УДК 681.3

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД РАЗРЕШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ ЭКСПЕРТНЫХ СУЖДЕНИЙ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ МНОЖЕСТВ

Е. А. Ганцева, В. А. Каладзе

Воронежский государственный технический университет,
Международный институт компьютерных технологий (г. Воронеж)

Поступила в редакцию 05.04.2015 г.

Аннотация. В статье для принятия решений в условиях неопределённости используются методы теории случайных множеств, называемой также теория свидетельств Демпстера-Шефера, основанные на специальных функциях доверия и правдоподобия.
Ключевые слова: теория свидетельств, высказывание, доверие, правдоподобие.
Annotation. In article for a decision making in the conditions of vagueness are used methods of the theory of casual sets, named of evidence Dempstera-Shefera Theory based on special functions of belief and plausibility.
Keywords: the theory of evidence, an expert conclusion, belief, plausibility.

ВВЕДЕНИЕ

Методы математической теории свидетельств Демпстера-Шефера [1, 2] (ТСДШ) используются в задачах распознавания образов [3], надёжности [4], моделирования [5] и других, связанных с априорной неопределённостью. Объектом данного исследования является проблема принятия решений на множестве экспертных суждений в условиях неопределённости (ПРвУН), а целью исследования является её решение, основанное на ТСДШ.

Поскольку в русскоязычной литературе отсутствует однозначное и убедительное освещение на единой основе методик ТСДШ, то рассуждения проведём формально в области случайных множеств, представляющих экспертные высказывания-гипотезы, не отвлекаясь на семантику приложения, и для корректности воспользуемся однозначной терминологией и понятиями теории множеств и теории вероятности. Это позволит результаты данной работы в иных приложениях.

Особенность данной задачи: результирующее суждение в ходе принятия решений выводится путём объединения экспертных высказываний, полученных в общем случае из разных источников и с разной информационной ценностью. Полученное решение должно быть сбалансированным относительно всех высказываний и достоверным в рамках поставленной проблемы.

Особенность ТСДШ в том, что математические операции осуществляются не над самими гипотезами, определяемыми как множества универсального множества – пространства, булеана, а над их численными характеристиками – мерами, определяемыми из обобщённых вероятностей базовых гипотез [2].

Кроме того, методы математической теории Демпстера-Шефера, опирающиеся на интервальное представление оценок, являются альтернативой интуитивным способам обработки неопределённых данных, использующим, например, эмпирические коэффициенты уверенности, где свидетельство, частично подтверждающее выдвинутую гипотезу, нельзя рассматривать, как и одновременно частично её опровергающее, в пользу гипотез-конкурентов.

Множество базовых гипотез Г может быть стандартным множеством элементарных высказываний, полностью описывающих свойства объекта, и из них и только из них могут формироваться любые суждения экспертов. В отсутствие стандартов множество Г может состоять из первоначального множества высказываний экспертов.

В проблеме ПРвУН можно выделить задачи, использующие экспертные высказывания: 1) сравнение свойств объекта исследования с эталоном, 2) сравнение однотипных свойств некоторого семейства объектов, 3) аналогичные задачи с предварительной кластеризацией [6], которые могут быть решены средствами ТСДШ на множестве высказываний (логических суждений) экспертов. При этом полагается, что характеристики исследуемых объектов принадлежат к классам с достаточно точно очерченными границами, в которых представлены исчерпывающие свойства каждого конкретного объекта.

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ

Пусть (решается первая задача) рассматриваются высказывания по некоторой характеристике объекта, которые сформулированы на основе аксиом (базовых гипотез), например, трёх γ_1, γ_2 и γ_3, из стандартного множества базовых гипотез Г, учитывающих особенности данной задачи. Чтобы сформировать решение на основе предложенных высказываний, необходимо: а) выявить в них наличие или отсутствие этих гипотез, б) выделить и согласовать имеющуюся в них общую информацию, полезную для решения поставленной проблемы.

