УДК 519.61

ЧИСЛОВЫЕ МОДЕЛИ АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО КЛАССА

М. Д. Сластихина

Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А.

Поступила в редакцию 19.02.2015 г.

Аннотация. Проектирование адаптивных систем – это современный стандарт разработки программного обеспечения. Кроме того, адаптивность является одним из основных требований ко всем современным системам. В данной работе рассмотрены числовые модели, которые можно применить при проектировании адаптивных систем.
Ключевые слова: адаптивная система, числовая модель, группа перестановок, система образующих.
Annotation. Adaptive systems design is a modern standard of software development. Furthermore, adaptability is a basic requirement for all modern systems. In this paper we consider numerical models that can be applied in the design of adaptive systems.
Keywords: adaptive system, the numerical model, the group of permutations of generators.

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании системы большое внимание уделяется длительности и эффективности ее эксплуатации. Одним из факторов, влияющих на эти критерии, является адаптивность. Выделяют целый ряд способов проектирования адаптивной системы [1, 2]. В данной работе основное внимание уделено особенностям моделирования дискретной адаптивной системы с достижением адаптивности за счет функциональной избыточности. Под функциональной избыточностью понимают возможность некоторых модулей системы выполнять функции других модулей [3].

В связи с этим возникают задачи по определению наличия в системе функционально избыточной, а также вопрос о построении функционально избыточной системы. Для того, чтобы определить, является ли система функционально избыточной, необходимо найти в ней такие модули, которые способны заменить своей работой другие модули. Для этого предлагается для каждого модуля находить множество модулей, работу которых он может заменить. Тогда можно выбрать наиболее важные модули в системе и оценить ее функциональную избыточность.

При разработке новой системы можно использовать модули, которые изначально могут заменять большое количество других модулей. Это позволит не только разработать функционально избыточную систему, но и сократить число разрабатываемых модулей. Назовем задачу нахождения таких модулей задачей синтеза. Заметим, что задача синтеза в общем случае алгоритмически не разрешима [4], однако возможно нахождение решения для частных случаев этой задачи.

В данной работе исследуются системы, моделируемые конечными детерминированными автоматами (КДА). Рассматриваются пять различных групп универсальных автоматов. В каждой группе задание автоматов происходит по единой схеме, автоматы отличаются количеством состояний. Автоматы оцениваются по следующим критериям: количество входных символов автомата и максимальная длина восстанавливающей последовательности. Для некоторых групп автоматов выведены формулы, накладывающие ограничения на длину восстанавливающей последовательности.

АНАЛИЗ ЧИСЛОВЫХ МОДЕЛЕЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО ИЗБЫТОЧНЫХ СИСТЕМ

Целый ряд работ посвящен моделированию дискретных функционально избыточных систем [4–8]. В них предлагается в качестве основы использовать конечный детерминированный автомат (КДА), состоящий из трех элементов: множества входных сигналов, множества состояний и функции переходов. Введем основные обозначения:

$S = \{s_1, ..., s_m\}$ – конечное непустое множество внутренних состояний автомата, где m – количество состояний автомата;

$X = \{x_1, ..., x_n\}$ – конечное непустое множество входных сигналов автомата, где n – количество входных символов автомата;

$\delta: X \times S \to S$ – функция переходов автомата,

$t_x = x_1 x_2 ...$ – некоторая последовательность входных сигналов автомата;

$\overline{\delta}_{x_1 x_2}(s) = \delta_{x_1}(\delta_{x_2}(s))$ – преобразование, индуцируемое последовательностью входных символов автомата.

Однако, для того чтобы проанализировать функциональную избыточность системы, спроектированной с использованием КДА, необходимо оценить возможность одного КДА выполнять функции другого. Назовем автомат A, способный выполнять функции автомата B или семейства автоматов, универсальным для автомата B или семейства автоматов. Исследованию и применению теории универсальных автоматов посвящен ряд работ.

Впервые термин универсальный автомат ввел А. Тюринг. Он доказал, что можно построить универсальный автомат, однако в своих исследования ограничил роль автомата выполнением вычислительных функций. По А. Тьюрингу, универсальный автомат – это автомат, способный изменить закон своего функционирования в зависимости от последовательности входных данных. Изначально в таком автомате отсутствуют функции, зависящие от состояния и входного слова автомата [9].

В своей работе «Общая и логическая структура автоматов» [10], Дж. фон Нейман отмечал, что для решения сложных задач классический подход к теории автоматов имеет свои недостатки: большие габариты составных элементов и ограниченная надежность их работы. В результате исследований, была предложена концепция универсального автомата, отличного от универсального автомата Тьюринга. Автомат Дж. фон Неймана предполагает не изменяемость законов своего функционирования, а разработка нового автомата [9–11]. Концепция универсального автомата, порождающего некоторый формальный язык исследована в работах [13–15].

