\tau p. \qquad (11)$$

Пусть распределение полюсов передаточной функции $\Phi(p)$ замкнутой системы задается целой функцией

$$D(p) = (\tau p + \beta)\,\mathrm{sh}^2(\tau p + \lambda), \qquad (12)$$

где $\beta > 0$ и $\lambda > 0$ – некоторые произвольные действительные числа.

Так целая функция $A(p)$ имеет своими нулями (9) и $D(p)$ определяется равенством (12), то после элементарных преобразований получаем передаточную функцию регулятора

$$V(p) = \frac{(\tau p + \beta)\,\mathrm{sh}^2\lambda + \beta\,\mathrm{sh}^2 2\lambda\,\mathrm{sh}\,\tau p}{k((\tau p + \beta)\,\mathrm{sh}(\tau p + 2\lambda) - \beta\,\mathrm{sh}\,2\lambda)}.$$

Поэтому передаточная функция замкнутой системы управления определяется следующим равенством:

$$\Phi(p) = \frac{W(p)V(p)}{1 + W(p)V(p)} =$$
$$= \frac{(\tau p + \beta)\,\mathrm{sh}^2\lambda + \beta\,\mathrm{sh}^2 2\lambda\,\mathrm{sh}\,\tau p}{(\tau p + \beta)\,\mathrm{sh}^2(\tau p + \lambda)}.$$

Нетрудно проверить, что синтезированная система управления имеет астатизм 1-го порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рассудов Л. Н., Мядзель В. Н.* Электроприводы с распределенными параметрами механических элементов. – Л. : Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1987. – 144 с.

2. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М. : Наука, 1987. – 688 с.

3. *Dylevskii A. V.* Constructing modal control systems for plants with meromorphic transfer function // Journal of computer and system sciences international. – 2008. – Vol. 47, No. 4. – p. 346–351.

Власова Ольга Олеговна – аспирантка кафедры технической кибернетики и автоматического регулирования факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация.
E-mail: vlasovamath@gmail.com

Дылевский Александр Вячеславович – профессор кафедры технической кибернетики и автоматического регулирования факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, доктор технических наук, г. Воронеж, Российская Федерация.
E-mail: nefta@yandex.com

Vlasova Olga Olegovna – Post-graduate student of the Department of technical cybernetics and automatic control, the Faculty of applied mathematics, information science, and mechanics at Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: vlasovamath@gmail.com

Dylevskii Alexander Vyacheslavovich – Professor of the Department of technical cybernetics and automatic control, the Faculty of applied mathematics, information science, and mechanics at Voronezh State University, Doctor of engineering sciences, Voronezh, Russian Federation.
E-mail: nefta@yandex.com