Однако результаты экспертизы не дают точного оценивания характеристики, поскольку высказывания представлены в субъективной реализации и достаточно размытыми формулировками. Поэтому результаты таких освидетельствований могут быть схожими, противоречивыми, а чаще могут иметь лишь близкие описательные формы [7]. Определение значимости самих высказываний, их объективное сравнение и выработка обоснованного результирующего решения проводятся с использованием методов ТСДШ на основе учёта меры вхождения базовых гипотез в эти высказывания.

С этой целью формируется интервальная оценка на основе аддитивных функций доверия и правдоподобия. Функция доверия снизу оценивает достоверность сложного высказывания по мерам его подмножеств, а функция правдоподобия, верхняя граница справедливости – по мерам частично подтверждающих его свидетельств.

Базовые гипотезы, рассматриваемые как элементарные случайные события, составляют полную группу. То есть сами исходные свидетельства – гипотезы $\gamma_j \in \Gamma\ \forall j$ (с присвоенными им базовыми вероятностями) являются взаимно исключающими, а их набор Г – исчерпывающим, обеспечивающим полноту. Таким образом, в каждом конкретном случае гарантируется достоверность лишь одной гипотезы из множества Г.

Вероятности подмножеств-свидетельств в высказывании – сложной гипотезе, определяет её численную характеристику – меру. Эти меры, в свою очередь, формируют распределение обобщённой вероятности. Вероятности базовым гипотезам, как возможным исходам некоторого сложного высказывания, присваиваются в соответствии с правилом, что один из исходов более вероятен в сравнении с другим. Понятие вероятности здесь рассматривается как обобщение колмогоровского понятия вероятности с тем, что оно определяется не на самом множестве гипотез Г, а на его булеане.

Оценить вероятность не только для базовых гипотез $\gamma_j \subset \Gamma$ можно на основе формирования свидетельств для любых высказываний, как множеств $A_i \subseteq \mathrm{B}\ \forall i$, определённых на В – булеане, универсальном множестве, структурированном пространстве гипотез. Мера $m_i \in \mathrm{M}$ множества A_i, являющегося высказыванием, нормирована на В и определяет весомость свидетельств в пользу этого высказывания. Таким образом, мера по каждому высказыванию определяется однозначно и независимо относительно мер по другим высказываниям.

Так как каждая мера – это элемент множества М, то построение соответствия между М и В позволяет связать элементы из М с множествами A_i пространства В. Далее, поставив в соответствие каждому множеству из В единственный элемент A_i из фокального множества А [8], устанавливаем тем самым однозначное отображение элементов множества М на элементы множества А.

Выдвинутое предположение об исчерпывающей полноте множества гипотез Г означает, что ни один из элементов $m_i \in \mathrm{M}$ не отображается на пустое множество, т. е. для каждого свидетельства существует хотя бы одна гипотеза или высказывание, достоверность которых подтверждает данное свидетельство. Уровень соответствия каждого высказывания анализируемой проблеме оценивается по мощности набора гипотез с присвоенными им вероятностями.

Формализованная постановка задачи включает следующие понятия.

• Множество Г гипотез γ_j: набор всех возможных элементарных ответов на конкретный вопрос экспертизы.

• Булеан В, определённый на Г.

• Множества A_i (возможные высказывания экспертов), составляющие булеана, которые являются также элементами фокального множества А.

• Множество (распределение) обобщённых вероятностей Р, приписанных соответствующим гипотезам из В.

• Множество М, состоящее из элементов m_i – мер множеств A_i, рассматриваемых в данной постановке, как свидетельства фокальных элементов, и определяющее распределение вероятностей Р на В: $\{P(A_i) = m_i = m(A_i)\ \forall i,\ A_i \subset \mathrm{B}\}$. При этом не делается различия между априорными и апостериорными вероятностями.

• Соответствие множеств М и А, определяющее биективное отображение их элементов.

На основе этих понятий формируются функции доверия и правдоподобия [1], как интервальные оценки в данной задаче.