Дадим формальное определение универсального автомата.

Определение 1.

Пусть задано семейство автоматов $\{A_i = (X_i, S, \delta^{(i)})\}_{i \in I}, |S| = m.$ Автомат $A = (X, S, \delta)$ назовем универсальным для семейства автоматов $\{A_i\}_{i \in I}$, если

$$(\forall x \in X_i)(\forall i \in I)\,(\exists t_x \in X^*)(\overline{\delta}_{t_x}(s) = \delta_x^{(i)}(s)),$$

где $s = (0, ..., m-1)$, т. е. для любого входного сигнала x любого автомата из семейства $\{A_i\}_{i \in I}$ существует последовательность входных сигналов автомата A, индуцирующая преобразование, эквивалентное преобразованию, индуцируемому сигналом x автомата из семейства $\{A_i\}_{i \in I}$.

Определение 2.

Пусть текущее поведение системы М моделируется автоматом $A = (X, S, \delta)$, $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, а требуемое – автоматом $B = (X, S, \delta')$, $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Без ограничения общности будем считать, что

$$\delta'_{x_1}(s) \neq \delta_{x_1}(s), ..., \delta'_{x_h}(s) \neq \delta_{x_h}(s),$$

$$\delta'_{x_{h+1}}(s) = \delta_{x_{h+1}}(s), ..., \delta'_{x_n}(s) = \delta_{x_n}(s).$$

Последовательность t_i будем называть восстанавливающей последовательностью для преобразования δ'_{x_i} (или для входного сигнала x_i).

Для того, чтобы оценить функциональную избыточность системы необходимо определить группу автоматов, способных моделировать работу других автоматов. Для уже разработанной системы для каждого автомата можно найти семейство автоматов, для которых заданный автомат является универсальным. Для системы, проектирующейся изначально с использованием принципов функциональной избыточности, удобнее брать за основу автомат, который изначально способен заменять работу как можно большего числа автоматов.

В теории универсальных автоматов была выделена задача по нахождению автомата, универсального для всего класса КДА. Было выявлено, что она является алгоритмически неразрешимой [4]. В тоже время, существуют решения для некоторых специальных классов КДА. В частности, рассмотрим групповые автоматы. Под групповым понимается автомат, функция переходов которого задана семейством перестановок.

Заметим, что для того, чтобы групповой автомат был универсален для всех групповых автоматов с тем же числом состояний достаточно того, чтобы семейство перестановок, задающее функцию переходов этого автомата, было системой образующих симметрической группы перестановок [5].

Рассмотрим известные системы образующих симметрической группы перестановок[5]:

1. $\Delta_1 = \{(i_1, i_2), i_1 \in S, i_2 \in S,\ i_1 \neq i_2\}$.
2. $\Delta_2 = \{(1, i), i = \overline{2, m}\}$.
3. $\Delta_3 = \{(i, i+1), i = \overline{1, m-1}\}$.
4. $\Delta_4 = \{(1, 2), (1, 2, ..., m)\}$.
5. $\Delta_5 = \{(1, 2, ..., m-1), (1, 2, ..., m)\}$.

Каждая система образующих задает автомат, универсальный для класса групповых автоматов с m состояниями. Сравним эти автоматы по следующим параметрам:

• количество входных символов;

• максимальная длина восстанавливающей последовательности.

Пример 1.

Пусть задан автомат $A = (X, S, \Delta)$ и автомат $B = (X_1, S, \Delta_1)$, где $X = \{a, b\}$, $S = \{1, 2, 3\}$, $\Delta = \{\delta_a, \delta_b\}$, $X_1 = \{c, d, e\}$, $\Delta_1 = \{\delta_c, \delta_d, \delta_e\}$,

$$\delta_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\delta_b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\delta_c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\delta_d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\delta_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Заметим, что

$$\delta_c = \delta_b(\delta_a)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \delta_b(\delta_a(1)) & \delta_b(\delta_a(2)) & \delta_b(\delta_a(3)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \delta_b(2) & \delta_b(1) & \delta_b(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Аналогично,

$$\delta_d = \delta_b(\delta_d), \tag{7}$$

$$\delta_b = \delta_b(\delta_b(\delta_a)). \tag{8}$$

Тогда автомат A является универсальным автоматом для автомата B, с восстанавливающими последовательностями $t_c = ab$, $t_d = bb$, $t_e = abb$.

Очевидно, что чем больше входных символов у автомата, тем больше памяти он занимает, а чем длиннее восстанавливающая последовательность, тем больше шагов нужно пройти автомату для выполнения функций другого автомата.

