УДК 629.7.015.3

МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА НЕМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

П. Б. Абрамов*, Е. Н. Десятирикова, М. А. Чурсин*****

**ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»,*
***Воронежский государственный университет,*
****Воронежский филиал Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова*

Поступила в редакцию 26.08.2015 г.

Аннотация. В статье обсуждается научный подход, позволяющий представить немарковский процесс марковской моделью. Доказано существование и единственность такого представления. Показано, как для определения параметров сложной модели могут применяться простые полумарковские модели. Рассмотрен пример применения данного подхода в сочетании с моделями марковских форм с внешними потоками событий.
Ключевые слова: немарковский процесс, марковская модель, рекуррентные потоки событий, пересчет интенсивостей.
Annotation. In article the scientific approach allowing to present non-Markovian process by Markovian model is discussed. Existence and uniqueness of such representation is proved. It is shown how simple semi-Markovian models can be applied to determination of parameters of complex model. An example of application of this approach in combination with models of Markovian frames with external streams of events is discussed.
Keywords: non-markovian process, markovian model, recurrent stream, recalculation of intensity.

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование немарковских процессов смены состояний сложных систем сопряжено с целым рядом затруднений. Марковские модели являются весьма удобными с математической точки зрения, однако большинство реальных процессов характеризуются наличием последействия, что делает невозможным применение марковских моделей. Полумарковские модели отличаются широкой универсальностью, но весьма сложны, что существенно затрудняет их использование в случае большого количества состояний системы. Разработка и обоснование математического аппарата для системного анализа динамики сложных систем, обладающих преимуществами обоих этих подходов, представляется весьма актуальным.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ МАРКОВСКОЙ МОДЕЛИ НЕМАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

В ряде трудов [1, 2, 4] показано, что возможен подход, когда для стационарного режима модели рекуррентные потоки заменяются простейшими, при этом их интенсивность пересчитывается так, что вновь введенные потоки событий доставляют те же стационарные вероятности состояний системы, что и исходные рекуррентные потоки. Рассмотрим, всегда ли отыщется подобный простейший поток.

Граф состояний и переходов некоторой системы, где все переходы характеризуются свойством отсутствия последействия, за исключением одного из них, приведен на рис. 1.

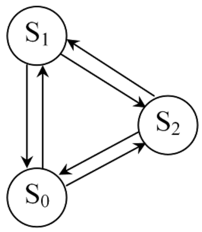

Рис. 1. Граф состояний и переходов системы

Без потери общности рассуждений примем в качестве немарковского переход $(S_0 - S_1)$. Вид распределения вероятности в потоке событий, переводящих систему из состояния S_0 в состояние S_1 в общем случае может быть произвольным. Распределение вероятностей в потоках событий, переводящих систему по другим дугам графа, подчиняется экспоненциальному закону.

Интенсивности простейших потоков будем обозначать общепринятым способом через λ_{ij}, где i – номер состояния, из которого выходит поток, а j – номер состояния, в которое поток входит. Интенсивность рекуррентного потока общего вида, переводящего систему из состояния S_0 в состояние S_1, обозначим как λ_{01}^{O}.

Предположим также, что значения стационарных вероятностей состояний P_i уже известны, с требуемой точностью и достоверностью. Запишем в общем виде систему стационарных уравнений Колмогорова-Чепмена для данного графа, в предположении, что интенсивность простейшего потока λ_{01} существует:

$$\begin{cases} -(\lambda_{01}+\lambda_{02})P_0+\lambda_{10}P_1+\lambda_{20}P_2=0 \\ \lambda_{01}P_0-(\lambda_{10}+\lambda_{12})P_1+\lambda_{21}P_2=0 \\ \lambda_{02}P_0+\lambda_{12}P_1-(\lambda_{20}+\lambda_{21})P_2=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Особенность заключается в том, что искомая величина λ_{01} должна удовлетворять как первому уравнению для стационарного режима состояния S_0, так и второму уравнению для состояния S_1.