Функция доверия (belief) $bel(A_i)$ для любого фокального элемента A_i – это функция присвоения базовых вероятностей (basic probability assignment), определяющая суммарный уровень его достоверности, находится [2] суммированием всех мер его подмножеств $A_{ij} \subseteq A_i$: мер свидетельств, однозначно поддерживающих сложную гипотезу

$$bel(A_i) = \sum_j m(A_{ij}). \tag{1}$$

$Bel(\mathrm{B})$ всегда равно 1, независимо от значений мер его множеств и значения $m(\theta)$, где $\theta = \mathrm{B} \setminus \cup A_i\ \forall i$, что непосредственно вытекает из условия существования на В распределения обобщённых вероятностей. Выражение $Bel(\mathrm{B}) = 1$ означает, что можно с полной уверенностью утверждать, что в пространстве (булеане) обязательно имеется, хотя бы одно, достоверное высказывание, поскольку набор его гипотез является исчерпывающим. Значение $m(\theta)$ отображает меру свидетельства, не учтённого во множествах A_i, входящих в пространство. Значения $bel(A_i)$ и $m(A_i)$ равны, если множество A_i не содержит собственных подмножеств.

Можно получить значение меры высказывания A_i из суммарных мер его подмножеств A_{ij} с использованием обратной функции [9]

$$m(A_i) = \sum_{A_{ij} / A_{ij} \subseteq A_i} (-1)^{|A_i - A_{ij}|} bel(A_{ij}), \tag{2}$$

где $|A_i - A_{ij}|$ определяет различие мощностей двух множеств.

В ТСДШ изменение уровня доверия к подмножествам высказывания A_i не приводит к изменению доверия к остальным высказываниям, в частности, к высказываниям-конкурентам. Это можно усмотреть из $bel(A_i) + bel(\overline{A}_i) \le 1$. Остаток после суммирования уровней доверия A_i и $\overline{A}_i$ – это уровень игнорирования гипотезы A_i.

Функция правдоподобия (plausibility) $pls(A_i)$ – это сумма мер всех множеств $A_k \subseteq B$, частично поддерживающих A_i, имеющих непустое пересечение с множеством A_i $(A_i \cap A_k \neq \varnothing)$

$$pls(A_i) = \sum_k m(A_k). \qquad (3)$$

Оценка правдоподобия $pls(A_i)$ представляет собой возможность совместимости свидетельств в A_k с гипотезами в A_i. Значение оценки $pls(A_i)$ можно рассматривать как предел, до которого можно повышать доверие к гипотезам из A_i при существующих свидетельствах в пользу гипотез-конкурентов.

Эти обе меры связаны между собой

$$pls(A_i) = 1 - bel\left(\overline{A}_i\right). \qquad (4)$$

Правдоподобие – мера полного доверия с исключённой из него суммарной мерой всех свидетельств, противоречащих высказыванию A_i. То есть оценка правдоподобия A_i есть не что иное, как мера нашего недоверия к $\overline{A}_i$.

Выражения (1), (3), (4) позволяют связать аддитивные меры высказывания A_i:

$$m(S_1) = bel(A_i), \qquad (5)$$

$$m(S_2) = pls(A_i) - bel(A_i), \qquad (6)$$

$$m(S_3) = 1 - pls(A_i), \qquad (7)$$

$$m(S_1) + m(S_2) + m(S_3) = 1. \qquad (8)$$

Доверительный интервал $[\,bel(A_i),\ \ pls(A_i)\,]$ содержит точную величину (в классическом смысле) вероятности [10] фокального элемента A_i и ограничен двумя интегральными, аддитивными в дискретном случае, мерами

$$bel(A_i) \le P(A_i) \le pls(A_i).$$

Здесь $P(A_i)$ фактически является «весовым» коэффициентом истинности высказывания. Если $bel(A_i) = pls(A_i)$, то вероятность определена единственным образом. Величина этого интервала фактически определяет погрешность оценки вероятности высказывания, но, с другой стороны, она указывает, на сколько может увеличиться доверие к высказыванию A_i при добавлении новых подтверждающих гипотез.