В работе [5] найдены ограничения по длине восстанавливающих последовательностей для автоматов, заданных следующими системами образующих:

$$\Delta_1 = \{(i_1, i_2), i_1 \in S, i_2 \in S,\ i_1 \neq i_2\},$$

$$\Delta_2 = \{(1, i), i = \overline{2, m}\},\ \Delta_3 = \{(i, i+1), i = \overline{1, m-1}\}.$$

Их восстанавливающие последовательности соответственно не превышают следующие значения: $m-1$; $3(m/2-a)+1$, если m – четное и $3[m/2]^1$, если m – нечетное; $m(m-1)/2$.

Найдем ограничения по длине восстанавливающих последовательностей для следующих систем образующих:

$$\Delta_4 = \{(1, 2), (1, 2, ..., m)\},$$

$$\Delta_5 = \{(1, 2, ..., m-1), (1, 2, ..., m)\}.$$

Теорема 1.

Для группового автомата $A = (S, X, \delta)$, $|S| = m > 2$, $|X| = 2$, функции переходов которого представлены подстановками $\Delta_4 = \{(1,2),(1,2,...,m)\}$, длина восстанавливающей последовательности не превосходит $m(m-1)(m+1)/2$.

Доказательство.

Пусть $\alpha = (1,2)$, $\beta = (1,2,...,m)$.

Следующее равенство является известным математическим фактом (см. [16–17]):

$$\beta^j \alpha (\beta^j)^{-1} = (j+1, j+2), \tag{9}$$

где $1 \le j \le m-2$.

Заметим, что цикл перестановки $(1,2,...,m)$ равен m, а следовательно

$$(\beta^j)^{-1} = \beta^{m-j}.$$

Тогда равенство (9) примет вид:

$$\beta^j \alpha \beta^{m-j} = (j+1, j+2). \tag{10}$$

Очевидно, что транспозиции вида $(j+1, j+2)$ задают систему образующих Δ_3, причем каждая перестановка из Δ_3 представляется в виде произведения $m+1$ элементов из Δ_4.

Так как каждая перестановка из Δ_3 представляется в виде произведения $m+1$ элементов из Δ_4, а длина восстанавливающей последовательности для автомата, заданного Δ_3, не превышает $m(m-1)/2$, то длина восстанавливающей последовательности для автомата, заданного системой образующих Δ_4 не превышает $m(m-1)(m+1)/2$.

Теорема доказана

Теорема 2.

Для группового автомата $A = (S, X, \delta)$, $|S| = m > 2$, $|X| = 2$, функции переходов которого представлены подстановками $\Delta_5 = \{(1,2,\dots,m-1),(1,2,\dots,m)\}$ длина восстанавливающей последовательности не превосходи $m2(m-1)/2$.

Доказательство.

Пусть $\alpha = (1,2,\dots,m-1)$, $\beta = (1,2,\dots,m)$.

Следующее равенство является известным математическим фактом (см. [16–17]):

$$\beta^{-(j-1)} \alpha \beta^j = (j+1, j+2), \tag{11}$$

где $1 \le j \le m-2$.

Заметим, что цикл перестановки $(1,2,\dots,m)$ равен m, а следовательно

$$\beta^{-(j-1)} = \beta^{m-j-1}.$$

Тогда равенство (11) примет вид:

$$\beta^{m-j+1} \alpha \beta^{m-j} = (j+1, j+2). \tag{12}$$

Очевидно, что транспозиции вида $(j+1, j+2)$ задают систему образующих Δ_3, причем каждая перестановка из Δ_3 представляется в виде произведения m элементов из Δ_5.

То есть любая подстановка из Δ_3 представляется в виде произведения m или $m-1$ сомножителей из Δ_5. Тогда длина восстанавливающей последовательности для автомата, заданного системой образующих Δ_5 не превосходит $m^2(m-1)/2$.

Теорема доказана

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Составим таблицу сравнения пяти исследуемых систем образующих, в которой укажем число входных сигналов автомата (ВС), теоретически полученные данные (ДТ) и данные о длине восстанавливающих последовательностей, вычисленные эмпирическим путем (ДЭ). Данные вычислялись по алгоритму, представленному в работе[5].

Таблица 1

Сравнение систем образующих

Число состояний		*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Δ_1	*ВС*	*1*	*3*	*6*	*10*	*15*	*21*
	ДТ	*2*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
	ДЭ	*2*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Δ_2	*ВС*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
	ДТ	*2*	*3*	*4*	*6*	*7*	*9*
	ДЭ	*2*	*3*	*4*	*6*	*7*	*9*
Δ_3	*ВС*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
	ДТ	*2*	*3*	*6*	*10*	*15*	*21*
	ДЭ	*2*	*3*	*6*	*10*	*15*	*21*
Δ_4	*ВС*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*
	ДТ	*3*	*12*	*30*	*60*	*115*	*168*
	ДЭ	*2*	*2*	*6*	*11*	*18*	*25*
Δ_5	*ВС*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*
	ДТ	*2*	*9*	*24*	*50*	*90*	*147*
	ДЭ	*2*	*2*	*5*	*8*	*12*	*17*

Заметим, что для подстановок Δ_4 и Δ_5 ограничения на длину восстанавливающей последовательности, полученные теоретическим путем (по формулам из теоремы 1 и 2), сильно отличаются от данных, полученных эмпирическим путем. То есть, границы, предложенные в теоремах значительно завышены и возможно нахождение более точных ограничений на длину восстанавливающей последовательности.