Преобразуем систему (1) так, чтобы исключить вероятность P_2. Для этого третье уравнение сложим поочередно с первым и вторым, домножая его предварительно на некоторый множитель, чтобы уничтожились члены, содержащие P_2. Получим:

$$\begin{cases} -(\lambda_{01}+\lambda_{02})P_0+\dfrac{\lambda_{02}\lambda_{20}}{\lambda_{20}+\lambda_{21}}P_0+\lambda_{10}P_1+ \\ \quad +\dfrac{\lambda_{12}\lambda_{20}}{\lambda_{20}+\lambda_{21}}P_1=0 \\ -\lambda_{01}P_0+\dfrac{\lambda_{02}\lambda_{21}}{\lambda_{20}+\lambda_{21}}P_0+(\lambda_{10}+\lambda_{12})P_1+ \\ \quad +\dfrac{\lambda_{12}\lambda_{21}}{\lambda_{20}+\lambda_{21}}P_1=0. \end{cases} \qquad (2)$$

Согласно постановке задачи, в этих уравнениях одно неизвестное. Это – интенсивность λ_{01}. Приведем в обоих уравнениях коэффициенты при P_i к общему знаменателю и приведем подобные в числителе, а затем домножим обе части уравнений на общий знаменатель. Имеем:

$$\begin{cases} -(\lambda_{01}\lambda_{20}+\lambda_{01}\lambda_{21}+\lambda_{02}\lambda_{21})P_0+ \\ \quad +(\lambda_{10}\lambda_{20}+\lambda_{10}\lambda_{21}+\lambda_{12}\lambda_{20})P_1=0 \\ (\lambda_{01}\lambda_{20}+\lambda_{01}\lambda_{21}+\lambda_{02}\lambda_{21})P_0- \\ \quad -(\lambda_{10}\lambda_{20}+\lambda_{10}\lambda_{21}+\lambda_{12}\lambda_{20})P_1=0. \end{cases} \qquad (3)$$

Можно видеть, что два уравнения совпадают с точностью до знака. Решением как одного, так и другого уравнения является величина:

$$\lambda_{01}=\frac{(\lambda_{10}\lambda_{20}+\lambda_{10}\lambda_{21}+\lambda_{12}\lambda_{20})P_1-\lambda_{02}\lambda_{21}P_0}{(\lambda_{20}+\lambda_{21})P_0}. \qquad (4)$$

Этот результат является единственным для заданных интенсивностей прочих простейших потоков модели. Таким образом, доказано существование и единственность искомой величины λ_{01}.

Задаваясь вопросом неотрицательности полученного результата, примем во внимание, что состояние S_0 в предположении рекуррентного исходящего потока может быть представлено в виде марковской формы сложной структуры [1], которую в общем случае можно получить на основе гиперэрланговского распределения, путем введения в модель множества псевдосостояний. В этом случае возможен расчет отношений характеристических чисел внутренних состояний марковской формы S_0 и пересчет интенсивности рекуррентного потока по известной методике. Этот подход неизбежно дает положительный результат.

ПРОСТЕЙШАЯ ПОЛУМАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ – ОСНОВА МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ НЕМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Покажем, что, в отличие от подходов, обоснованных в [1], для определения коэффициентов пересчета k_{korr} интенсивностей рекуррентных потоков возможно применение простой модели полумарковского процесса (ПМП), что позволяет положить в основу модели не только гамма-распределение. Граф состояний и переходов модели приведен на рис. 2.

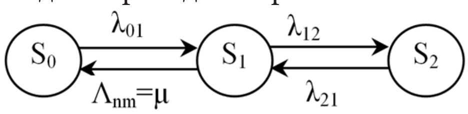

Рис. 2. Граф состояний и переходов полумарковской модели

Положим, что на переходе из S_1 в S_0 действует рекуррентный поток с интенсивностью $\Lambda_{nm} = \mu$. Прочие потоки событий в модели будем полагать простейшими с интенсивностями λ_{01}, λ_{12} и λ_{21}. Данная модель отличается от рассмотренной выше модели, являясь ее упрощенным вариантом, поскольку отсутствуют переходы из S_0 в S_2 и обратно. Это не противоречит основным допущениям научного подхода и одновременно снижает сложность математических выражений.

Поскольку целью является анализ стационарного режима, воспользуемся лишь отдельными соотношениями теории ПМП, приводящими к финальным значениям вероятностей состояний без решения системы интегродифференциальных уравнений. В качестве исходных данных принимаются известные законы распределения $Q_{ij}(t)$ временных интервалов в потоках.

Безусловная функция распределения времени пребывания системы в i-м состоянии и ее плотность вероятности определятся следующим образом:

$$F_i(t) = 1 - \prod_{\substack{j \in E \\ i \neq j}} (1 - Q_{ij}(t)), \quad f_i(t) = \frac{dF_i(t)}{dt}. \qquad (5)$$

Математическое ожидание времени пребывания системы в этом состоянии по определению есть первый начальный момент функции распределения и равно:

$$T_i = \int_0^{\infty} t f_i(t) dt. \qquad (6)$$

Предельные значения переходных вероятностей вложенной марковской цепи (ВМЦ) равны:

$$P_{ij} = p_{ij}(\infty) = \int_0^{\infty} \prod_{k \neq j} (1 - Q_{ik}(\tau)) dQ_{ij}(\tau), \qquad (7)$$