Графическая интерпретация информации, содержащейся в оценках границ доверительного интервала данного множества, позволяет более осознанно принимать решение, учитывая информационную значимость суммарных характеристик рассматриваемого высказывания. Так длина доверительного интервала может служить показателем изменчивости полученной оценки справедливости свидетельств по множеству A_i.

С увеличением числа гипотез, подтверждающих высказывание, граница ***inf*** смещается к ***sup***, длина интервала недоверия уменьшается, и доверительная оценка высказывания, приближаясь к наибольшему значению, становится стабильнее. Отметим: если границы интервала «а» вероятности оценены не методами ТСДШ, то они не могут определяться как *bel* и *pls*.

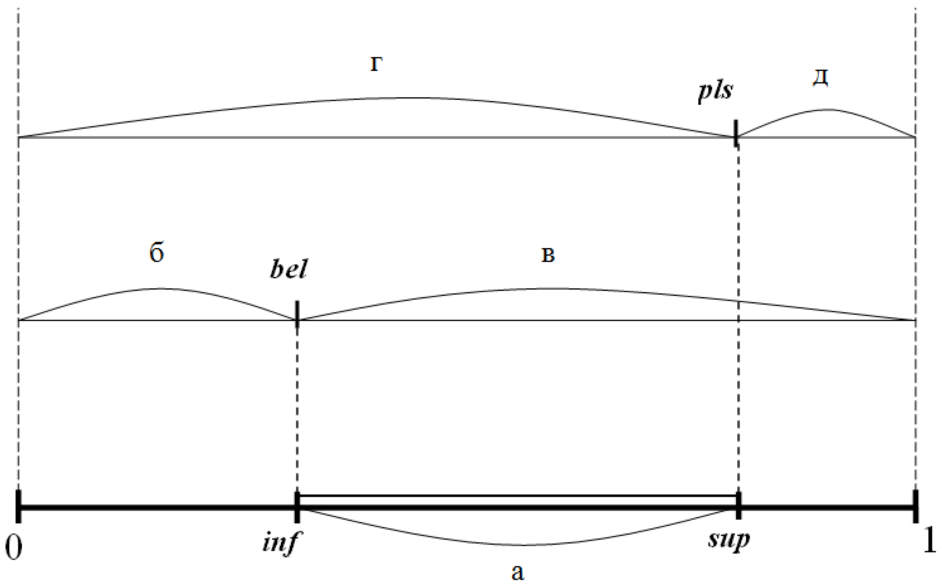

Рис. 1. Интерпретация вероятностных интервалов:
а) изменчивость, б) доверие, в) недоверие, г) правдоподобие, д) сомнение

По ходу накопления новых свидетельств применяется аппарат оперативного обновления доверительного множества высказываний. Для объединения нескольких высказываний из разных информационных источников, отличающихся уровнем достоверности, используется комбинационное правило Демпстера [1]. При нарушении однородности поступающей информации проводится нормализация всех свидетельств. Объединение информации, поступающей из двух источников, использует так называемую присоединённую меру $m_{1,2}$ и вычисляется для соответствующей пары мер $m_1 \in \mathrm{M}_1$ и $m_2 \in \mathrm{M}_2$ высказываний C и D следующим образом:

$$m_{1,2}(\varnothing) = 0,$$

$$m_{1,2}(A_i) = \frac{1}{1-K} \sum_{C \cap D \subseteq A_i \neq \varnothing} m_1(C) m_2(D), \quad (9)$$

где

$$K = \sum_{E \cap F = \varnothing} m_1(E) m_2(F). \quad (10)$$

Выражения (9) и (10) несложно перезаписать для произвольного числа источников информации.

Учитывая условия, высказанные в постановке задачи, можно утверждать, что значения m_1 и m_2 сформированы по независимым источникам свидетельств в пределах того же множества гипотез Г.

Считается, что коэффициент K призван определять меру конфликта между двумя наборами мер, и что нормализирующий множитель $1-K$ позволяет полностью сгладить неоднородность информационных источников [11] и предотвратить, в случае конфликта, отображения присоединённой меры на пустое множество. Это и другие положения ТСДШ подвергнуты критике в профильной литературе, например [12], однако в обширном объёме источников подтверждается эффективность применения методов этой теории.