Причем экспериментальные данные показывают, что для автоматов с числом состояний не превышающим 7, наиболее удачным решением задачи синтеза является система образующих Δ_5, для которой при минимальном числе входных символов длина восстанавливающей последовательности сравнительно небольшая. В связи с этим предполагается, что данная система образующих наиболее перспективна для дальнейших исследований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, были получены результаты, применимые при проектировании адаптивных программных систем. Предполагается, что при моделировании такой системы будут использоваться конечные детерминированные автоматы – одна из самых популярных моделей. Каждый автомат будет задан с помощью автомата, универсального для всего семейства, и соответствующих ему восстанавливающих последовательностей. Очевидно, что чем шире семейство автоматов, для которого заданный является универсальным, тем больше автоматов может быть применено при моделировании системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Деревицкий Д. П.* Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления / Д. П. Деревицкий, А. Л. Фрадков. – М. : Наука, 1981. – 216 с.

2. *Тюкин И. Ю.* Адаптация в нелинейных динамических системах / И. Ю. Тюкин, В. А. Терехов. – М. : ЛКИ, 2008. – 384 с.

3. *Федоров Ю. Н.* Справочник инженера по АСУТП. Проектирование и разработка. – М. : Инфра-Инженерия, 2008. – 920 с.

4. *Сытник А. А.* Об алгоритмической неразрешимости задач математического моделирования функционально избыточных систем / А. А. Сытник, Т. Э. Шульга // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2011. – Т. 4, № 2. – С. 213–219.

5. *Шульга Т. Э.* О длине восстанавливающих последовательностей для систем без потери информации / Т. Э. Шульга // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С. П. Королёва (национального исследовательского университета). – 2009. – № 4 (20). – С. 274–286.

6. *Сластихина М. Д.* О возможности использования систем образующих симметрических полугрупп для задания универсального автомата / М. Д. Сластихина, Т. Э. Шульга // Сборник научных статей по материалам X Всероссийской научной конференции Проблемы управления в социально-экономических и технических системах. – Саратов. – 2014. – С. 18–20.

7. *Сытник А. А.* Модели автоматов-перечислителей при проектировании отказоустойчивых дискретных систем. Автоматизация проектирования дискретных систем / А. А. Сытник, Н. С. Вагарина // Материалы V международной конференции. – Минск : ОИПИ НАН Беларуси. – 2004. – Т. 1. – С. 79–86.

8. *Сытник А. А.* Перечислимость при восстановлении поведения автоматов. – М. : Доклады Академии наук, 1993. – Т. 328, № 1.

9. *Agar Jon.* Turing and the Universal Machine. – M. : Icon, 2001.

10. *J. Von Neumann*. The general and logical theory of automata. – M. : Cerebral mechanisms in behavior, 1951.

11. *Hopcroft John E.* Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation (2nd ed.) / Hopcroft, John E., Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman. – M. : Reading Mass: Addison-Wesley. – 2001.

12. *Minsky Marvin*. Computation: Finite and Infinite Machines (1st ed.). – M. : NewJersey: Prentice-Hall. – 1967.

13. *Долгов В. Н.* Построение универсального конечного автомата. I. От теории к практическим алгоритмам / В. Н. Долгов, Б. Ф. Мельников // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2013. – № 2. – С. 131–139.

14. *Баумгертнер С. В.* Мультиэврестический подход к высотной минимизации недетерминированных конечных автоматов / С. В. Баумгертнер, Б. Ф. Мельников // Вестник Воронежского ун-та. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2010. – № 1. – С. 5–7.

15. *Мельников Б. Ф.* Об одном алгоритме построения универсального автомата Конвея / Б. Ф. Мельников, М. А. Зубова // Вестник Воронежского государственного университета. – 2012. – № 1. – С. 135–137.

16. *Калужнин Л. А.* Преобразования и перестановки: пер. с укр. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 160 с.

17. *Каргаполов М. И.* Основы теории групп / Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. – М. : Наука, Физматлит, 1982.

Сластихина Мария Дмитриевна – аспирант кафедры прикладной информатики и программной инженерии Саратовского государственного университета им. Гагарина Ю. А.
Тел.: 8-909-338-19-73
E-mail: Masha-fat@yandex.ru

Slastihina Mariya – PhD student of Yuri Gagarin State Technical University of Saratov.
Tel.: 8-909-338-19-73
E-mail: Masha-fat@yandex.ru