и на этой основе предельные значения вероятностей ВМЦ могут быть найдены путем решения системы уравнений:

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i \cdot P_{ij}, \ \ j \in E \\ \sum_{j \in E} \pi_j = 1. \end{cases} \qquad (8)$$

Наконец, предельные вероятности собственно ПМП определятся как взвешенные произведения предельных вероятностей ВМЦ π_j на математическое ожидание T_j времени пребывания системы в j-м состоянии:

$$\Phi_j = \frac{\pi_j \cdot T_j}{\sum_{j=1}^{n} \pi_j \cdot T_j}. \qquad (9)$$

После этого не представляет труда на основании одного из уравнений Колмогорова-Чепмена вычислить интенсивность простейшего потока, доставляющего те же предельные вероятности Φ_j, что и рекуррентный поток.

В частности, для графа состояний и переходов, приведенного на рис. 2, на основании уравнения баланса потоков для состояния S_0 получаем соотношение:

$$\lambda_{10} = \frac{\lambda_{01} \cdot P_0}{P_1}, \qquad (10)$$

откуда, после возврата к полумарковской модели, следует расчетная формула

$$k_{korr} = \frac{\lambda_{01} \cdot \Phi_0}{\mu \cdot \Phi_1}. \qquad (11)$$

Как доказано в [1] на основе метода расширения пространства фазовых состояний системы, коэффициент коррекции будет иметь одинаковое значение для любой конфигурации графа состояний, при неизменном отношении интенсивностей λ_{12}/μ исходящих из состояния S_1 потоков. Некоторые значения коэффициентов коррекции k_{korr} для гамма-распределения приведены в табл. 1.

Таблица 1

Десятичные мантиссы коэффициента k_{korr} для гамма-распределения

λ_{12}/μ	Коэффициент последействия в рекуррентном потоке $k_{ПД}$								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.2	9524	9362	9280	9231	9199	9175	9157	9144	9133
0.4	9091	8778	8619	8523	8459	8412	8378	8351	8329
0.6	8696	8242	8011	7870	7776	7709	7658	7619	7587
0.8	8333	7750	7452	7270	7149	7061	6996	6944	6903
1.0	8000	7297	6938	6719	6572	6466	6387	6324	6275
1.2	7692	6881	6465	6212	6042	5920	5828	5756	5698

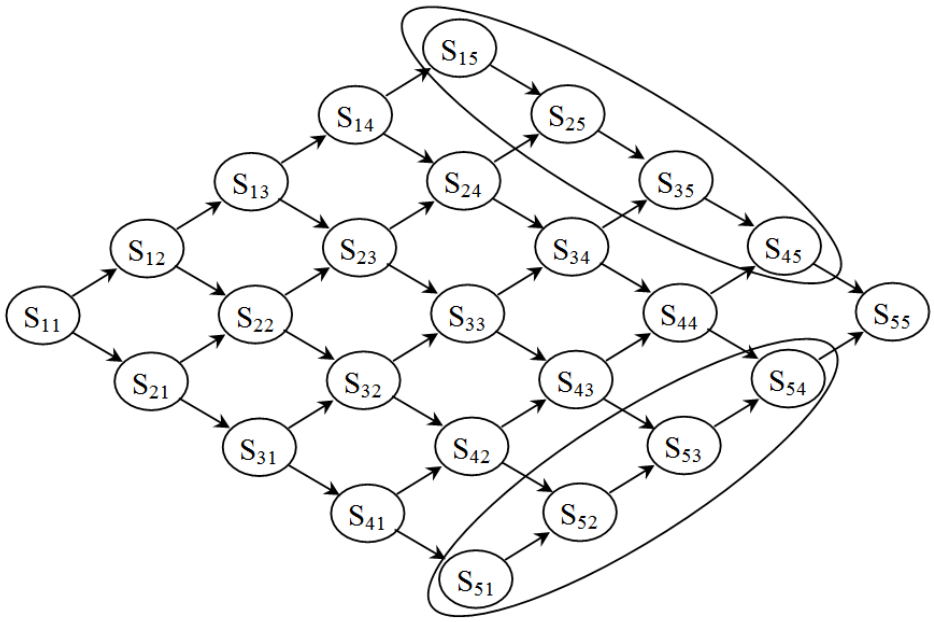

Рис. 3. Граф состояний процесса взаимодействия двух систем

Сравнение значений k_{korr}, полученных для целочисленного гамма-распределения методом псевдосостояний и, с другой стороны, на полумарковских моделях показало, что результаты совпадают до четвертого десятичного знака. Это является подтверждением адекватности и высокой достоверности марковских моделей стационарного режима немарковких процессов, основанных на пересчете интенсивностей потоков модели.