Кроме интервальных оценок, в ТСДШ можно получить и точечные, например, можно выявить высказывание A_{t^*}, наиболее хорошо отвечающее цели основной задачи. Получить оптимальное высказывание можно на основе принципа максимального правдоподобия:

$$pls(A_{t^*}) = \max_t [pls(A_t)], \quad (11)$$

где A_t – t-ое сложное высказывание, которое может быть получено, в частности, после объединения исходных высказываний с помощью комбинационного правила Демпстера.

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДИКИ

В прикладных задачах управления, моделирования и распознавания образов, содержащих большую долю субъективного подхода, обычно приходится пересматривать постановки исходной задачи и подбирать её условия и решение из набора эвристических методов.

Множество неизмеримых фенотипных, личностных и профессиональных качеств претендентов, в частности, входят в стандарты для экспертной группы. Ими, например, для кандидатов в экипаж танка являются зрение в сумерках, возможности вестибулярного аппарата, скорость реакции, ориентация в пространстве по слуху и т. п.

За результирующую оценку обычно принимается общая часть всех экспертных оценок. Недостатком такого подхода, кроме потери полезной информации и сужения предметной области, является возможность получения решения задачи в виде множества меры нуль. В отдельных случаях общей оценкой считается индивидуальная оценка наиболее авторитетного эксперта, что также не является корректным решением проблемы. Применяются методы, использующие композиционные модели с весовыми коэффициентами каждого высказывания, подбираемыми произвольно. Если экспертные оценки представлены лингвистически, то перевод их в числовую форму выполняется на эвристически подобранных шкалах. Совместить оценки, полученные подобными методами, чрезвычайно сложно, особенно, если результаты экспертизы поступают из различных информационных источников.

Применение математической теории Демпстера-Шефера в разрешении такого рода ситуаций наиболее целесообразно в случае неоднородности информации и априорной неопределённости данных.

Для лучшего понимания методики ТСДШ продемонстрируем процедуру получения решения описанной задачи на простом примере.

Исходные высказывания-гипотезы γ_1, γ_2, γ_3 определяются как собственные подмножества, составляющие множество Г. Базовые вероятности гипотез указываются в стандарте организации или оцениваются как относительные частоты типового события задачи, например: 0.23, 0.35, 0.42. На Г определяется булеан В, как универсальное множество возможных высказываний, пространство высказываний.

На В формируется закон распределения обобщённых вероятностей высказываний. По условиям задачи определяется доля присутствия гипотез на В, например, 0.75. В соответствии с этой величиной нормируются вероятности гипотез для В: 0.17, 0.26, 0.32.

Далее подсчитываются меры (вероятности) сложных высказываний и исключённого θ: 0.43, 0.49, 0.58 и 0.75 соответственно, которые нормируются на оставшейся доле 0.25: 0.0475, 0.055, 0.065, 0.0825.

Множество θ, в данном примере $\theta = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, исключено в связи с тем, что такое высказывание не отвечает смыслу поставленной задачи и потому не может учитываться в её решении.

Значения доверия и правдоподобия гипотез вычисляются из (1) и (3).

Выбор способа оценки адекватности полученного решения является определяющим для приложения с любой структурой. Эффективно в рассматриваемых ситуациях может быть использование интеллектуальных критериев [13], основанных на экспертных системах [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dempster A. P.* A generalization of Bayesian inference / A.P. Dempster // Journal of the Royal Statistical Society. – 1968. – Vol. 30. – P. 205–247.

2. *Shafer G.* A Mathematical Theory of Evidence / G. Shafer. – Princeton: Princeton University Press, 1976. – 297 p.

3. *Попов М. А.* Классификация объектов на многоспектральных / гиперспектральных аэрокосмических изображениях на основе теории свидетельств Демпстера-Шейфера / М. А. Попов, М. В. Топольницкий // Математичні машини і системи. – 2014. – № 1. – С. 58–69.

4. *Beynon M.* The Dempster-Shafer theory of evidence: an alternative approach to multicriteria decision modeling / M. Beynon, B. Curry, P. Morgan // Internationak Jornal Omega. – 2000. – # 28. – P. 37–50.

5. *Rakowsky U.* Fundamentals of the Dempster-Shafer theory and its applications to system safety and reliability modelling / U. Rakowsky // RTA. – 2007. – # 3–4. – P. 173–185.

Таблица 1

Числовой пример решения задачи методами ТСДШ

Гипотезы – высказывания	Имя	Случайные множества	Присвоенные базовые меры	Доверие	Правдоподобие
		$\varnothing$	0	0	0
Исходные: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \subset \Gamma$	A_1	γ_1	0.17	0.17	0.2725
	A_2	γ_2	0.26	0.26	0.3725
	A_3	γ_3	0.32	0.32	0.44
Сложные	A_4	$\gamma_1 \cup \gamma_2$	0.0475	0.4775	0.5975
	A_5	$\gamma_1 \cup \gamma_3$	0.055	0.545	0.6575
	A_6	$\gamma_2 \cup \gamma_3$	0.065	0.645	0.7475
Исключённое	θ	$\theta = \mathrm{B} \setminus \cup A_i, \ \forall i$	0.0825	–	–
Пространство	В	Универсальное	1	1	1

6. *Леденева Т. А.* Аксиоматический подход к построению функций агрегирования для оценочных систем / Т. М. Леденева, Д. А. Денисихина // Вестник Воронежского государственного университета. – 2014. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – № 4. – С. 75–79.

7. *Ганцева Е. А.* Формирование экспертного вывода на основе теории свидетельств / Е. А. Ганцева, В. А. Каладзе, А. М. Поляков // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2015. – Т. 11. – № 1. – С. 42–46.

8. *Smets P.* The application of the matrix calculus to belief functions / P. Smets // Int. Journal of Approximate Reasoning. – 2002. – Vol. 31. – P. 1–30.

9. *Sentz K.* Combination of Evidence in Dempster-Shafer Theory / K. Sentz, S. Ferson // Sandia Corporation. – N-M. – 2002. – P. 96.

10. *Yager R.* On the Dempster-Shafer framework and new combination rules / R. Yager // Information Science. – 1987. – 41(2): 93–137.

11. *Jiang W.* A New Method to Determine BPA in Evidence Theory / W. Jiang, Y. Deng, J. Peng // Journal of Computers. – 2011. – V. 6. – № 6. – P. 1162–1167.

12. *Zadeh L.A.* A Simple View of the Dempster-Shafer Theory of Evidence and its Implication for the Rule of Combination / L. A. Zadeh // A Computer Science the ai Magazine. – 1986. – P. 85–90.

13. *Подвальный С. Л.* Многоальтернативность как основа обеспечения интеллектуальности систем управления / С. Л. Подвальный, Т. М. Леденева // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2012. – Т. 8. – № 11. – С. 17–23.

14. *Ганцева Е. А.* Интеллектуальный критерий качества математических моделей сложных систем: идеология, перспективы разработки / Е. А. Ганцева, В. А. Каладзе, А. М. Поляков // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2013. – Т. 9. – № 5.1. – С. 52–56.

Ганцева Екатерина Александровна – кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизированных и вычислительных систем, Воронежский государственный технический университет.
Тел.: (473) 243-77-18
E-mail: caladze@yandex.ru

Каладзе Владимир Александрович – доктор технических наук, профессор-исследователь кафедры информатики и вычислительной техники, Международный институт компьютерных технологий (г. Воронеж).
Тел.: (473) 239-29-67
E-mail: wakaladze@yandex.ru

Gantseva E. A. – Candidate of Technic Science, Associative Professor, dept. of Automatize and Computing systems Voronezh State Technical University.
Tel.: (473) 243-77-18
E-mail: caladze@yandex.ru

Kaladze V. A. – Doctor of Technic Science, Professor-investigator of dept. of Information science and Computing tools, International Institute of Computer Technologies (s. Voronezh).
Tel.: (473) 239-29-67
E-mail: wakaladze@yandex.ru