Следует особо отметить, что если из одного состояния выходит более чем один рекуррентный поток, то потребуется применение специального алгоритма нахождения коэффициентов k_{korr1}, k_{korr2}, k_{korr3}, …, снованного на поочередных подстановках коэффициентов. Обоснование алгоритма приведено в [1].

ПРИМЕНЕНИЕ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ НЕМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ АНАЛИЗА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

В качестве примера рассмотрим простейший процесс взаимодействия двух систем, каждая из которых состоит из одного элемента, последовательно выполняющего ряд операций. Окончание каждой из операций характеризует новое состояние данного элемента. Граф состояний процесса приведен на рис. 3.

Подмножество состояний $S_{15}-S_{45}$ соответствует выигрышу одной из сторон (А), так как в этом подмножестве данная сторона закончила все этапы своей работы, а сторона В продолжает их выполнять. И наоборот, подм-

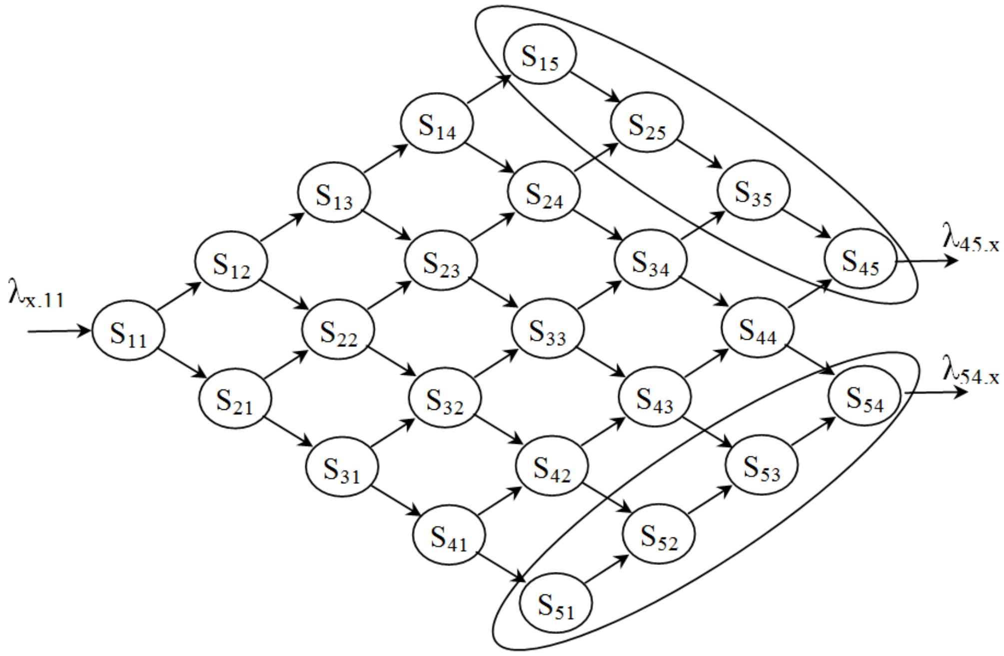

Рис. 4. Структурный граф взаимодействия с внешними потоками событий

ножество состояний $S_{51}-S_{54}$ соответствует выигрышу стороны B. Отметим также, что состояние S_{11} определяет еще не начавшийся процесс, а состояние S_{55} является финальным состоянием, которое необходимо для завершения модели процесса.

Очевидно, что разработка полумарковской модели для графа, приведенного на рис. 3, является очень сложной задачей и требует существенных усилий для отыскания решения.

Теперь допустим, что в процесс вступает, участвует в нем и выходит из него не одна, а множество попарно взаимодействующих систем. Тогда граф состояний модели следует дополнить внешними потоками событий, а надобность в финальном состоянии отпадает и структурный граф взаимодействия будет иметь вид, приведенный на рис. 4.

Как и в моделях динамики средних, будем полагать одинаковой динамику элементов взаимодействующих множеств с каждой из сторон, а сами элементы независимыми друг от друга. Интенсивность потока $\lambda_{x,11}$ равна среднему количеству взаимодействующих пар, вступающих в процесс в единицу времени. Интенсивности $\lambda_{45,x}$ и $\lambda_{54,x}$ определяются как величины, обратные среднему времени завершения финальных этапов каждой из сторон, после чего соответствующая пара выходит из процесса. Интенсивности прочих переходов определяются как и ранее.

После пересчета интенсивностей рекуррентные потоки событий будут являться простейшими, а процесс в целом – марковским.

Как показано в [3], в подобной модели, основанной на марковской форме, обязательно с течением времени установится стационарный режим, независимо от значений интенсивностей внутренних и внешних потоков. Математические ожидания m_{ij} численностей состояний могут быть рассчитаны путем решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -(\lambda_{11,12}+\lambda_{11,21})\cdot m_{11}=-\lambda_{x,11} \\ -(\lambda_{ij,i(j+1)}+\lambda_{ij,(i+1)j})\cdot m_{ij}+\lambda_{(i-1)j,ij}\cdot m_{(i-1)j}+ \\ \qquad +\lambda_{i(j-1),ij}\cdot m_{i(j-1)}=0 \\ -\lambda_{45,x}\cdot m_{45}+\lambda_{35,45}\cdot m_{35}+\lambda_{44,45}\cdot m_{44}=0 \\ -\lambda_{54,x}\cdot m_{54}+\lambda_{53,54}\cdot m_{53}+\lambda_{44,54}\cdot m_{44}=0. \end{cases} \tag{6}$$

Замечательным свойством рассматриваемого стационарного режима является то, что отношения любых математических ожиданий, а также их сумм не зависят от интенсивности входящего в марковскую форму потока $\lambda_{x,11}$. Тогда в качестве вероятностной меры выигрыша той или иной стороны, с учетом нормировки на выбранном подмножестве выигрышных состояний, могут быть приняты отношения

$$P_A = \frac{\sum_i m_{i5}}{\sum_i m_{i5} + \sum_j m_{5j}};$$
$$P_B = \frac{\sum_j m_{5j}}{\sum_i m_{i5} + \sum_j m_{5j}}. \qquad (7)$$

Предложенная вероятностная мера приближена по смыслу к статистическому определению вероятности. Итог взаимодействия для каждой пары можно считать исходом очередного эксперимента, а количество пар, завершивших процесс – количеством проведенных опытов. Оценки (7) в стационарном режиме не зависят от количества пар, принимающих участие в процессе. Поэтому переход к бесконечному пределу в (7) сводится к вычислению этих же отношений для конечных значений сумм m_{ij}.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе применения предложенного в настоящей статье подхода возможен анализ немарковских процессов динамики сложных систем с целью получения оценок вероятностей состояний процесса в стационарном режиме. Сочетание моделей марковских форм с внешними потоками событий и метода пересчета интенсивностей рекуррентных потоков для замены их простейшими потоками открывает новые широкие возможности в области системного анализа. Последнее обусловлено замещением крайне сложных методов теории полумарковских процессов сравнительно простыми марковскими моделями и вычислительными процедурами малой ресурсоемкости для работы с табличными данными. Особенно полезным данный подход представляется с прагматической точки зрения для решения задач конкретной предметной направленности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов П. Б.* Марковские модели немарковских процессов: монография. / П. Б. Абрамов. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2015. – 204 с.

2. *Абрамов П. Б., Леньшин А. В.* Оценка параметров систем массового обслуживания с учетом последействия в потоках обслуженных заявок // Успехи современной радиоэлектроники. – 2013. – № 9. – С. 45–48.

3. *Абрамов П. Б., Чурсин М.А.* Анализ существования и устойчивости решения для марковских моделей разомкнутых систем массового обслуживания. // Вестник ВГУ, Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2012. – № 1. – С. 56–61.

4. *Абрамов П. Б., Чурсин М. А.* Фундаментальные соотношения для стационарного режима разомкнутых марковских форм в моделях систем массового обслуживания. // Вестник ВГУ, Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2012. – № 2. – С. 5–11.

Абрамов Петр Борисович – кандидат технических наук, доцент. Военный учебно-научный центр Военно-Воздушных Сил «Военно-Воздушная академия имени проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», преподаватель. Тел. 8-903-650-16-20.
E-mail: abpostbox58@mail.ru.

Десятирикова Елена Николаевна – доктор экономических наук, профессор. Воронежский государственный университет, профессор кафедры.

Чурсин Михаил Александрович – кандидат технических наук, доцент. Воронежский филиал Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова, доцент кафедры.

Abramov Petr Borisovitch – Ph.D., Senior Lecturer. Military training-scientific center of Military Aviation Forces « Military Aviation academy named by prof. N. E. Zhukovsky and U. A. Gagarin», lecturer. Tel.: 8-903-650-16-20.
E-mail: abpostbox58@mail.ru.

Desyaterikova Elena Nikolaevna – Ph.D., professor. Voronezh state University

Chursin Mikhail Aleksandrovitch – Candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer. Voronezh branch of Russian State trade and economic University.